Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Злотник, О. И. Киреева, Проекционно-сеточные методы для задачи о динамических колебаниях неоднородного стержня в случае негладких данных, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 1, 138–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1813>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:28:58

ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ О ДИНАМИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ В СЛУЧАЕ НЕГЛАДКИХ ДАННЫХ

А. А. Злотник, О. И. Киреева

Сеточные и проекционно-сеточные методы решения уравнения статических колебаний неоднородного стержня с разрывными коэффициентами и (или) негладкой правой частью изучались во многих работах, см. [1]–[7] и др. Недавно авторами получены [8], [9] новые результаты в этой области.

© А. А. Злотник, О. И. Киреева 1996

Гораздо слабее исследованы методы решения соответствующих динамических задач. В настоящей работе на основе результатов из [10] и [8], [9] изучен трехслойный проекционно-сеточный метод для динамического уравнения колебаний с разрывными коэффициентами, использующий специальные пространства обобщенных кубических сплайнов дефекта 1 и 2. Даны теоремы об оценках погрешности в послойных нормах $L_2(\Omega)$, $W_2^2(\Omega)$ и $C(\overline{\Omega})$, $C^1(\overline{\Omega})$ порядка $O((\tau^2 + h_{\max}^4)^\lambda)$ с любым $\lambda \in (0, 1]$. Значение λ определяется порядком гладкости данных (в обобщенном смысле).

1. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\rho D_t^2 u + Lu = \rho f \quad \text{в } Q = (0, T) \times \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0, \quad Du|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = u^{(0)}(x), \quad D_t u|_{t=0} = u^{(1)}(x) \quad \text{при } x \in \Omega. \quad (3)$$

Здесь $u = u(x, t)$, $f = f(x, t)$ и $Lu = D^2(a_2 D^2 u) - D(a_1 Du) + a_0 u$, $D = \partial/\partial x$, $D_t = \partial/\partial t$, $\Omega = (0, X)$, $\partial\Omega = \{0, X\}$. Предполагается, что $N^{-1} \leq \rho(x)$ и $N^{-1} \leq a_2(x)$ при $x \in \Omega$, а также

$$\|\rho\|_{L_\infty(\Omega)} + \|a_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \|a_1\|_{L_2(\Omega)} + \|a_0\|_{L_2(\Omega)} \leq N$$

и

$$N^{-1} \|w\|_{\dot{W}_2^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{L}_\Omega(w, w) \equiv \int_\Omega [a_2(D^2 w)^2 + a_1(Dw)^2 + a_0 w^2] dx$$

для любой функции $w \in \dot{W}_2^2(\Omega) = \{w \in W_2^2(\Omega) \mid w|_{\partial\Omega} = Dw|_{\partial\Omega} = 0\}$. Здесь $N > 1$ – параметр. Существование и единственность решения задачи (1)–(3) при фигурирующих ниже условиях на $u^{(0)}$, $u^{(1)}$ и f следует из [10, § 1, 9].

Ниже при формулировке оценок погрешности нам потребуются пространства $H^{(\lambda)}$ ($-1 \leq \lambda \leq 4$) и $F^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in [-1, 3]$). Пространства $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$ отличаются от $L_2(\Omega)$ и $\dot{W}_2^2(\Omega)$ выбором норм:

$$\|w\|_{H^{(0)}} = \|\sqrt{\rho}w\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|w\|_{H^{(1)}} = [\mathcal{L}_\Omega(w, w)]^{1/2}.$$

