Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. О. Гринив, Т. А. Мельник, О сингулярном функционале Рэля, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 1, 130–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1810>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 18:09:09

О СИНГУЛЯРНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ РЭЛЕЯ

Р. О. Гринив, Т. А. Мельник

Настоящая работа посвящена исследованию спектральных свойств оператор-функции (ОФ)

$$L(\lambda) = A(\lambda) - I, \quad \lambda \in (a, b) \subset \mathbb{R}, \quad (1)$$

где $A(\lambda)$ – непрерывная самосопряженная компактная ОФ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $(*, *)$, I – единичный оператор в $\mathcal{H}$. Кроме этого предполагаем, что выполнено следующее условие:

для любого ненулевого вектора $u \in \mathcal{H}$ функция

$$f_u(\lambda) := (L(\lambda)u, u), \quad \lambda \in (a, b), \quad (2)$$

возрастает в некоторой окрестности каждого своего нуля, если таковые существуют.

Понятно, что при таких условиях функция f_u не может иметь более одного нуля (возможно, кратного).

Спектральные свойства самосопряженных ОФ со свойством (2) исследовались с помощью функционала Рэля в [1]–[3]. Отметим, однако, что функционал Рэля определялся в этих работах при следующих предположениях: во-первых, для каждого ненулевого $u \in \mathcal{H}$ функция f_u имеет нуль $p(u) \in (a, b)$; во-вторых, либо ОФ $L(\lambda)$ непрерывно дифференцируема и нуль $p(u)$ функции f_u простой [1], либо функционал p ограничен, т.е. $\sup p \Subset (a, b)$ [2], [3].

Работа первого автора выполнена при поддержке Международного научного фонда, грант NCI300.

Поводом для рассмотрения ОФ вида (1)–(2) послужили работы [4], [5], в которых исследовалось асимптотическое поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ спектра задачи Неймана в густых сингулярно вырождающихся соединениях, зависящих от малого параметра ε . В этих работах было показано, что предельная ($\varepsilon = 0$) спектральная задача эквивалентна спектральной задаче для ОФ

$$S(\lambda) = (\lambda^2 + 1)A + \lambda \operatorname{tg} \lambda B - I, \quad \lambda \in (\pi n - \pi/2, \pi n + \pi/2), \quad n \in \mathbb{N},$$

где A и B – самосопряженные компактные операторы в $\mathcal{H}$, $A > 0$, $B \geq 0$.

К ОФ вида (1) можно также свести квадратичный пучок операторов

$$T(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda(\alpha A + B) + A + C,$$

рассматриваемый в работе [6]; здесь $A = A^* \gg 0$, обратный оператор A^{-1} компактен, операторы B и C симметричны и A -компактны. Спектры пучков $T(\lambda)$ и

$$\begin{aligned} T_1(\lambda) &= -(1 + \lambda\alpha)^{-1} A^{-1/2} T(\lambda) A^{-1/2} \\ &= -(1 + \lambda\alpha)^{-1} [\lambda^2 A^{-1} + \lambda A^{-1/2} B A^{-1/2} + A^{-1/2} C A^{-1/2}] - I \end{aligned}$$

совпадают, а пучок $T_1(\lambda)$ в интервале $(a_3, -1/\alpha)$ удовлетворяет условиям (1)–(2).

Легко видеть, что к ОФ $S(\lambda)$ и $T(\lambda)$ не могут быть применены методы работ [1]–[3], а метод, предложенный в работах [4], [5], [7], не является общим для ОФ вида (1)–(2).

В настоящей статье построен сингулярный функционал Рэля, с помощью которого установлены следующие результаты:

- 1) спектр ОФ $L(\lambda)$ на (a, b) дискретен;
- 2) единственно возможной точкой накопления собственных значений является точка $\lambda = b$; приведен критерий накопления;
- 3) для собственных значений доказаны вариационные принципы.

