Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Пустовойтов, О характеристике простран-
ства H_1^Ω , *Матем. заметки*, 1996, том 60, вы-
пуск 1, 144–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1814>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:02:44

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВА H_1^Ω

Н. Н. Пустовойтов

В предлагаемой работе продолжают исследования пространств периодических функций многих действительных переменных, модуль непрерывности порядка l которых

$$\Omega^l((t_1, \dots, t_d), f)_q = \sup_{|h_j| \leq t_j} \|\Delta_{h_1}^l \cdots \Delta_{h_d}^l f(x_1, \dots, x_d)\|_q$$

удовлетворяет неравенству

$$\Omega^l((t_1, \dots, t_d), f)_q \ll \Omega(t_1, \dots, t_d),$$

где $\Omega(t)$ – данная функция типа модуля непрерывности порядка l .

Вопросы характеристики классов H_q^Ω изучались в работах [1], [2]. В [1] формулируется и доказывается теорема 1 о представлении классов H_q^Ω , $1 \leq q \leq \infty$, утверждающая, что условия

$$\|\delta_s(f, x)\|_q \ll \Omega(2^{-s}), \quad 1 < q < \infty,$$

$$\|A_s(f, x)\|_q \ll \Omega(2^{-s}), \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

равносильны принадлежности функции $f(x)$ пространству H_q^Ω . Здесь $\delta_s(f, x)$ – двоичная пачка ряда Фурье функции $f(x)$, $A_s(f, x)$ – свертка $\delta_s(f, x)$ с

$$A_s(x) = \prod_{s=1}^d (V_{2^{s_j-1}}(x_j) - V_{2^{s_j-2}}(x_j)),$$

где $V_N(x) = V_N^{2N}(x)$ – одномерное ядро Валле–Пуссена, $s = (s_1, \dots, s_d)$, $2^{-s} = (2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$. Отметим, что указанные выше условия при $1 < q < \infty$ эквивалентны.

Вышеуказанная теорема из [1] доказывается при дополнительных условиях на функцию $\Omega(t)$, а именно, предполагается, что $\Omega(t)$ удовлетворяет условиям (S) и (S_l).

Условие (S) для одномерной функции $\varphi(\tau)$ означает, что почти возрастает отношение $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ при некотором $0 < \alpha < 1$. Условие же (S_l) означает почти убывание функции $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$, $0 < \alpha < l$.

Напомним, что функция $\psi(\tau)$ почти убывает, если для $\tau_1 \leq \tau_2$ верно неравенство $\psi(\tau_2) \leq C\psi(\tau_1)$ с константой C , не зависящей от τ . Аналогично определяется почти возрастание.

Используемое ниже условие (B) означает следующее. Функция $\omega(\tau)$ удовлетворяет условию (B), если

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \omega\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(\omega\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

В работе [3] доказана равносильность условий (S) и (B).

Далее, в теореме 3 из [1] доказывается, что если $\Omega(t)$ не удовлетворяет условию (S_l) при всех $1 \leq q \leq \infty$ либо не удовлетворяет условию (S) при $1 < q \leq \infty$, то существует функция $f(x) \in L_q$ такая, что

$$\|\delta_s(f, x)\|_q \ll \Omega(2^{-s}) \quad \text{либо} \quad \|A_s(f, x)\|_q \ll \Omega(2^{-s}),$$

однако, $f(x) \notin H_q^\Omega$. Там же отмечается, что необходимость условия (S) при $q = 1$ не доказана.

В настоящей работе изучается необходимость условия (S) при $q = 1$. Автору не удалось решить эту проблему в общем виде. На функцию $\Omega(t)$ налагаются дополнительные условия, при которых строится функция $f(x) \notin H_1^\Omega$ такая, что $\|A_s(f, x)\|_q \ll \Omega(2^{-s})$.

Из доказательства теоремы 3 из [1] видно, что основная трудность заключается в доказательстве необходимости условия для одномерных функций. Этот случай мы и рассмотрим.

Итак, пусть $\omega(\tau)$ – одномерная функция типа модуля непрерывности порядка l . Предположим, что

$$\omega(\tau) = \frac{1}{\varphi(1/\tau)}, \quad (1)$$

где функция $\varphi(\tau)$ при достаточно больших τ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\varphi(\tau) \uparrow +\infty$ при $\tau \uparrow +\infty$;
- 2) $\varphi''(\tau) < 0$;
- 3) $\varphi(\tau)/\tau^\alpha \downarrow 0$ при $\tau \uparrow +\infty$ для любого $\alpha > 0$.