Далее $H^{(2+k)} = \{w \in H^{(k)} \mid \rho^{-1}Lw \in H^{(k)}\}$, $\|w\|_{H^{(2+k)}} = \|\rho^{-1}Lw\|_{H^{(k)}}$ при $k = 0, 1, 2$. Пространства $H^{(k+\theta)} = (H^{(k)}, H^{(k+1)})_{\theta, \infty}$ ($0 < \theta < 1$, $k = 0, 1, 2, 3$) определяются при помощи $K_{\theta, q}$ -метода вещественной интерполяции [11, гл. 3] с $q = \infty$. Пространства $F^{(\alpha_1, \alpha_2)}$ ($0 \leq \alpha_1 \leq 3$, $\alpha_2 = 0, 1, 2, 3$) имеют норму $\|f\|_{F^{(\alpha_1, \alpha_2)}} = \|D_t^{\alpha_2} f\|_{L_1(0, T; H^{(\alpha_1)})} + \sum_{0 \leq \ell < \alpha_2} \|D_t^\ell f|_{t=0}\|_{H^{(\alpha_1 + \alpha_2 - \ell - 1)}}$; предполагается, что $D_t^\ell f \in L_1(0, T; H^{(\alpha_1)})$ при $0 \leq \ell \leq \alpha_2$. По поводу остальных значений λ и α_1, α_2 см. [10, § 1, 4, 9].

2. Введем на $\overline{\Omega}$ сетку $\overline{\omega}^h$ с узлами $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = X$ и шагами $h_i = x_i - x_{i-1}$. Положим $h_{\max} = \max_i h_i$, $h_{\min} = \min_i h_i$. Пусть $\varkappa \in L_\infty(\Omega)$ и $N^{-1} \leq \varkappa(x)$ на Ω . Введем пространства обобщенных кубических сплайнов дефекта 2 и 1 (см. [2], [5], [8], [9]):

$$\dot{S}_2[\varkappa] = \{\varphi \in \dot{W}_2^2(\Omega) \mid \varkappa D^2 \varphi \in \tilde{S}\}, \quad \dot{S}_1[\varkappa] = \{\varphi \in \dot{S}_2[\varkappa] \mid \varkappa D^2 \varphi \in C(\overline{\Omega})\},$$

где $\tilde{S}$ – пространство функций, заданных на Ω и линейных на интервалах (x_{i-1}, x_i) , $i = \overline{1, n}$. Если $\varkappa(x) \equiv \text{const}$ на Ω , то получаются классические пространства кубических сплайнов на $\overline{\Omega}$ (см., например, [12]). Для $w \in C^1(\overline{\Omega})$ с $w|_{\partial\Omega} = Dw|_{\partial\Omega} = 0$ однозначно определен [8], [9] интерполяционный сплайн $s_d^{(\varkappa)} w \in \mathring{S}_d[\varkappa]$ такой, что $(w - s_d^{(\varkappa)} w)(x_i) = 0$, $i = \overline{0, n}$ при $d = 1, 2$ и дополнительно $(D(w - s_d^{(\varkappa)} w))(x_i) = 0$, $i = \overline{1, n-1}$ при $d = 2$. Ниже $d = 1, 2$.

Фиксируем сетку $\overline{\omega}^{(0)}$ с узлами $0 = x_0^{(0)} < x_1^{(0)} < \dots < x_{n_0}^{(0)} = X$ и положим $\Omega_j^{(0)} = (x_{j-1}^{(0)}, x_j^{(0)})$. Пусть $\overline{\omega}^h \supset \overline{\omega}^{(0)}$. Дополнительно к условиям из п. 1 потребуем, что существует $Da_1 \in L_2(\Omega_j^{(0)})$ ($j = \overline{1, n_0}$) и

$$\left[\sum_{j=1}^{n_0} \|Da_1\|_{L_2(\Omega_j^{(0)})}^2 \right]^{1/2} \leq N$$

(таким образом, точки $\overline{\omega}^{(0)} \setminus \partial\Omega$ могут быть точками разрыва a_1).