1. Исследование спектра ОФ $L(\lambda)$. Напомним, что точка $\mu_0 \in (a, b)$ является *регулярной точкой* ОФ $L(\lambda)$, если оператор $L(\mu_0)$ ограниченно обратим. Множество всех регулярных точек ОФ $L(\lambda)$ обозначим через $\rho(L)$. *Спектром* $\sigma(L)$ ОФ L в интервале (a, b) называется множество $\sigma(L) = (a, b) \setminus \rho(L)$. Число $\lambda_0 \in \sigma(L)$ называется *собственным значением* (СЗ) (геометрической) кратности $n = n(\lambda_0)$ ($n > 0$), если $\dim \operatorname{Ker} L(\lambda_0) = n$; при этом любой ненулевой вектор $u_0 \in \operatorname{Ker} L(\lambda_0)$ называется *собственным вектором* (СВ), отвечающим СЗ λ_0 .

Пусть $\lambda_0 \in \sigma(L)$, т.е. оператор $A(\lambda_0) - I$ не имеет ограниченного обратного. Так как оператор $A(\lambda_0)$ компактен, то число 1 является его конечнократным СЗ. Следовательно, спектр $\sigma(L)$ состоит из СЗ конечной кратности.

Определим *сингулярный функционал Рэля* $p: \mathcal{H} \setminus \{0\} \rightarrow [a, b]$ следующим образом:

$$p(u) = \begin{cases} a, & \text{если } f_u(\lambda) > 0 \quad \forall \lambda \in (a, b); \\ \alpha, & \text{если } f_u(\alpha) = 0; \\ b, & \text{если } f_u(\lambda) < 0 \quad \forall \lambda \in (a, b). \end{cases}$$

Очевидно, что для $\lambda \in (a, b)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} p(u) > \lambda &\iff (L(\lambda)u, u) = f_u(\lambda) < 0; \\ p(u) = \lambda &\iff (L(\lambda)u, u) = f_u(\lambda) = 0; \\ p(u) < \lambda &\iff (L(\lambda)u, u) = f_u(\lambda) > 0, \end{aligned}$$

из которых следует непрерывность функционала p .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [2]). Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ ($n \in \mathbb{N}$ или $n = \infty$) – система попарно различных СЗ ОФ $L(\lambda)$. Тогда

- 1) система соответствующих СВ $\{u_k\}$ линейно независима;
- 2) для произвольного ненулевого вектора g из замкнутой линейной оболочки системы векторов $\{u_k\}$ имеем

$$\inf\{\lambda_k\} \leq p(g) \leq \sup\{\lambda_k\}.$$

Обозначим через $N(\alpha, \beta)$ количество СЗ ОФ $L(\lambda)$ в интервале (α, β) с учетом кратности, а через $\pi(\mu)$ – количество положительных СЗ оператора $L(\mu)$ с учетом кратности. Очевидно, что $\pi(\mu)$ – конечная неубывающая функция.

ТЕОРЕМА 1. Пусть α и β – регулярные точки ОФ $L(\lambda)$. Тогда

$$N(\alpha, \beta) = \pi(\beta) - \pi(\alpha).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что $N(\alpha, \beta) \leq \pi(\beta) - \pi(\alpha)$. Для этого достаточно показать, что при прохождении аргумента λ через СЗ λ_0 значение функции $\pi(\lambda)$ увеличивается не менее, чем на $n(\lambda_0) = \dim \text{Ker } L(\lambda_0)$.

Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ – разбиение пространства $\mathcal{H}$ в ортогональную сумму $L(\lambda_0 - \varepsilon)$ -положительного и $L(\lambda_0 - \varepsilon)$ -неположительного инвариантных подпространств, порожденное спектральным разложением единицы оператора $L(\lambda_0 - \varepsilon)$. Тогда $\dim \mathcal{H}^+ = \pi(\lambda_0 - \varepsilon)$ и $\forall u \in \mathcal{H}^+ \setminus \{0\}$ имеем $(L(\lambda_0)u, u) > 0$. Подпространства $\mathcal{H}^+$ и $\text{Ker } L(\lambda_0)$ линейно независимы, ибо $p(x) < \lambda_0 \quad \forall x \in \mathcal{H}^+ \setminus \{0\}$, тогда как $p(y) = \lambda_0 \quad \forall y \in \text{Ker } L(\lambda_0) \setminus \{0\}$. Более того, линейал $\mathcal{L} = \mathcal{H}^+ \dot{+} \text{Ker } L(\lambda_0)$ является $L(\lambda_0)$ -неотрицательным, так как для $u = x + y$, $x \in \mathcal{H}^+$, $y \in \text{Ker } L(\lambda_0)$, имеем $(L(\lambda_0)u, u) = (L(\lambda_0)x, x) \geq 0$. Поэтому $(L(\lambda_0 + \varepsilon)u, u) > 0 \quad \forall u \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$, и, следовательно, $\pi(\lambda_0 + \varepsilon) \geq \dim \mathcal{L} = \pi(\lambda_0 - \varepsilon) + n(\lambda_0)$.

Докажем обратное неравенство. Заметим, что все неотрицательные СЗ оператора $L(\lambda)$ зависят от λ непрерывно. В частности, функция $\pi(\lambda)$ имеет скачок в точке λ_0 тогда и только тогда, когда нуль является СЗ оператора $L(\lambda_0)$, т.е. λ_0 – СЗ ОФ $L(\lambda)$. Таким образом, $N(\alpha, \beta) \geq \pi(\beta) - \pi(\alpha)$, и теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, когда по крайней мере одна из точек α или β принадлежит спектру $\sigma(L)$, верно равенство $N(\alpha, \beta) = \pi(\beta) - \pi(\alpha + 0)$.

СЛЕДСТВИЕ. Любой отрезок из интервала (a, b) содержит не более чем конечное число СЗ ОФ $L(\lambda)$, т.е. спектр ОФ $L(\lambda)$ в интервале (a, b) дискретен. Точкой накопления СЗ ОФ $L(\lambda)$ может служить лишь точка $\lambda = b$, что происходит в том и только том случае, когда $\pi(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow b - 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко видеть, что все доказанные утверждения останутся справедливыми, если вместо компактности ОФ $A(\lambda)$ в (1) потребовать, чтобы для всех λ из интервала (a, b) существенный спектр оператора $L(\lambda)$ не содержал неотрицательных точек и $\pi(\lambda) < \infty$.

2. Вариационные принципы. Докажем теперь для ОФ $L(\lambda)$ аналоги классических вариационных принципов. Расположим СЗ ОФ $L(\lambda)$ в неубывающем порядке с учетом их кратностей:

$$a < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$$

Положим $\pi(\lambda_1) = m$ и пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}_k^+ \oplus \mathcal{H}_k^-$ – разбиение пространства $\mathcal{H}$ в ортогональную сумму $L(\lambda_k)$ -положительного и $L(\lambda_k)$ -неположительного $L(\lambda_k)$ -инвариантных подпространств. Тогда $\dim \mathcal{H}_k^+ = \pi(\lambda_k) = m + k'$, где $k' < k$. Обозначим через M_{m+k} подпространство размерности $m+k$, натянутое на $\mathcal{H}_k^+$ и попарно ортогональные СВ $u_{k'+1}, \dots, u_k$, отвечающие СЗ $\lambda_{k'+1} = \dots = \lambda_k$. Понятно, что для любого ненулевого вектора $u \in M_{m+k}$ (соответственно $u \perp M_{m+k}$) выполнено неравенство $p(u) \leq \lambda_k$ (соответственно $p(u) \geq \lambda_k$). Пусть также $\mathbb{E}_n$ (соответственно $\mathbb{E}^n$) есть множество всех подпространств пространства $\mathcal{H}$ размерности n (соответственно коразмерности n).

