Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, Омега-теоремы для дзетовых сумм, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 2, 228–233

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:40:45

УДК 511

ОМЕГА-ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ДЗЕТОВЫХ СУММ

А. А. Карацуба

Получены нижние оценки модулей тригонометрических сумм теории дзета-функции Римана.

Библиография: 9 названий.

Будем употреблять устоявшиеся обозначения; в частности, $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, $s = \sigma + it$, $i^2 = -1$, σ, t – вещественные числа; $c, c_1, \dots$ – абсолютные положительные постоянные, в разных утверждениях, вообще говоря, разные; постоянные в знаках $\ll$ абсолютные.

Дзетовыми суммами называются тригонометрические суммы S вида (см. [1, с. 66])

$$S = \sum_{n \leq N} n^{it}, \quad S = \sum_{a < n \leq b} n^{it}.$$

Здесь t – растущий параметр, $t \geq t_1 > 0$; $N = N(t) \leq t$, или, часто, $N \leq \sqrt{t}$; точно также, $0 < a < b \leq t$ или $b \leq \sqrt{t}$. Количество слагаемых в S называется *длиной суммы*, и чем больше в ней слагаемых, тем “более длинной” она является. Суммы S и верхние оценки $|S|$ тесно связаны с порядком роста $|\zeta(\sigma + it)|$, $t \rightarrow +\infty$, σ – фиксированное число (см. [2, с. 112]). Естественно поставить вопрос о равномерных по t и N оценках дзетовых сумм и омега-теоремах для них. Похожие вопросы, но только для полных рациональных тригонометрических сумм, рассматривались автором в [3]. Отмечу также, что в [4] автор доказал омега-теорему для остаточного члена в многомерной проблеме делителей Дирихле, причем форма остаточного члена имеет такой вид, который был получен Дирихле, т.е. равномерный по количеству слагаемых в сумме и количеству сомножителей, определяющих функцию делителей. Эта омега-теорема также связана с дзетовыми суммами.

Осреднение по t квадрата модуля S показывает, что “основное количество” $|S|$ оценивается сверху чуть более грубо, чем корень квадратный из числа слагаемых. Действительно, если $T \geq T_1 > 0$, $2 \leq N \leq \sqrt{T}$ и множество $E \subset (T, 2T)$ есть множество тех чисел t , для которых выполняется неравенство

$$\left| \sum_{n \leq N} n^{it} \right| \geq \sqrt{N} h(T), \quad h(T) > 0,$$

то легко находим, что

$$Nh^2(T)\mu(E) \leq \int_E \left| \sum_{n \leq N} n^{it} \right|^2 dt \leq \int_T^{2T} \left| \sum_{n \leq N} n^{it} \right|^2 dt \leq TN + 16N \log N \leq 17TN.$$

Отсюда для меры $\mu(E)$ получаем оценку

$$\mu(E) \leq T\Delta, \quad \Delta = 17h^{-2}(T).$$

Если взять $h(T) = \log^c T$, $c > 0$, то получаем, что для всех $t \in (T, 2T)$, за исключением $t \in E \subset (T, 2T)$, $\mu(E) \leq 17T \log^{-2c} T$, выполняется оценка

$$\left| \sum_{n \leq N} n^{it} \right| \leq \sqrt{N} \log^c T. \quad (1)$$

Ниже будет показано, что существуют бесконечная последовательность чисел T , $T \rightarrow +\infty$, и бесконечная последовательность чисел $N \leq \sqrt{T}$, $N \rightarrow +\infty$, такие, что нижняя оценка отвечающих им дзетовых сумм много больше, чем правая часть (1). Для доказательства теоремы 1 нужна будет нижняя оценка $|\zeta(1/2 + it)|$. Сформулирую в виде леммы 1 только частный случай более общего утверждения из [5, с. 46].

ЛЕММА 1. *Существует постоянная $T_0 > 0$ такая, что при $T \geq T_0$ выполняется следующее неравенство:*

$$\max_{T \leq t \leq 2T} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| \geq \exp\left(\frac{3}{4} \sqrt{\frac{\log T}{\log \log T}}\right).$$

ТЕОРЕМА 1. *Существует бесконечная последовательность чисел t_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, таких, что $t_1 \geq 1$, $t_{\nu+1}t_\nu^{-1} \geq 2$, и обладающих следующим свойством: при каждом $t = t_\nu$ на интервале $(1, P)$, $P = [\sqrt{t/(2\pi)}]$, найдется по крайней мере K натуральных чисел N ,*

$$K \geq f^2(t), \quad \text{где} \quad f(t) = \exp\left(\frac{3}{5} \sqrt{\frac{\log t}{\log \log t}}\right),$$