Рассмотрим сразу несколько способов выбора $\varkappa$ в зависимости от свойств коэффициента a_2 . В общем случае полагаем $\varkappa = a_2$. Если существует $D^2 a_2 \in L_\infty(\Omega_j^{(0)})$ ($j = \overline{1, n_0}$) и

$$\left[\sum_{j=1}^{n_0} \|Da_2\|_{L_4(\Omega_j^{(0)})}^4 \right]^{1/4} \leq N,$$

$\|D^2 a_2\|_{L_\infty(\Omega_j^{(0)})} \leq N$ ($j = \overline{1, n_0}$), то можно положить $\varkappa = \widehat{a}_2$ или $(\widehat{a}_2^{-1})^{-1}$ (это, забегая вперед, упрощает вид коэффициентов системы сеточных уравнений). Здесь, например, $\widehat{a}_2 \in \tilde{S}$, причем $(a_2 - \widehat{a}_2)(x_{i-1}^+) = (a_2 - \widehat{a}_2)(x_i^-) = 0$ ($i = \overline{1, n}$). Если же дополнительно к указанному выше $a_2 \in C(\overline{\Omega})$, то можно взять $\varkappa(x) \equiv 1$. Во всех перечисленных случаях верна оценка

$$\|w - s_d^{(\varkappa)} w\|_{\mathring{W}_2^2(\Omega)} \leq K_0(N) h_{\max}^2 \|Lw\|_{L_2(\Omega)}$$

для любой функции $w \in \mathring{W}_2^2(\Omega)$ такой, что $Lw \in L_2(\Omega)$. Это следует из [8], [9] и существенно для справедливости дальнейшего (ср. с [10, § 3 и § 5]). Здесь и ниже величины $K_i(N)$ ($i = 0, 1, \dots$), $K(N)$ не зависят от коэффициентов уравнения (1) и от T .

3. Введем на $[0, T]$ сетку с шагом $\tau = T/M$ и обозначим $\eta_m = \eta|_{t=m\tau}$ ($m = \overline{0, M}$). В соответствии с [10, § 2] рассмотрим трехслойный с весом проекционно-сеточный метод решения задачи (1)–(3). Пусть приближенное решение $v(x, t)$ таково, что $v_m = v|_{t=m\tau} \in \mathring{S}_d[\varkappa]$ ($m = \overline{0, M}$), а также оно линейно по $t \in [(m-1)\tau, m\tau]$ ($m = \overline{1, M}$) для всех $x \in \overline{\Omega}$. Фиксируем какой-либо финитный базис в $\mathring{S}_d[\varkappa]$ и обозначим через $v_{h,m}$ вектор коэффициентов разложения v_m по этому базису. Эти векторы должны удовлетворять уравнениям

$$(B_h + \sigma\tau^2 L_h)v_{h\bar{t}t,m} + L_h v_{h,m} = f_m^{h,\tau}, \quad m = \overline{1, M-1},$$

$$(B_h + \sigma\tau^2 L_h)v_{ht,0} + \frac{\tau}{2} L_h v_{h,0} = u^{(1),h} + \frac{\tau}{2} f_0^{h,\tau};$$

дополнительно $v_0 = v^{(0)}$ либо $s_d^{(\varkappa)} u^{(0)}$, где $v^{(0)} \in \overset{\circ}{S}_d[\varkappa]$ и

$$(B_h + \sigma^{(0)} \tau^2 L_h) v_h^{(0)} = u^{(0),h}.$$

Здесь B_h и L_h – так называемые матрицы масс и жесткости, а $f^{h,\tau}$, $u^{(1),h}$, $u^{(0),h}$ – “усреднения” функций ρf , $\rho u^{(1)}$, $\rho u^{(0)}$ соответственно (подробнее см. [10]). Кроме того, σ и $\sigma^{(0)}$ – параметры (которые могут зависеть от $\bar{\omega}^h$ и τ). Предположим, что $\sigma \geq \sigma_0 = 1/4 - (1 - \varepsilon_0^2)/(\tau^2 \alpha_h^2)$ и $\sigma^{(0)} \geq \sigma - 1/4$, где $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ фиксировано, а

$$\alpha_h = \max_{\varphi \in \overset{\circ}{S}_d[\varkappa]} \frac{\|\varphi\|_{H^1}}{\|\varphi\|_{H^0}}.$$

Тогда указанные уравнения однозначно разрешимы и метод устойчив [10, § 2]. Предположим дополнительно, что $(|\sigma| + |\sigma^{(0)}|) \tau^2 \leq N(h_{\max}^4 + \tau^2)$.