Из условия 3) следует, что для любого $\alpha > 0$ $\omega(\tau)/\tau^\alpha \uparrow +\infty$ при $\tau \downarrow 0$, и поэтому $\omega(\tau)$ не удовлетворяет условию (S) .

Из того, что $\omega(\tau)/\tau \uparrow +\infty$ при $\tau \downarrow 0$, следует $\omega(2\tau) \leq 2\omega(\tau)$, т.е. $\omega(\tau)$ является функцией типа модуля непрерывности первого порядка и поэтому эквивалентна выпуклому вверх модулю непрерывности. Так как пространства H_q^ω при эквивалентных функциях $\omega(\tau)$ равны, то будем считать функцию $\omega(\tau)$ выпуклой вверх. Функция $\omega(\tau) = 1/\varphi(1/\tau)$, где $\varphi(\tau)$ есть $\ln^k \tau$, либо k -кратный логарифм τ удовлетворяет перечисленным условиям.

Покажем, что если $\omega(\tau)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, то найдется функция $f(x)$, для которой

$$\|A_s(f, x)\|_1 \ll \omega(2^{-s}), \quad (2)$$

но $f(x) \notin H_1^\omega$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega(1/k) \sin kx$. Как известно, ряд справа сходится всюду. Докажем (2). Будем использовать результаты работы [4]. Для этого нужно оценить вторые разности коэффициентов $A_s(f, x)$. По определению

$$\begin{aligned} A_s(f, x) &= \sum_{k=2^{s-2}+1}^{2^s-1} \frac{k-2^{s-2}}{2^{s-2}} \omega\left(\frac{1}{k}\right) \sin kx \\ &\quad + \sum_{k=2^{s-1}+1}^{2^s-1} \frac{2^s-k}{2^{s-1}} \omega\left(\frac{1}{k}\right) \sin kx \\ &= \sum_{k=2^{s-2}+1}^{2^s-1} b_k \sin kx. \end{aligned}$$

Напомним, что $\Delta^2 b_k = b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2}$. Считаем $b_k = 0$ при $k \leq 2^{s-2}$, а также при $k \geq 2^s$. Очевидно,

$$\Delta^2 b_{2^{s-2}-1} > 0.$$

Покажем, что при $2^{s-2} \leq k \leq 2^{s-1} - 2$ будет $\Delta^2 b_k < 0$:

$$\begin{aligned} \Delta^2 b_k &= \frac{k - 2^{s-2}}{2^{s-2}} \omega\left(\frac{1}{k}\right) - 2 \frac{k+1 - 2^{s-2}}{2^{s-2}} \omega\left(\frac{1}{k+1}\right) + \frac{k+2 - 2^{s-2}}{2^{s-2}} \omega\left(\frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{k - 2^{s-2}}{2^{s-2}} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right) - \omega\left(\frac{1}{k+1}\right) \right) \\ &\quad - \frac{k+2 - 2^{s-2}}{2^{s-2}} \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right) - \omega\left(\frac{1}{k+2}\right) \right). \end{aligned}$$

В силу (1) и выпуклости $\omega(\tau)$

$$\omega\left(\frac{1}{k}\right) - \omega\left(\frac{1}{k+1}\right) \leq \omega'\left(\frac{1}{k+1}\right) \frac{1}{k(k+1)}.$$

Аналогично,

$$\omega\left(\frac{1}{k+1}\right) - \omega\left(\frac{1}{k+2}\right) \geq \omega'\left(\frac{1}{k+1}\right) \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Поэтому

$$\Delta^2 b_k \leq \omega'\left(\frac{1}{k+1}\right) \left(\frac{k - 2^{s-2}}{2^{s-2}} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{k+2 - 2^{s-2}}{2^{s-2}} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) < 0.$$

