Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Шур, К теореме об асимптотической равномерности распределенности сверточных степеней симметричных мер на унимодулярной группе, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 1, 120–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1808>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 18:00:12

К ТЕОРЕМЕ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ РАВНОРАСПРЕДЕЛЕННОСТИ СВЕРТОЧНЫХ СТЕПЕНЕЙ СИММЕТРИЧНЫХ МЕР НА УНИМОДУЛЯРНОЙ ГРУППЕ

М. Г. Шур

1. Введение и результаты. В основном результате статьи [1], сформулированном ниже в форме теоремы 0, подытожены достижения серии работ (см. [1]), связанных с попытками переноса на недискретные группы известной предельной теоремой для отношений, принадлежащей Аве [2]. В теореме 0 рассматривается симметричная вероятностная мера μ на некоторой локально компактной унимодулярной группе G , причем предполагается, что если какое-либо открытое подмножество группы G непусто, то сверточные степени этой меры, исключая, возможно, их конечное число, нагружают это множество (см. условие (A)). Цель предлагаемой заметки – показать (см. теорему 1), какие изменения претерпевает теорема 0, когда приведенное предположение заменяется требованием совпадения группы G с замыканием ее подгруппы, порожденной носителем μ (см. условие (A₁)). Попутно обнаруживается (см. лемму 1), что условие (A₁) влечет (A) применительно к сверточному квадрату меры μ и некоторой открыто-замкнутой подгруппе исходной группы.

На протяжении работы фиксируется некоторая локально компактная сепарабельная унимодулярная группа G с единичным элементом e (групповой операцией служит умножение; алгебраическая терминология заимствована из [3]). Фиксируются также мера Хаара ξ и вероятностная симметричная мера μ , заданные на семействе $\mathcal{B}$ борелевских множеств в G (таким образом, $\mu(G) = 1$ и $\mu(A) = \mu(A^{-1})$ для $A \in \mathcal{B}$, где $A^{-1} = \{x \in G : x^{-1} \in A\}$).

Введем условия

- (A) для любого непустого открытого $U \subset G$ найдется такое натуральное $N = N(U)$, что $\mu^n(U) > 0$ при всех $n > N$, где μ^n – сверточная степень меры μ ($n \in \mathbb{N}$);
- (B) при некотором $n \geq 1$ мера μ^n несингулярна относительно ξ .

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда, грант 3J000.

Если выполняется аналог (А) с некоторой открытой подгруппой $H \subset G$ вместо G , то будем говорить, что μ удовлетворяет условию $A(H)$.

Образуем семейство $\mathcal{C}_0^+$ из всевозможных непрерывных функций $f: G \rightarrow [0, \infty)$ с компактными носителями, исключая $f \equiv 0$. При выполнении (А) предел $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu^n(f)]^{1/n}$ существует для всех $f \in \mathcal{C}_0^+$ и не зависит от конкретного выбора f (ср. [1], [4]; мы пишем $\nu(f) = \int f d\nu$, если f интегрируема по некоторой мере ν). Величина ρ называется спектральным радиусом меры μ .

Основной результат работы [1] заключается в следующем.

ТЕОРЕМА 0. Пусть мера μ удовлетворяет условиям (А) и (Б) и имеет спектральный радиус $\rho = 1$. Тогда меры μ^n , $n \geq 1$, асимптотически равномерно распределены в том смысле, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\mu^n(f)}{\mu^{n+m}(g)} \right] = \frac{\xi(f)}{\xi(g)} \quad (1)$$

для любых $f, g \in \mathcal{C}_0^+$ и $m \in \mathbb{N}$.

Как уже говорилось, мы будем изучать эффект от замены условия (А) более слабым требованием (см. [5, предположение 4.2]):

(А₁) наименьшая замкнутая подгруппа группы G , содержащая носитель μ , совпадает с G .

Резервируем символ H для обозначения наименьшей замкнутой подгруппы группы G , содержащей носитель меры μ^2 .

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия (А₁) и (Б). Тогда H – открытая нормальная подгруппа группы G , причем факторгруппа G/H содержит не более двух элементов. Кроме того, мера μ^2 удовлетворяет условию $A(H)$.

Таким образом, при условиях (А₁) и (Б) сужение μ^2 на совокупность борелевских подмножеств множества H обладает спектральным радиусом, который ради краткости назовем спектральным радиусом самой меры μ^2 .

