Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Гудошникова, Приближение непрерывных функций обобщенными операторами Саса–Миракьяна, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 1, 134–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1811>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:04:00

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ САСА-МИРАКЪЯНА

Е. В. Гудошникова

Пусть $V_{a,b}$, где a, b – некоторые неотрицательные константы, – множество непрерывных, невозрастающих на $[0, \infty)$ функций v таких, что $0 < v(x) \leq 1$ и для всех $t \geq x \geq 0$ $v(x)/v(t) \leq a \exp(bt/(1+x))$. (Например, для $m \geq 0$ $(1+x)^{-m} \in V_{1,m}$.)

Для $v \in V_{a,b}$ обозначим через $C(v)$ множество непрерывных на $[0, \infty)$ функций f таких, что функция vf ограничена. Для $f \in C(v)$ определим норму

$$\|f\|_v = \sup_{x \geq 0} |v(x)f(x)|$$

и модуль непрерывности

$$\omega_v(f; h) = \sup_{0 \leq \delta \leq h} \sup_{x \geq 0} v(x)|f(x+\delta) - f(x)|.$$

Наряду с этим через $\|f\|$ и $\omega(f; h)$ будем обозначать соответственно норму и модуль непрерывности в $C[a, b]$.

Пусть $R = (r_{n,k})_{n=1, k=0}^{\infty}$ – матрица неотрицательных чисел, $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел, $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность действительных чисел. Для $x > 0$, $n \geq 1$ положим

$$u_{n,k}(x, \rho_n, \mu_n) = \frac{1}{\rho_n} \cdot \frac{(nx)^{(k/\rho_n) + \mu_n - 1}}{\Gamma(\mu_n + k/\rho_n)} e^{-nx},$$

считая, что если $\mu_n + k/\rho_n \in \{0, -1, -2, \dots\}$, то $u_{n,k}(x, \rho_n, \mu_n) = 0$. Для f , определенной на $[0, \infty)$, положим

$$H_n(R, f, x)_{\rho_n, \mu_n} = \sum_{k \geq \lambda_n} r_{n,k} f\left(\frac{1}{n} \left(\frac{k}{\rho_n} + \mu_n - 1\right)\right) u_{n,k}(x, \rho_n, \mu_n),$$

где

$$\lambda_n = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_n \geq 1, \\ (1 - \mu_n)\rho_n, & \text{если } \mu_n < 1. \end{cases}$$

Для функции f , определенной на $[a, b]$, $b > a > 0$, и для таких n , что $na - \mu_n + 1 \geq 0$, положим

$$Z_n(R, f, x)_{\rho_n, \mu_n} = \sum_{\sigma_n \leq k \leq \tau_n} r_{n,k} f\left(\frac{1}{n} \left(\frac{k}{\rho_n} + \mu_n - 1\right)\right) u_{n,k}(x, \rho_n, \mu_n),$$

где $\sigma_n = \rho_n(na - \mu_n + 1)$, $\tau_n = \rho_n(nb - \mu_n + 1)$.

Операторы H_n и Z_n являются линейными, положительными операторами. Если для всех n и k $\rho_n = \mu_n = r_{n,k} = 1$, то Z_n — операторы Саса-Миракьяна, последовательность которых, как хорошо известно [1], слабо сходится к тождественному оператору в $C[a, b]$. В [2] изучена сходимости операторов H_n в весовом пространстве $C(v)$ с $v = (1+x)^{-m}$, $m > 0$. Следующие теоремы дают условия на параметры $\rho_n, \mu_n, r_{n,k}$, обеспечивающие сходимости последовательностей $\{H_n(R, f, x)_{\rho_n, \mu_n}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Z_n(R, f, x)_{\rho_n, \mu_n}\}_{n=1}^{\infty}$ к $f(x)$ для $x \geq \varepsilon > 0$, $f \in C(v)$ или $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, $f \in C[a, b]$ соответственно. Отметим, что в общем случае сходимости в нуле и соответственно при $x = a$, $x = b$ нет.

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательности $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ таковы, что

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^2 n = \infty$ и $\rho_n \leq \ln(n\varepsilon)$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{n} = 0$ и $\mu_n \leq \frac{n\varepsilon}{\ln(n\varepsilon)}$.

Пусть матрица R такова, что существует последовательность $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\nu_n \in \mathbb{N}$, такая, что

- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho_n^2 n}{\nu_n^2} = \infty$;
- 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 1$, где $M_n = \sup_k \left(\frac{1}{\nu_n} \sum_{i=0}^{\nu_n-1} r_{n,k+i} \right)$;
- 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = 1$, где $m_n = \inf_k \left(\frac{1}{\nu_n} \sum_{i=0}^{\nu_n-1} r_{n,k+i} \right)$.

Пусть $f \in C(v)$, $v \in V_{a,b}$. Если $h_n = \max\{|M_n - 1|, |m_n - 1|, \nu_n/(\rho_n \sqrt{n}), 1/\sqrt{n}\}$, то найдется номер n_0 такой, что для всех $n \geq n_0$, для всех $x \geq \varepsilon$ будет выполняться неравенство

$$v(x) |H_n(R, f, x)_{\rho_n, \mu_n} - f(x)| \leq (c_1 + c_2 \sqrt{x}) \omega_v(f; h_n) + c_3 \|f\|_v h_n,$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые положительные константы, зависящие только от ε, a, b .

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательности $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ таковы, что выполнены условия 1) и 2) теоремы 1. Пусть матрица R такова, что существует последовательность $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\nu_n \in \mathbb{N}$, такая, что выполнено 3) и

$$4^*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_n^* = 1, \text{ где } M_n^* = \max_{\sigma_n \leq k \leq \tau_n - \nu_n + 1} \left(\frac{1}{\nu_n} \sum_{i=0}^{\nu_n-1} r_{n,k+i} \right);$$

$$5^*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_n^* = 1, \text{ где } m_n^* = \min_{\sigma_n \leq k \leq \tau_n - \nu_n + 1} \left(\frac{1}{\nu_n} \sum_{i=0}^{\nu_n-1} r_{n,k+i} \right).$$

Пусть $f \in C[a, b]$, $b > a > 0$. Если $h_n = \max\{|M_n^* - 1|, |m_n^* - 1|, \nu_n/(\rho_n \sqrt{n}), 1/\sqrt{n}\}$, то найдется номер n_0 такой, что для всех $n \geq n_0$, для всех $x \in [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ ($\varepsilon < (b - a)/2$) будет выполняться неравенство

$$|Z_n(R, f, x)_{\rho_n, \mu_n} - f(x)| \leq c_1 \omega(f; h_n) + c_2 \|f\| h_n,$$

где c_1, c_2 — некоторые положительные константы, зависящие только от ε, a, b .

Саратовский государственный университет

Поступило
12.03.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коровкин П. П. Линейные операторы и теория приближений. М.: Наука, 1959. 2. Becker M. // Indiana Univ. Math. J. 1978. V. 1. P. 127–138.