При $k = 2^{s-1} - 1$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta^2 b_k &= \frac{k - 2^{s-2}}{2^{s-2}} \omega\left(\frac{1}{k}\right) - 2 \frac{k+1 - 2^{s-2}}{2^{s-2}} \omega\left(\frac{1}{k+1}\right) + \frac{2^s - k - 2}{2^{s-1}} \omega\left(\frac{1}{k+2}\right) \\ &< \frac{k - 2^{s-2}}{2^{s-2}} \omega\left(\frac{1}{k}\right) - 2 \frac{k+1 - 2^{s-2}}{2^{s-2}} \omega\left(\frac{1}{k+1}\right) \\ &\quad + \frac{k+2 - 2^{s-2}}{2^{s-2}} \omega\left(\frac{1}{k+2}\right) < 0 \end{aligned}$$

в силу вышедоказанного неравенства для $2^{s-2} < k \leq 2^{s-1} - 2$.

Далее рассмотрим $\Delta^2 b_k$, где $2^{s-1} \leq k \leq 2^s - 3$. Из (1) получим

$$\begin{aligned} \Delta^2 b_k &= \frac{2^s - k}{2^{s-1}} \left(\omega\left(\frac{1}{k}\right) - \omega\left(\frac{1}{k+1}\right) \right) - \frac{2^s - k - 2}{2^{s-1}} \left(\omega\left(\frac{1}{k+1}\right) - \omega\left(\frac{1}{k+2}\right) \right) \\ &= \frac{2^s - k}{2^{s-1}} \frac{\varphi(k+1) - \varphi(k)}{\varphi(k)\varphi(k+1)} - \frac{2^s - k - 2}{2^{s-1}} \frac{\varphi(k+2) - \varphi(k+1)}{\varphi(k+1)\varphi(k+2)}. \end{aligned}$$

Так как $\varphi(\tau)$ выпукла вверх при больших τ , то при больших k

$$\varphi(k+1) - \varphi(k) \geq \varphi'(k+1), \quad \varphi(k+2) - \varphi(k+1) \leq \varphi'(k+1).$$

Поэтому

$$\Delta^2 b_k \geq \frac{\varphi'(k+1)}{\varphi(k+1)} \left(\frac{2^s - k}{2^{s-1}} \frac{1}{\varphi(k)} - \frac{2^s - k - 2}{2^{s-1}} \frac{1}{\varphi(k+2)} \right) > 0.$$

Легко видеть, что

$$\Delta^2 b_{2^s-2} > 0, \quad \Delta^2 b_{2^s-1} > 0.$$

Далее применим следствие 2 из теоремы 1 (см. работу [4]). Полагая в этом следствии $m = 2^{s-3}$ и $\xi_k = 0$ при $1 \leq k \leq m$, получим

$$\|A_s(f, x)\|_1 \ll \sum_{k=2^{s-1}+1}^{2^s-1} \frac{1}{k} \omega\left(\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=2^{s-3}}^{7 \cdot 2^{s-3}} k |\Delta^2 b_{2^s-3+k-1}|.$$

Первая сумма не превосходит $C_1(\ln 2)\omega(2^{-s})$. Рассмотрим вторую сумму

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=2^{s-3}}^{7 \cdot 2^{s-3}} k |\Delta^2 b_{2^s-3+k-1}| \\ &= 2^{s-3} \Delta^2 b_{2^s-2-1} - \sum_{k=2^{s-3}+1}^{3 \cdot 2^{s-3}} k \Delta^2 b_{2^s-3+k-1} + \sum_{k=3 \cdot 2^{s-3}+1}^{7 \cdot 2^{s-3}} k \Delta^2 b_{2^s-3+k-1} \\ &= \frac{1}{2} \omega\left(\frac{1}{2^{s-2}+1}\right) + 2(2^{s-3}+1) \frac{1}{2^{s-2}} \omega\left(\frac{1}{2^{s-2}+1}\right) \\ &\quad - (2^{s-3}+2) 2^{-s+2} \omega\left(\frac{1}{2^{s-2}+1}\right) - (3 \cdot 2^{s-3}-1) \omega(2^{-s+1}) \\ &\quad + 3 \cdot 2^{s-2} \omega(2^{-s+1}) - 3 \cdot 2^{s-3} \frac{2^{s-1}-1}{2^{s-1}} \omega\left(\frac{1}{2^{s-1}+1}\right) \\ &\quad + (3 \cdot 2^{s-3}+1) \omega(2^{-s+1}) - 2(3 \cdot 2^{s-3}+1) \frac{2^{s-1}-1}{2^{s-1}} \omega\left(\frac{1}{2^{s-1}+1}\right) \\ &\quad + (3 \cdot 2^{s-3}+2) \frac{2^{s-1}-1}{2^{s-1}} \omega\left(\frac{1}{2^{s-1}+1}\right) \\ &= \omega\left(\frac{1}{2^{s-2}+1}\right) + \omega(2^{-s+1}) + \frac{3}{2} \omega\left(\frac{1}{2^{s-1}+1}\right) \\ &\quad + 3 \cdot 2^{s-2} \left(\omega(2^{-s+1}) - \omega\left(\frac{1}{2^{s-1}+1}\right) \right). \end{aligned}$$