Из свойств связных групп следует (см. [2, следствие (7.9)]), что в случае связности G факторгруппа G/H из леммы 1 содержит единственный элемент. Другой пример: если $G = \mathbb{Z}$, а μ – вероятностная мера на $\mathbb{Z}$, приписывающая точкам ± 1 массы, равные $1/2$, то G/H содержит два элемента (в этом примере, вопреки ранее сделанной оговорке, роль групповой операции играет сложение).

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 1 и ее доказательство (см. п. 2) сохраняют силу и без предположения об унимодулярности G (в этой ситуации в качестве ξ следует использовать левую меру Хаара).

Следующая теорема, составляющая главный результат работы, устанавливает, что нередко (например, если G связна) утверждение теоремы 0 сохраняет силу при замене условия (А) на (А₁). В остальных же случаях при такой замене равенство (1) заменяется равенствами (2) и (3).

ТЕОРЕМА 1. Пусть реализуются условия (A_1) и (B) и мера μ^2 имеет спектральный радиус $\rho_2 = 1$. Если $H = G$, то выполнено условие (A) и продолжает действовать утверждение теоремы 0. Если же $H \neq G$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\mu^{2n}(f)}{\mu^{2n+m}(g)} \right] = \frac{\xi(f)}{\xi(g)} \quad (2)$$

для всех $f, g \in \mathcal{C}_0^+$ с носителями, лежащими в H , и всех четных m и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\mu^{2n+1}(f)}{\mu^{2n+m}(g)} \right] = \frac{\xi(f)}{\xi(g)} \quad (3)$$

для всех $f, g \in \mathcal{C}_0^+$ с носителями, лежащими в $G \setminus H$, и всех нечетных m .

В заключение пункта вкратце остановимся на вероятностном смысле приведенных результатов. Пусть линейный оператор P , действующий в пространстве ограниченных борелевских функций f на G , определен равенством $Pf(x) = \int f(xy)\mu(dy)$, $x \in G$. Он является переходным оператором правого случайного блуждания на G с законом μ (т.е. блуждания с переходными вероятностями $p(x, dy) = \mu(x^{-1}dy)$, $x \in G$ [6]). Равенство (1) эквивалентно соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{P^n f(x)}{P^{n+m} g(e)} \right] = \frac{\xi(f)}{\xi(g)}, \quad (4)$$

где e — единичный элемент, а в остальном сохранены обозначения из теоремы 0. Естественным считать равенства (1) и (4) означающими асимптотическую равномерность введенного случайного блуждания. Близкую интерпретацию допускают (2) и (3). В соответствии же с леммой 1 (см. также доказательство леммы 5) число циклических классов рассматриваемого случайного блуждания равно 1 или 2, причем подгруппа H образует циклический класс.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1 сводится к доказательству лемм 2–5, в которых постулируются условия леммы 1. Встречающиеся в дальнейшем множества безоговорочно считаются борелевскими подмножествами группы G .

Пусть ξ_A , $A \subset G$, — сужение меры Хаара ξ на A (точнее, $\xi_A(B) = \xi(B)$ при $B \subset A$ и $\xi_A(B) = 0$ при $B \subset G \setminus A$) и $T(\mu)$ — наименьшая замкнутая подполугруппа в G , содержащая носитель μ . Будем говорить, что для открытого множества U выполняется условие минорирования $M(r, b, U)$ (соответственно $M(r, b, U)$), если $\mu^r \geq b\xi_U$ при некоторых $b > 0$ и $r \in \mathbb{N}$ (если реализуется $M(r, b, U)$ с каким-либо $b = b(r) > 0$). Первое из этих условий родственно своему аналогу из [5] применительно к ядру $p(x, dy)$, введенному в конце п. 1. Множество $S(\mu)$, определяемое как объединение всех открытых U , для которых действует $M(r, U)$ при каком-нибудь $r \geq 1$,

содержится в $T(\mu)$ и является открытой подполугруппой в G (при доказательстве этих фактов условие (A_1) не используется [6, гл. 3]).

ЛЕММА 2. *Справедливы равенства*

$$S(\mu) = T(\mu) = G \quad \text{и} \quad S(\mu^2) = T(\mu^2) = H. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подполугруппа $T(\mu)$ является симметричным множеством: $T(\mu) = T^{-1}(\mu)$ в силу симметричности μ . Поэтому она образует замкнутую подгруппу группы G и $T(\mu) = G$ ввиду (A_1) . Отсюда и из включения $S(\mu)T(\mu) \subset S(\mu)$ (см. [6, гл. 3]) следует первая пара равенств (5). Аналогичные соображения ведут ко второй паре.