таких, что выполняется неравенство

$$\left| \sum_{n \leq N} n^{it} \right| \geq \sqrt{N} f(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в лемме 1 $T = 4^\nu T_0$, $\nu = 1, 2, \dots$. Последовательность чисел t_ν , существование которой утверждается в теореме, определяется равенством

$$\max_{T \leq t \leq 2T} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| = \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it_\nu \right) \right|.$$

Очевидно, что $t_{\nu+1} t_\nu^{-1} \geq 2$, $\nu = 1, 2, \dots$. Положим, далее, $t = t_\nu$. Пусть при каждом натуральном числе N , $1 \leq N \leq P$, выполняется неравенство

$$\left| \sum_{n \leq N} n^{it} \right| \leq 2\sqrt{N} f(t). \quad (2)$$

Пользуясь приближенным уравнением Харди–Литтлвуда, находим

$$\left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| \leq 2 \left| \sum_{n \leq P} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{it} \right| + O(t^{-1/4}).$$

Полагая

$$S(n) = \sum_{m \leq n} m^{it},$$

получаем

$$\sum_{n \leq P} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{it} = \frac{1}{\sqrt{P}} S(P) + \sum_{1 < n \leq P} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) S(n-1).$$

Отсюда и из (2) следуют такие оценки:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq P} \frac{1}{\sqrt{n}} n^{it} &\leq 2f(t) + \sum_{1 < n \leq P} \frac{1}{n} 2f(t) < 2f(t) \log t, \\ \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| &\leq 5f(t) \log t, \quad t \geq t_0 > 0. \end{aligned}$$

Но последнее неравенство противоречит оценке леммы 1. Поэтому предположение о том, что при каждом N , $1 \leq N \leq P$, выполняется (2), неверно: найдутся N такие, что

$$\left| \sum_{n \leq N} n^{it} \right| > 2\sqrt{N} f(t).$$

Пусть N – одно из них. Из верхней тривиальной оценки $|S(N)|$ получаем

$$N > 2\sqrt{N} f(t), \quad N > 4f^2(t).$$

Далее, при любом целом числе $M \geq 0$ справедливо равенство

$$S(N+M) = S(N) + \sum_{N < n \leq N+M} n^{it}.$$

Переходя к неравенствам, будем иметь

$$|S(N+M)| \geq |S(N)| - M > 2\sqrt{N} f(t) - M \geq \sqrt{N+M} f(t),$$

если только $M \leq \sqrt{N} f(t)/2$. Вспоминая, что $N > 4f^2(t)$, заключаем: существует по крайней мере K , $K \geq f^2(t)$, чисел n таких, что

$$|S(n)| \geq \sqrt{n} f(t).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что, по-видимому, нельзя получить оценку дзетовой суммы лучшую, чем, например, такая:

$$|S(N)| \leq \sqrt{N} \exp\left(c \sqrt{\frac{\log t}{\log \log t}}\right), \quad (3)$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная.

Верхние оценки для $|S(N)|$, которые получаются даже из гипотезы Римана (будем называть ее RH), сильно отличаются от (3).

ТЕОРЕМА 2. *При справедливости RH имеет место следующая оценка:*

$$|S(N)| \leq \sqrt{N} \exp\left(c \frac{\log t}{\log \log t}\right), \quad (4)$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная, $N \leq t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы повторяет доказательство теоремы 1 из [6, с. 153] (или решение задачи 1 из [2, с. 112]) с использованием оценки $|\zeta(1/2 + it)|$, $t \geq t_1 > 0$, которая следует из RH (см., например, [7, с. 350]):

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| \ll \exp\left(A \frac{\log t}{\log \log t}\right), \quad A > 0.$$

Оценки дзетовых сумм (3) и (4) будут нетривиальными, если выполнены соответственно неравенства

$$N \geq \exp\left(c_1 \sqrt{\frac{\log t}{\log \log t}}\right), \quad N \geq \exp\left(c_1 \frac{\log t}{\log \log t}\right),$$

где $c_1 > 0$ – абсолютная постоянная, $t \geq t_1 > 0$. Вспоминая оценку $|S(N)|$, полученную методом Виноградова (см. [8] или [1, с. 95]):

$$|S(N)| \leq N \exp\left(-c \frac{\log^3 N}{\log^2 t}\right), \quad (5)$$

видим, что она будет нетривиальной, если только

$$N \geq \exp(c_1 \log^{2/3} t).$$

Следовательно, метод Виноградова позволяет оценивать нетривиально более короткие дзетовые суммы, чем те, которые оценены в теореме 2 на основе RH. Но оценки коротких дзетовых сумм позволяют уточнять границу нулей $\zeta(s)$. Посмотрим, что в этом случае дает оценка (3). Для этого нужна следующая лемма 2 (см. [7, с. 62]), устанавливающая связь между ростом $|\zeta(s)|$ и границей нулей $\zeta(s)$.

