Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Дубровский, Регуляризованный след степе-

ни оператора Лапласа с потенциалом на квадрате,
Матем. заметки, 1996, том 60, выпуск 1, 136–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1812>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 12:36:03

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С ПОТЕНЦИАЛОМ НА КВАДРАТЕ

В. В. Дубровский

В работе рассматривается степень оператора Лапласа, где лапласиан задан для конкретности краевым условием Дирихле на квадрате $\Pi = \{0 \leq x, y \leq \pi\}$, $T_\alpha = (-\Delta_D)^\alpha$, $\alpha > 0$, P – оператор умножения на дважды непрерывно дифференцируемую функцию $p(x, y)$, определенную на квадрате Π . $v_{m,n} = \frac{2}{\pi} \sin(mx) \sin(ny)$ – собственные ортонормированные функции оператора T_α , отвечающие собственным числам $\lambda_{m,n}^\alpha = (m^2 + n^2)^\alpha$, $m, n = \overline{1, \infty}$, оператора T_α . $\mu_{m,n}^\alpha$ – собственные числа оператора $T_\alpha + P$, взятые с учетом алгебраической кратности так, что $|\mu_{m,n}^\alpha - \lambda_{m,n}^\alpha| \leq \|P\|_\infty$. Будем нумеровать также собственные числа $\lambda_{m,n}^\alpha$ и другие объекты одним индексом в порядке возрастания величин $\lambda_{m,n}^\alpha$ с учетом кратности. Из работы [1] известна асимптотика так занумерованных чисел, а именно

$$\lambda_k^\alpha = C_1 k^\alpha + O(k^{\alpha - 27/40}), \quad C_1 > 0.$$

Будем следовать доказательству в работе [2]. При $|k - L| \geq C_2 k^{13/40+\delta}$, где $C_2 > 0$, $0 < \delta \leq 27/40$, имеем

$$|\lambda_k - \lambda_L| \geq \text{const} \max\{k^{\alpha-27/40+\delta}, L^{\alpha-27/40+\delta}\} > 0.$$

Заметим сразу, что по формуле Лагранжа о среднем при $\lambda_k \neq \lambda_L$

$$|\lambda_k - \lambda_L| \geq \text{const} \max\{k^{\alpha-1}, L^{\alpha-1}\} > 0.$$

Оценим ядерную норму резольвенты $|T_\alpha - \lambda E|^{-1}$ оператора T_α при $\alpha > 1$ на вертикальных прямых $\Gamma_k = \{\lambda = (\lambda_k + \lambda_{k+1}) | \alpha^{-1} + i\rho\}$:

$$\|(T_\alpha - \lambda E)^{-1}\|_1 \leq \text{const} \max\left(\frac{k^{1-(13/40+\delta)\alpha\epsilon}}{(|\rho| + 3k^{\alpha-27/40+\delta})^{1-\epsilon}}, \frac{k^{13/40+\delta-\epsilon(\alpha-1)}}{(|\rho| + 3k^{\alpha-1})^{1-\epsilon}}\right),$$

где $\rho = \text{Im}(\lambda)$ и $C_3 > 0$, $0 < \epsilon < 1$. Это доказывается, как и в [2], разложением бесконечной суммы

$$\|(T - \lambda E)^{-1}\| \equiv \sum \frac{1}{|\lambda - \lambda_n^\alpha|}$$

при слагаемых, где индексы меняются так:

$$n = 1, k - C_2 k^{13/40+\delta} - 1; k - C_2 k^{13/40+\delta}, k + C_2 k^{13/40+\delta}, \\ k + C_2 k^{13/40+\delta} + 1, \infty.$$

Но при $\lambda \in \Gamma_k$ очевидно, что

$$\|(T_\alpha - \lambda E)^{-1}\| \leq \frac{O(1)}{(|\rho| + C_3 k^{\alpha-1})^{1-\epsilon_k \epsilon(\alpha-1)}}.$$

Везде $0 < \epsilon < 1$. Тогда для L -ой поправки теории возмущений получим

$$|\alpha_L(k)| = \left| (-1)^L \frac{1}{2\pi i L} \text{Sp} \int_{\Gamma_k} ((T_\alpha - \lambda E)^{-1} P)^L d\lambda \right| \\ \leq O(1) \int \|(T_\alpha - \lambda E)^{-1}\|_1 \|(T_\alpha - \lambda E)^{-1}\| d\rho \rightarrow 0$$

при $\lambda \in \Gamma_k$ и $\alpha > 1 + 13/40$, $L \geq 2$. Тогда в операторном тождестве

$$\sum_{t=1}^k (\mu_t^\alpha - \lambda_L^\alpha - (Pv_t, v_t)) = \alpha_2(k) + \alpha_3(k) + \dots$$

правая часть стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^k [(\mu_k^\alpha - \lambda_k^\alpha) - (Pv_k, v_k)] = 0.$$

Имеем с помощью работы [3] утверждение.

ТЕОРЕМА 1. При $\alpha > 53/40$ верно равенство

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^{\infty} & \left(\mu_{m,n}^{\alpha} - \lambda_{m,n}^{\alpha} - \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} P(x,y) (1 - \cos(2nx) - \cos(2ny)) dx dy \right) \\ &= \frac{P(0,0) + P(0,\pi) + P(\pi,0) + P(\pi,\pi)}{16} + \frac{1}{8\pi} \int_0^{\pi} (P(\pi,y) + P(0,y)) dy \\ & \quad + \frac{1}{8\pi} \int_0^{\pi} (P(x,0) + P(x,\pi)) dy - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} P(x,y) dx dy, \end{aligned}$$

где суммирование в левой части последней формулы ведется при $m^2 + n^2 \leq k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если воспользоваться уточнением остатка в примененной выше формуле Хуа [1], то можно еще понизить степень оператора Лапласа, для которой справедлива формула Гельфанда–Левитана из теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно воспользоваться теоремой И. М. Виноградова [1] для числа целых точек в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq N$ и привести формулу Гельфанда–Левитана для степени оператора Лапласа с потенциалом, где лапласиан задан на трехмерном кубе краевыми условиями Дирихле или Неймана или вообще смешанными граничными условиями.

Барановичи

Поступило

14.04.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. М.: Наука, 1976.
2. Дубровский В. В. // УМН. 1991. Т. 46. № 3.
3. Дубровский В. В. // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1978. № 4. С. 227–231.