Поскольку $S(\mu^2)$ открыто, из леммы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Подгруппа H и открыта, и замкнута.*

ЛЕММА 3. *Единичный элемент e содержится в носителе любой из мер μ^{2n} , $n \geq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathscr{W}$ (соответственно $\mathscr{V}$) – совокупность всех окрестностей (симметричных окрестностей) точки e . Если $x \in G$, $V \in \mathscr{V}$ и $y = vx$ с $v \in V$, то $y^{-1}V^2 = x^{-1}v^{-1}V^2 \supset x^{-1}V$, так что

$$\begin{aligned} \mu^{2n}(V^2) &= \int_G \mu^n(y^{-1}V^2) \mu^n(dy) \geq \int_{Vx} \mu^n(y^{-1}V^2) \mu^n(dy) \\ &\geq \mu^n(x^{-1}V) \mu^n(Vx) = [\mu^n(Vx)]^2 \end{aligned} \quad (6)$$

в силу симметричности μ . Последнее выражение в (6) положительно, если x лежит в носителе μ^n , и, таким образом, $\mu^{2n}(V^2) > 0$ для $V \in \mathscr{V}$. Поэтому $\mu^{2n}(W) > 0$, если $W \in \mathscr{W}$, так как $W \supset V^2$, если V достаточно мало [3].

ЛЕММА 4. *Пусть открытое множество $U \subset H$ имеет компактное замыкание. Тогда при всех достаточно больших четных r реализуется условие $M(r, U)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала допустим, что для некоторой окрестности U' точки $x \in G$ выполнено условие $M(r, U')$ с каким-либо $r \geq 1$. Пусть $W \in \mathscr{W}$, $Wx \subset U'$ и $V^2 \subset W$, где $V \in \mathscr{V}$ (используются обозначения из предыдущего доказательства). Если $A \subset Vx$ и $y \in V$, то $yA \subset Wx \subset U'$, так что (ср. с (6)) $\mu^{r+2}(A)$ оценивается снизу интегралом

$$\int_V \mu^r(y^{-1}A) \mu^2(dy) \geq b' \int_V \xi(y^{-1}A) \mu^2(dy) = b' \xi(A) \mu^2(V),$$

где использовано $M(r, U')$ с соответствующим $b' > 0$. Отсюда и из леммы 3 следует условие $M(r+2, U_1)$ с $U_1 = Vx$, и, применяя индукцию, легко найти окрестности U_n , $n \geq 2$, точки x , для которых реализуются условия $M(r+2n, U_n)$.

Пусть теперь K является замыканием множества U , о котором говорится в тексте леммы. Ввиду леммы 2 при любом $x \in K$ применимо условие $M(r(x), U(x))$, если четное $r(x)$ и окрестность $U(x)$ точки x выбраны подходящим образом. Из покрытия $\{U(x); x \in K\}$ компакта K выделим конечное подпокрытие $\{U(x_i); 1 \leq i \leq m\}$ и положим $r_1 = \max\{r(x_i); 1 \leq i \leq m\}$. Согласно первому абзацу доказательства при любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in K$ действует $M(r_1 + 2n, U_n(x))$, если окрестность $U_n(x)$ точки x достаточно мала. Из покрытия $\{U_n(x); x \in K\}$ вновь выделяем конечное подпокрытие $\{U_n(x_{in}); 1 \leq i \leq m_n\}$ компакта K . Теперь гарантировано выполнение $M(r_1 + 2n, V_n)$ с $V_n = \bigcup_i U_n(x_{in})$, а с ним и выполнение $M(r_1 + 2n, U)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Мера μ^2 подчиняется условию $A(H)$.