Ниже в теореме 4 используется следующий результат.

ЛЕММА. При $d = 1, 2$ верна оценка $\alpha_h \leq K(N) h_{\min}^{-2}$.

4. Дадим оценки погрешности в послойных нормах $L_2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$.

Положим $(I_t y)(t) = \int_0^t y(t') dt'$ для $y \in L_1(0, T)$. Пусть $s_t y$ – кусочно-линейный интерполант функции $y \in C[0, T]$ по узлам $m\tau$, $m = \overline{0, M}$. Положим $T_1 = \max\{T, 1\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $v_0 = v^{(0)}$. Верна оценка погрешности (при всех $0 \leq \alpha \leq 3$)

$$\begin{aligned} & \max_{m=0, M} \|(u - v)_m\|_{L_2(\Omega)} + \max_{0 \leq t \leq T} \|s_d^{(\varkappa)} I_t u - s_t I_t v\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)} \leq K_1(N) \\ & \times [T_1(\tau^2 + h_{\max}^4)]^{\alpha/3} \left(\|u^{(0)}\|_{H(\alpha)} + \|u^{(1)}\|_{H(\alpha-1)} + T_1^{\gamma_1} \|f\|_{F(\alpha_1, \alpha_2)} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Числа α_1, α_2 таковы, что $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha - 1$ и выполнено одно из условий:

- а) $\alpha_1 = 0, -1 \leq \alpha_2 \leq 2$;
- б) $0 < \alpha_1 \leq 1, 0 < \alpha_2 \leq 1$;
- в) $-1 \leq \alpha_1 \leq 2, \alpha_2 = 0$.

Кроме того, $\gamma_1 = \max\{\alpha_2 - \alpha/3, 0\}$.

Положим $\sigma_1 = (1 + \varepsilon_0^2)/4 - 1/(\tau^2 \alpha_h^2)$, где по-прежнему $\varepsilon_0 \in (0, 1]$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $v_0 = s_d^{(\varkappa)} u^{(0)}$ и $\sigma \geq \sigma_1$. Справедлива оценка погрешности (при всех $1 \leq \alpha \leq 4$)

$$\begin{aligned} & \max_{m=1, M} \left(\|(u - v)_{\bar{t}, m}\|_{L_2(\Omega)} + \|(s_d^{(\varkappa)} u - v)_m\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)} \right) \leq K_2(N) \\ & \times [T_1(\tau^2 + h_{\max}^4)]^{(\alpha-1)/3} \left(\|u^{(0)}\|_{H(\alpha)} + \|u^{(1)}\|_{H(\alpha-1)} + T_1^{\gamma_2} \|f\|_{F(\alpha_1, \alpha_2)} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Числа α_1, α_2 таковы, что $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha - 1$ и выполнено одно из условий:

- а) $-1 \leq \alpha_1 < 0, \alpha_2 = 1$;
- б) $\alpha_1 = 0, 0 \leq \alpha_2 \leq 3$;
- в) $0 < \alpha_1 \leq 1, 0 < \alpha_2 \leq 2$;
- г) $1 < \alpha_1 \leq 2, 0 < \alpha_2 \leq 1$;
- д) $0 < \alpha_1 \leq 3, \alpha_2 = 0$.

Кроме того, $\gamma_2 = \max\{\alpha_2 - 1 - (\alpha - 1)/3, 0\}$.