По условиям, наложенным на $\omega(\tau)$, отношение $\omega(\tau)/\tau$ монотонно возрастает к $+\infty$ при $\tau \downarrow 0$. Поэтому $2^{s-1} \omega(2^{-s+1}) \leq (2^{s-1}+1) \omega(1/(2^{s-1}+1))$. Следовательно,

$$\omega(2^{-s+1}) - \omega\left(\frac{1}{2^{s-1}+1}\right) \leq (2^{s-1}+1) \omega\left(\frac{1}{2^{s-1}+1}\right) \left(\frac{1}{2^{s-1}} - \frac{1}{2^{s-1}+1} \right).$$

Поэтому

$$S \leq \omega\left(\frac{1}{2^{s-2}+1}\right) + 2\omega(2^{-s+1}) + 3\omega\left(\frac{1}{2^{s-1}+1}\right),$$

и мы получаем неравенство (2).

Теперь докажем, что $f(x) \notin H_1^\omega$. Как уже отмечалось, $\omega(\tau)/\tau^\alpha \uparrow +\infty$ при $\tau \downarrow 0$ и при $\alpha > 0$. Это означает, что $\omega(\tau)$ удовлетворяет условию (S_l) (см. [1], [2]). В [5] показано, что если $\omega(\tau)$ удовлетворяет условию (L_l) , равносильному условию (S_l) , то соотношение

$$\omega_l(f; \tau)_q = O(\omega(\tau))$$

эквивалентно соотношению

$$E_n(f)_q = O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Здесь через $E_n(f)_q$ обозначено наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка n в норме пространства L_q , $1 \leq q \leq \infty$.

Поэтому нам достаточно доказать, что для

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega\left(\frac{1}{k}\right) \sin kx$$

будет

$$E_n(f)_1 \neq O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (3)$$

С помощью соотношений двойственности можно доказать неравенство

$$E_n(f)_1 \gg \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \omega\left(\frac{1}{k}\right).$$

Так как $\omega(\tau)$ не удовлетворяет условию (S) и, следовательно, не удовлетворяет условию (B) , то верно (3).

Итак, мы показали, что если выпуклый вверх модуль непрерывности порядка l имеет вид (1), где $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условиям 1)–3), то существует функция $f(x)$, для которой $\|A_s(f, x)\|_1 \ll \omega(2^{-s})$, но $f(x) \notin H_1^\omega$.

Далее, действуя аналогично доказательству теоремы 3 из [1], можно доказать существование смешанного модуля непрерывности порядка l $\Omega(t)$, не удовлетворяющего условию (S) , такого, что существует функция $f(x)$, для которой $\|A_s(f, x)\|_1 \ll \Omega(2^{-s})$, однако, $f(x) \notin H_1^\Omega$.

Итак, мы видим, что, вообще говоря, мы не можем отказаться от условия (S) при характеристизации H_1^Ω через $\|A_s(f, x)\|_1$.

МГААТМ

Поступило

19.08.94

Исправленный вариант

17.01.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pustovoytov N. N. // *Anal. Math.* 1994. V. 20. № 1. P. 35–48.
2. Пустовойтов Н. Н. О представлении и приближении периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности. Препринт. Хабаровск, 1992.
3. Бари Н. К., Стечкин С. Б. // *Тр. ММО.* 1956. Т. 5. С. 483–522.
4. Теляковский С. А. // *Тр. МИАН.* 1971. Т. 109. С. 73–109.
5. Лозинский С. М. // *Докл. АН СССР.* 1952. Т. 83. С. 645–648.