ЛЕММА 5. Имеет место альтернатива: либо $H = G$, либо H – нормальная подгруппа группы G и факторгруппа G/H состоит из двух элементов. В первом случае выполнено условие (A). Во втором

$$\mu^{2n-1}(H) = \mu^{2n-1}(y(G \setminus H)) = 0, \quad (7)$$

если $y \in G \setminus H$ и n натурально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО использует терминологию и результаты из [5, гл. 2]. Ядро $p = p(x, dy)$, отвечающее случайному блужданию с переходным оператором P (см. конец п. 1) является неприводимым с максимальной определяющей неприводимость мерой ξ (свойство максимальной обеспечивается предложением 2.4 [5]). Пусть множество U открыто, имеет компактное замыкание и содержит элемент e . Объединим в множество Q все натуральные r , для которых при некотором $b(r) > 0$ осуществляется неравенство $\mu^r(x^{-1}A) \geq b(r)\xi(A)$, коль скоро $x \in U$ и $A \subset U$ (отметим, что левая часть неравенства равна вероятности перехода из x в A за r шагов, отвечающей упомянутому случайному блужданию). Так как $e \in U$, при $r \in Q$ действует условие $M(r, U)$. Для наибольшего общего делителя d элементов множества Q имеются лишь две возможности: либо $d = 1$, либо $d = 2$ (см. лемму 4), т.е. либо ядро p апериодично, либо имеет период $d = 2$. Эти возможности рассматриваются поочередно.

Случай $d = 1$. В этой ситуации Q содержит все достаточно большие натуральные числа [6, гл. 6]. Если $f \in \mathcal{C}_0^+$, то $P^m f(e) = \mu^m(f) > 0$ при некотором натуральном m . Поэтому в силу феллеровского свойства сверточных ядер [6] $P^m f > 0$ в некоторой окрестности элемента e . Однако при $n > m$

$$\mu^n(f) \geq \int_U P^m f(y) \mu^{n-m}(dy)$$

(ср. (6)) и, если n достаточно велико, то $n - m \in Q$, так что применимо условие $M(n - m, U)$. Отсюда $\mu^n(f) > 0$ при достаточно больших n , а это влечет и равенство $H = G$, и условие (A).

Случай $d = 2$. Аппроксимировав функцию-индикатор прежнего множества U неубывающей последовательностью функций из $\mathcal{C}_0^+$ и вновь вспоминая о феллеровском свойстве, устанавливаем полунепрерывность снизу функций $R_i(x) = \sum_{n \geq 1} \mu^{2n-i}(x^{-1}U)$, $x \in G$ ($i = 0, 1$). Поэтому множества $A_i = \{x : R_i(x) > 0\}$ открыты.

Согласно лемме 4 $H \subset A_0$. Если же $x \in A_0$, то в $x^{-1}U$ лежит хотя бы одна точка y из носителя меры μ^{2n} , который содержится в $T(\mu^2) = H$ (см. (5)), вследствие чего $x \in Uy^{-1} \subset H$. Итак, $A_0 \subset H$, а потому $A_0 = H$.

Покажем, что пространство левых классов смежности G/H состоит лишь из элементов H и $F = G \setminus H$. Фиксируя $y \in F$ и какой-нибудь 2-цикл, отвечающий ядру p , и используя сказанное в начале доказательства теоремы 2.2 [5], устанавливаем, что каждый из элементов как пары $(H = A_0, A_1)$, так и пары (yH, yA_1) совпадает (mod 0) (т.е. совпадает с точностью до множества ξ -меры 0) с одним из множеств, составляющих 2-цикл. Стало быть, либо $H = yH$ (mod 0), либо $H = yA_1$ (mod 0). Выполнение первого из этих равенств означало бы, что $y \in H$, а это исключено. Следовательно, реализуется второе из них, и поэтому, как A_1 , так и $F = A_1$ (mod 0) совпадают с yH (mod 0). Множество $F \setminus yH$ открыто, будучи разностью открытого и замкнутого множеств, и по доказанному $\xi(F \setminus yH) = 0$. Отсюда $yH \supset F$, тогда как обратное включение очевидно. В итоге $yH = F$ для всех $y \in F$, чем и достигается цель абзаца.

Пусть снова $y \in F$. Ясно, что $x \in yH = F = y^{-1}H$ в том и только том случае, когда $x^{-1} \in F = Hy$, т.е. когда $x \in Hy$. Следовательно, $yH = Hy$ и подгруппа H нормальна.

