Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Т. Сильченко, О задаче Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными операторными коэффициентами, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 1, 149–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1815>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:40:40

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ю. Т. Сильченко

1. Рассматривается задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} v'' + A(t)v' + B(t)v &= f(t) \quad (0 < t \leq 1), \\ v(0) &= v_0, \quad v'(0) = v_1, \end{aligned} \tag{1}$$

в банаховом пространстве E . Здесь $A(t)$ и $B(t)$ – заданные при каждом $t \in [0, 1]$ линейные операторы с областями определения $D_t = D(A(t))$ и $D_{Bt} = D(B(t))$, $f(t)$ – заданная непрерывная при $t > 0$ функция, v_0, v_1 – заданные элементы на E .

Функцию $v = v(t)$ со значениями в E будем называть решением задачи (1), если функции $v'(t)$ и $A(t)v(t)$ существуют и непрерывны при $t \in [0, 1]$, а функции $v''(t)$, $A(t)v'(t)$, $B(t)v(t)$ существуют и непрерывны при $t \in (0, 1]$, и выполнены соотношения (1).

Задача (1) была исследована в работе [1], в которой предполагалось, что множества D_t и D_{Bt} не зависят от t . Здесь рассматривается более общий случай, когда эти множества могут зависеть от t . Именно, как и в [2], будем предполагать, что $D_\tau \subset D_t$ и $D_{1\tau} \subset D_{1t}$ при $\tau \leq t$, где $D_{1t} = D(A_1(t))$, $A_1(t) = B(t)A^{-1}(t)$. Следуя [3], данную задачу будем исследовать методами теории полугрупп. В [3] введен также используемый класс полугрупп.

Основной результат составляет

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия:

1°) при каждом $t \in [0, 1]$ существуют полугруппы $\exp[-\tau A(t)]$ и $\exp[-\tau A_1(t)]$, порожденные операторами $A(t)$ и $A_1(t)$ соответственно, выполнены оценки

$$\|A^k(t) \exp[-\tau A(t)]\| \leq M\tau^{-\varkappa(k)} \exp(-\omega\tau), \tag{2}$$

где $k = 0, 1, 2, 3$, $\varkappa(0) = \alpha$, $\varkappa(1) = \beta$, $\varkappa(2) = \gamma$, $\varkappa(3) = \delta$,

$$\|A_1^k(t) \exp[-\tau A_1(t)]\| \leq M\tau^{-\varkappa_1(k)} \exp(-\omega_1\tau), \tag{3}$$

где $k = 0, 1, 2, 3$, $\varkappa_1(0) = \alpha_1$, $\varkappa_1(1) = \beta_1$, $\varkappa_1(2) = \gamma_1$, $\varkappa_1(3) = \delta_1$ при некоторых $\omega, \omega_1 \geq \overline{\omega}$ с достаточно большим $\overline{\omega}$, и параметры в (2), (3) удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} 1 + \alpha &\leq \beta \leq \gamma - 1 \leq \delta - 2, & 2\gamma &\leq \beta + \delta, & 2\beta &\leq \alpha + \gamma, \\ 1 + \alpha_1 &\leq \beta_1 \leq \gamma_1 - 1 \leq \delta_1 - 2, & 2\gamma_1 &\leq \beta_1 + \delta_1, & 2\beta_1 &\leq \alpha_1 + \gamma_1, \\ \alpha + \gamma_1 &< 3, & \alpha_1 + \gamma &< 3, & a &< \frac{1-a}{d-b} \end{aligned}$$

где $a = \max\{\alpha + \beta_1 - 1, \alpha_1 + \beta - 1\}$, $b = \max\{\alpha + \gamma_1 - 1, \alpha_1 + \gamma - 1\}$,
 $d = \max\{\alpha + \delta_1 - 1, \alpha_1 + \delta - 1, \beta + \beta_1\}$;

2°) оператор-функция $A(t)A^{-1}(0)$ дифференцируема на $[0, 1]$;

3°) неравенства

$$\begin{aligned} & \|A'(t)A^{-1}(t) - A'(\tau)A^{-1}(\tau)\| \leq c|t - \tau|^\sigma, \\ & \|[A(t) - A(\tau)]A^{-1}(\tau)\| \leq c|t - \tau|^\sigma, \quad \|[A_1(t) - A_1(\tau)]A_1^{-1}(\tau)\| \leq c|t - \tau|^\sigma, \\ & \|A^{-1}(t)[A(t) - A(\tau)]v\| \leq c|t - \tau|^\sigma\|v\|, \\ & \|A_1^{-1}(t)[A_1(t) - A_1(\tau)]v_1\| \leq c|t - \tau|^\sigma\|v_1\| \end{aligned}$$