ЛЕММА 2. Пусть при $t \rightarrow +\infty$

$$\zeta(s) = O(e^{\varphi(t)})$$

в области

$$1 - \theta(t) \leq \sigma \leq 2, \quad t \geq t_1 > 0,$$

где $\varphi(t)$ и $\theta^{-1}(t)$ – положительные неубывающие функции такие, что $\theta(t) \leq 1$, $\varphi(t) \rightarrow +\infty$, и, кроме того,

$$\frac{\varphi(t)}{\theta(t)} = o(e^{\varphi(t)}).$$

Тогда существует постоянная $A > 0$ такая, что $\zeta(s)$ не имеет нулей в области

$$\operatorname{Re} s = \sigma \geq 1 - A \frac{\theta(2t+1)}{\varphi(2t+1)}, \quad t \geq t_1 > 0.$$

ТЕОРЕМА 3. При выполнении оценки (3) функция $\zeta(s)$ не имеет нулей в области

$$\operatorname{Re} s = \sigma \geq 1 - c_1 \sqrt{\frac{\log \log t}{\log t}}, \quad t \geq 14, \quad (6)$$

где $c_1 > 0$ – абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3) и приближенного функционального уравнения $\zeta(s)$ находим оценку $|\zeta(\sigma + it)|$, $1/2 \leq \sigma \leq 1$, $t \geq 2$:

$$|\zeta(\sigma + it)| \ll \exp\left(c_2 \sqrt{\frac{\log t}{\log \log t}}\right), \quad c_2 > 0.$$

Полагая в лемме 2

$$\varphi(t) = c_2 \sqrt{\frac{\log t}{\log \log t}}, \quad \theta(t) = \frac{1}{2},$$

приходим к утверждению теоремы.

Сравнивая (6) с границей нулей $\zeta(s)$, полученной методом Виноградова,

$$\operatorname{Re} s = \sigma \geq 1 - c_1 \frac{1}{(\log t)^{2/3} (\log \log t)^{1/3}}, \quad t \geq 14,$$

видим, что эти два результата не сильно отличаются один от другого.

Еще один вид оценок дзетовых сумм, частным случаем которого является уже рассмотренный выше, выглядит так:

$$|S(N)| \leq N^\beta f(t), \quad (7)$$

где β – фиксированное число, $1/2 \leq \beta < 1$. Пользуясь омега-теоремой Монтгомери (см. [9]):

$$\zeta(\sigma + it) = O\left(\exp\left(c \frac{(\log t)^{1-\sigma}}{(\log \log t)^\sigma}\right)\right), \quad \frac{1}{2} < \sigma < 1,$$

и рассуждениями теоремы 1, приходим к заключению, что, по-видимому, наилучшей возможной оценкой вида (7) может быть только такая, у которой

$$f(t) = \exp\left(c \frac{(\log t)^{1-\beta}}{(\log \log t)^\beta}\right). \quad (8)$$

Повторяя рассуждения теоремы 3, приходим к утверждению, что из (7) и (8) следует такая граница нулей $\zeta(s)$: $\zeta(s) \neq 0$ в области s -плоскости вида

$$\operatorname{Re} s = \sigma \geq 1 - A \frac{(\log \log t)^\beta}{(\log t)^{1-\beta}}, \quad t \geq 14,$$

$A > 0$ – абсолютная постоянная.

Можно ставить вопрос об омега-оценках $|S(N)|$ другого вида, чем (7). Пусть при $1 \leq N \leq t$ выполнена оценка

$$|S(N)| \ll N \exp\left(-c \frac{\log^a N}{\log^b t}\right),$$

где $c > 0$ – постоянная, $a > b > 0$, $t \geq t_1 > 0$. При $a = 3$, $b = 2$ такая оценка получена Виноградовым (см. [8], [1]). Пользуясь омега-оценкой $|\zeta(1 + it)|$ или теоремой Дирихле из теории диофантовых приближений, легко доказать, что

$$\frac{a}{b} \ll \frac{\log \log t}{\log \log \log t}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1975.
- [2] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1983.
- [3] Карацуба А. А. Об оценках полных тригонометрических сумм // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 2. С. 199–208.
- [4] Карацуба А. А. О связи многомерной проблемы делителей Дирихле с границей нулей $\zeta(s)$ // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 3. С. 477–480.
- [5] Ramachandra K. On the Mean-Value and Omega-Theorems for the Riemann Zeta-Function. Bombay: Tata Inst. of Fund. Research, 1995.
- [6] Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994.
- [7] Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.
- [8] Виноградов И. М. Новая оценка функции $\zeta(1 + it)$ // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1958. Т. 22. № 2. С. 161–164.
- [9] Montgomery H. L. Extreme values of the Riemann zeta-function // Comment. Math. Helv. 1977. V. 52. P. 511–518.