Предварительно докажем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть E – подпространство $\mathcal{H}$. Тогда функционал Рэлея p достигает на E своего минимума.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\alpha_0 := \inf_{u \in E} p(u)$. Случай $\alpha_0 = b$ тривиален, поэтому пусть $\alpha_0 < b$ и последовательность векторов $\{u_n\} \subset E$ такова, что $\|u_n\| = 1$ и $p(u_n) \rightarrow \alpha_0$. Можно считать, что u_n слабо сходятся к $u_0 \in E$, $\|u_0\| \leq 1$. Пусть $\alpha > \alpha_0$, тогда ввиду компактности оператора $A(\alpha)$ для достаточно больших n имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq (L(\alpha)u_n, u_n) = (A(\alpha)u_n, u_n) - (u_n, u_n) \rightarrow (A(\alpha)u_0, u_0) - 1 \\ &\leq (A(\alpha)u_0, u_0) - (u_0, u_0) = (L(\alpha)u_0, u_0). \end{aligned}$$

Следовательно, $u_0 \neq 0$ и $p(u_0) \leq \alpha$, откуда ввиду произвольности $\alpha > \alpha_0$ получаем $p(u_0) = \alpha_0$.

ТЕОРЕМА 2. Для СЗ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ ОФ L справедлив вариационный принцип Пуанкаре–Ритца:

$$\lambda_n = \max_{E \in \mathbb{E}^{n+m-1}} \min_{0 \neq u \in E} p(u). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $E \in \mathbb{E}^{n+m-1}$, то для $u_0 \in E \cap M_{n+m}$, $u_0 \neq 0$, имеем $p(u_0) \leq \lambda_n$. Следовательно,

$$\max_{E \in \mathbb{E}^{n+m-1}} \min_{0 \neq u \in E} p(u) \leq \lambda_n,$$

причем равенство достигается для подпространства $E = \mathcal{H} \ominus M_{n+m-1}$ (если $\lambda_{n-1} = \lambda_n$) или $E = \mathcal{H}_n^-$ (если $\lambda_{n-1} < \lambda_n$).

ТЕОРЕМА 3. Для СЗ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ ОФ L справедлив вариационный принцип Фишера–Куранта–Вейля:

$$\lambda_n = \min_{E \in \mathbb{E}_{n+m}} \max_{0 \neq u \in E} p(u). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $E \in \mathbb{E}_{n+m}$, то для $u_0 \in E \cap \mathcal{H}_n^-$, $u_0 \neq 0$, имеем $p(u_0) \geq \lambda_0$. Следовательно,

$$\min_{E \in \mathbb{E}_{n+m}} \max_{0 \neq u \in E} p(u) \geq \lambda_n,$$

причем равенство достигается для подпространства M_{n+m} .

Отметим еще следующее простое следствие теоремы 1:

$$N(a, \lambda) = \pi(\lambda) - \pi(a + 0)$$

$$\begin{aligned} &= \max \{ \dim E : E \subset \mathcal{H}, \forall u \in E, u \neq 0 \quad (L(\lambda)u, u) > 0 \text{ \& \; } (L(a+0)u, u) < 0 \} \\ &= \max \{ \dim E : E \subset \mathcal{H}, \forall u \in E, u \neq 0 \quad a < p(u) < \lambda \}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В работах [1], [2] аналоги равенств (3) и (4) доказаны при дополнительных предположениях об ограниченности функционала Рэлея или полноте системы СВ ОФ $L(\lambda)$; в работе [3] вариационные принципы (3) и (4) установлены в случае $m = 0$ с $\sup$ и $\inf$ вместо $\max$ и $\min$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
30.11.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамов Ю. Ш. Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
2. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинев: Штиинца, 1986.
3. Максудов Ф. Г., Гасанов М. Г. // Докл. РАН. 1992. Т. 325. № 5. С. 915–918.
4. Мельник Т. А., Назаров С. А. // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1996. Т. 19.
5. Mel'nyk T. A., Nazarov S. A. // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1994. V. 346. P. 1343–1348.
6. Шкалик А. А., Гринив Р. О. // Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 2. С. 114–131.
7. Мельник Т. А. // Доповіді АН України. 1994. № 12. С. 7–9.