Теперь заметим, что пересечение A_1 и H пусто, поскольку оно открыто и имеет ξ -меру 0. Поэтому $A_1 \subset F$, вследствие чего $A_1 = F$ (в противном случае $H \cup A_1$ отличалось бы от G , а это не так). Отсюда, учитывая определение A_0 и A_1 , легко выводим, что множества $H = A_0$ и $F = A_1$ образуют 2-циклы, и равенства (7) становятся очевидными.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $H = G$. Тогда по лемме 5 выполнено условие (А). Если ρ и ρ_2 – спектральные радиусы мер μ и μ^2 соответственно, то $1 = \rho_2 = \rho^2$, т.е. $\rho = 1$. Таким образом, при $H = G$ применима теорема 0.

Далее считаем $H \neq G$ и обоснуем лишь (3), так как (2) вытекает из леммы 1 и теоремы 0. Зададим функцию $f \in \mathcal{C}_0^+$ с носителем в $F = G \setminus H$, компакт $K \subset F$ и точку $z \in K$. Ввиду леммы 1 носители функций из семейства $\{f_y; y \in F\}$ содержатся в H , где положено $f_y(x) = f(yx)$, $x \in G$. Равенство $f(yx) = h(z^{-1}yx)$ с $h = f_z$ и лемма 4 позволяют найти такие $c > 0$ и четное $r \geq 0$, что $\int f(yxu)\mu^r(du) \geq ch(x)$ при $y \in K$ и $x \in G$. По аналогии с (3.3) из [4] и с учетом предложения 1 из [1] находим

$$c\mu^{2n-r}(h) \leq \mu^{2n}(f_y) \quad (y \in K) \quad \text{и} \quad \mu^{2n}(f_y) \leq d\mu^{2n}(h) \quad (y \in F) \quad (8)$$

при $n > r/2$ и подходящем $d > 0$. При этом согласно (2)

$$\frac{\mu^{2n}(f_y)}{\mu^{2n}(h)} \rightarrow 1,$$

если $y \in K$ и $n \rightarrow \infty$, и в (8) можно взять $r = 0$, если n достаточно велико.

В силу (7)

$$\begin{aligned} \mu^{2n+1}(f) &= \int_F \left[\int_G f(yx) \mu^{2n}(dx) \right] \mu(dy) \\ &= \int_F \mu^{2n}(f_y) \mu(dy) = I_n + J_n, \end{aligned} \quad (9)$$

где I_n и J_n получаются из второго интеграла в результате сужения F до K и $F \setminus K$ соответственно. Из сказанного в предыдущем абзаце находим

$$I_n \sim \mu^{2n}(h)\mu(K), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{и} \quad J_n \leq d\mu^{2n}(h)\mu(F \setminus K),$$

трактуя эквивалентность в духе стандартного курса анализа. Аналогично, если на функцию g наложены те же условия, что и на f , а $m \geq 1$ нечетно, то $\mu^{2n+m}(g) = \tilde{I}_n + \tilde{J}_n$, где

$$\tilde{I}_n \sim \mu^{2n+k}(\tilde{h})\mu(K), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{и} \quad \tilde{J}_n \leq \tilde{d}\mu^{2n+k}(\tilde{h})\mu(F \setminus K)$$

при некотором $\tilde{d} > 0$, $k = m - 1$ и $\tilde{h} = g_z$ (разумеется, $g_z(x) \equiv g(zx)$). За счет выбора K величина $\mu(F \setminus K)$ может быть сделана сколь угодно малой, и, применяя (2) с h и $\tilde{h}$ вместо f и g соответственно, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\mu^{2n+1}(f)}{\mu^{2n+m}(g)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{I_n}{J_n} \right] = \frac{\xi(h)}{\xi(\tilde{h})},$$

а это равносильно (3), так как h и $\tilde{h}$ индуцируются функциями f и g и левыми сдвигами их аргументов.

Московский государственный институт
электроники и математики

Поступило
25.11.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шур М.Г. Асимптотическая равномерность сверточных степеней симметричных вероятностных мер на унимодулярных группах // Функцион. анализ и его прилож. 1992. Т. 27. № 1. С. 92–93.
- [2] Avez A. Limite de quotients pour les marches aléatoires sur les groups // C. R. Acad. Sci. Paris. 1973. V. 276. № 4. P. 317–320.
- [3] Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975.
- [4] Шур М.Г. К предельным теоремам для отношений, порожденных случайными блужданиями в однородных пространствах. 1 // Теория вероятн. и ее примен. 1988. Т. 33. № 4. С. 706–719.
- [5] Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. М.: Мир, 1989.
- [6] Revuz D. Markov chains. Amsterdam, N.Y.: North-Holland, 1975.