Теоремы 1 и 2 можно дополнить так же, как и в [10, теорема 4.3] (см. еще [10, § 5.1]). Здесь мы ограничимся следующим.

УТВЕРЖДЕНИЕ. 1. При $0 \leq \alpha \leq 3/2$ в оценке (4) можно опустить оператор $s_d^{(\varkappa)}$ (и тогда положить $\gamma_1 = 0$).

2. Пусть $v_0 = s_d^{(\varkappa)} u^{(0)}$. Тогда оценка (4) сохраняет силу при $1 \leq \alpha \leq 3$ и, при желании, в ней можно заменить $u - v$ на $s_d^{(\varkappa)} u - v$.

3. При $1 \leq \alpha \leq 5/2$ в оценке (5) можно опустить оператор $s_d^{(\varkappa)}$ (и тогда положить $\gamma_2 = 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В j -й из оценок (4), (5) можно положить $\gamma_j = 0$, если отбросить второе слагаемое в левой части оценки либо при $\alpha_2 > j - 1$ в правую часть добавить слагаемое $K_j(N)h_{\max}^4 \|f\|_{F(0, j-1)}$ ($j = 1, 2$).

5. Укажем оценки погрешности в послойных нормах $C^k(\overline{\Omega})$, $k = 0, 1$.

Введем интерполяционные пространства $H^{(k+\theta);1} = (H^{(k)}, H^{(k+1)})_{\theta,1}$ и $F^{(k+\theta,\ell);1} = (F^{(k,\ell)}, F^{(k+1,\ell)})_{\theta,1}$, $F^{(k,\ell+\theta);1} = (F^{(k,\ell)}, F^{(k,\ell+1)})_{\theta,1}$ ($k \geq 0$, $\ell \geq 0$ — целые) при помощи $K_{\theta,q}$ -метода вещественной интерполяции с $0 < \theta < 1$, $q = 1$ [11, гл. 3]. Положим $\lambda_0 = 1/4$, $\lambda_1 = 3/4$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $v_0 = s_d^{(\varkappa)} u^{(0)}$, $\sigma \geq \sigma_1$ и $k = 0, 1$. Справедлива оценка погрешности

$$\max_{m=0, \overline{M}} \left\| (s_d^{(\varkappa)} u - v)_m \right\|_{C^k(\overline{\Omega})} \leq K_3(N) T_1 (\tau^2 + h_{\max}^4) \times \left(\|u^{(0)}\|_{H^{(3+\lambda_j);1}} + \|u^{(1)}\|_{H^{(2+\lambda_j);1}} + T_1^{\gamma_3} \|f\|_{F^{(\alpha_1, \alpha_2);1}} \right). \quad (6)$$

Числа α_1, α_2 таковы, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 2 + \lambda_k$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ и одно из α_1, α_2 — целое. Кроме того, $\gamma_3 = \lambda_k$ при $\alpha_1 = 0$ либо $\gamma_3 = 0$ при $\alpha_1 > 0$.

Вывод оценки (6) опирается на оценки (4), (5) и мультипликативное неравенство

$$\|w\|_{C^k(\overline{\Omega})} \leq c \|w\|_{L_2(\Omega)}^{1-\lambda_k} \|w\|_{\dot{W}_2^2(\Omega)}^{\lambda_k}, \quad k = 0, 1.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\sigma \geq \sigma_1$ и $k = 0, 1$.

1. Пусть $v_0 = v^{(0)}$, $\sigma^{(0)} \geq 0$, а $h_{\max} \leq N h_{\min}$. Верна оценка погрешности (при всех $\lambda_k < \alpha \leq 1$)

$$\max_{m=0, \overline{M}} \left\| (u - v)_m \right\|_{C^k(\overline{\Omega})} \leq c_{\alpha_1, \alpha_2} K_4(N) [T_1 (\tau^2 + h_{\max}^4)]^{(\alpha - \lambda_k)/3} \times \left(\|u^{(0)}\|_{H^{(\alpha)}} + \|u^{(1)}\|_{H^{(\alpha-1)}} + \|f\|_{F^{(\alpha_1, \alpha_2)}} \right). \quad (7)$$

Здесь $\alpha_1 = \alpha - 1$, $\alpha_2 = 0$ либо $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha - 1$.

2. Пусть $v_0 = s_d^{(\varkappa)} u^{(0)}$. Верна оценка погрешности (при всех $1 \leq \alpha < 3 + \lambda_k$)

$$\max_{m=0, \overline{M}} \left\| (s_d^{(\varkappa)} u - v)_m \right\|_{C^k(\overline{\Omega})} \leq c_{\alpha_1, \alpha_2} K_5(N) [T_1 (\tau^2 + h_{\max}^4)]^{(\alpha - \lambda_k)/3} \times \left(\|u^{(0)}\|_{H^{(\alpha)}} + \|u^{(1)}\|_{H^{(\alpha-1)}} + T_1^{\gamma_4} \|f\|_{F^{(\alpha_1, \alpha_2)}} \right). \quad (8)$$

Числа α_1, α_2 таковы, что $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha - 1$ и выполнено одно из условий:

- а) $0 \leq \alpha_1 < 2 + \lambda_k, \alpha_2 = 0$;
- б) $\alpha_1 = 0, 0 \leq \alpha_2 < 2 + \lambda_k$;
- в) $0 < \alpha_1 < \lambda_k, 0 < \alpha_2 \leq 2$;
- г) $\lambda_k \leq \alpha_1 < 1 + \lambda_k, 0 < \alpha_2 \leq 1$;
- д) $\alpha_1 = 1, 1 < \alpha_2 < 1 + \lambda_k$;
- е) $\alpha_1 = 2, 0 < \alpha_2 < \lambda_k$.

Кроме того, $\gamma_4 = \gamma_4(\alpha_1, \alpha_2, k) \leq \lambda_k$ (явный вид γ_4 опускаем).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В оценке (8) при некоторых дополнительных условиях можно опустить оператор $s_d^{(\varkappa)}$ (заведомо должно быть $\alpha \leq 3$ при $k = 1$). В частности, это можно сделать при $\alpha \leq \lambda_k + \frac{3}{4}(4 - k - 1/2)$, когда $(\alpha_1, \alpha_2) \notin (0, 1) \times (0, 1)$, либо при $\alpha \leq 5/2$, когда $(\alpha_1, \alpha_2) \in (0, 1) \times (0, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в теоремах 2–4 опустить условие $\sigma \geq \sigma_1$, то как и в [10], в оценках (5), (6), (8) надо заменить $(s_d^{(\varkappa)} - v)_m$ на $(s_d^{(\varkappa)} - v)_m^{(1/2)}$, а в оценке (7) надо заменить $(u - v)_m$ на $(u - v)_m^{(1/2)}$. Здесь $y_m^{(1/2)} = (y_{m-1} + y_m)/2, m = \overline{1, M}$, а $y_0^{(1/2)} = y_0$.

Московский энергетический институт

Поступило
28.12.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А., Хао Шоу. // Вычисл. методы и программирование. Вып. 6. М.: Изд-во МГУ, 1967. С. 3–16.
2. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М.: Мир, 1974.
3. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1975.
4. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
5. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
6. Корнеев В. Г. // ЖВМиМФ. 1982. Т. 22. № 3. С. 646–654.
7. Туретаев И. Д. // Деп. ВИНТИ. № 1025–81.
8. Злотник А. А., Киреева О. И. // Изв. вузов. Матем. 1995. № 4. С. 49–61.
9. Злотник А. А., Киреева О. И. // Вестн. МЭИ. 1995. № 6. С. 59–71.
10. Злотник А. А. // Вычисл. процессы и системы. Вып. 8. М.: Наука, 1991. С. 116–167.
11. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
12. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошников В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.