выполнены при $\tau \leq t$ для некоторого $\sigma \in (b-1, 1]$ и любых $v \in D_\tau$ и $v_1 \in D_{1\tau}$;

4°) оператор $B(t)A^{-(1+\rho)}(t)$ ограничен при некотором

$$0 \leq \rho < \left(\frac{1-a}{d-a} - a \right) \frac{1}{\gamma - \beta};$$

5°) $\|f(t + \Delta t) - f(t)\| \leq c|\Delta t|^\varepsilon t^{-\mu}$, где $\varepsilon \in ((b-1)/(b-a), 1]$, $\mu \in [0, 1-a]$;

6°) $v_0 \in D_0 \cap D_{B0}$, $v_1 \in D_{B0}$.

Тогда задача (1) имеет единственное решение.

Отметим, что особенность этой теоремы состоит в том, что множества D_t и D_{Bt} не предполагаются плотными в E , не используются свойства резольвент операторов $A(t)$ и $A_1(t)$, показатели сингулярности в оценках (2) и (3) связаны лишь неравенствами, функция $f(t)$ может иметь в нуле особенность. Это отличает данную теорему от соответствующего результата из [2].

2. Перейдем к доказательству этой теоремы. В [2] показано, что нахождение решения задачи (1) эквивалентно нахождению решения системы

$$w' + \mathfrak{A}(t)w + \mathfrak{B}(t)w = \mathfrak{F}(t) \quad (0 < t \leq 1), \quad w(0) = w_0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} w &= \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad w_0 = \begin{pmatrix} A(0)v_0 + v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{F}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f(t) \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{A}(t) &= \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 \\ A_1(t) & A(t) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}(t) = \begin{pmatrix} -A'(t)A^{-1}(t) & A'(t)A^{-1}(t) - A_1(t) \\ 0 & -A_1(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

которая получается из (1) с помощью замены $w_1(t) = A(t)v(t) + v'(t)$, $w_2(t) = v'(t)$. Отметим также, что из условий (2) и (3) при достаточно большом $\overline{\omega}$ вытекает существование ограниченных операторов $A^{-1}(t)$ и $A_1^{-1}(t)$.

Систему (4) будем рассматривать как одно уравнение в пространстве $E \times E$ с нормой $\|w\| = \|w_1\| + \|w_2\|$ и для этого уравнения будет проверено выполнение условий теоремы 2 из [3].

Для оператора $\mathfrak{A}(t)$ существует полугруппа $\exp[-\tau\mathfrak{A}(t)]$, порожденная этим оператором, именно

$$\exp[-\tau\mathfrak{A}(t)] = \begin{pmatrix} \exp[-\tau A_1(t)] & 0 \\ C(t, \tau) & \exp[-\tau A(t)] \end{pmatrix},$$

где $C(t, \tau) = -\int_0^\tau \exp[-(\tau-s)A(t)]A_1(t) \exp[-sA_1(t)] ds$. Существование последнего интеграла и свойства полугруппы $\exp[-\tau\mathfrak{A}(t)]$ установлены в [1], где показано, что

$$\|\mathfrak{A}^k(t) \exp[-\tau\mathfrak{A}(t)]\| \leq c\tau^{-\kappa_2(k)} \exp(-\omega_0\tau). \quad (5)$$

Здесь $k = 0, 1, 2$, $\kappa_2(0) = a$, $\kappa_2(1) = b$, $\kappa_2(2) = d$, $\omega_0 = \min\{\omega, (\omega + \omega_1)/2\}$, причем параметры a, b, d подчинены условиям $a + 1 \leq b \leq (a + d)/2$, $b < 2$.

Далее как и в [1] устанавливается, что возмущенный оператор $\mathfrak{A}(t) + \mathfrak{B}(t)$ также порождает полугруппу $\exp\{-\tau[\mathfrak{A}(t) + \mathfrak{B}(t)]\}$, для которой выполнены оценки типа (5) с теми же параметрами a, b, d, ω_0 . Поэтому, в частности, существуют ограниченные операторы $[\mathfrak{A}(t) + \mathfrak{B}(t)]^{-1}$ и $[I + \mathfrak{B}(t)\mathfrak{A}^{-1}(t)]^{-1}$. Отметим еще, что из условий $D_\tau \subset D_t$ и $D_{1\tau} \subset D_{1t}$ при $\tau \leq t$ вытекает, что $D(\mathfrak{A}(\tau)) \subset D(\mathfrak{A}(t))$ и $D(\mathfrak{A}(\tau) + \mathfrak{B}(\tau)) \subset D(\mathfrak{A}(t) + \mathfrak{B}(t))$ при $\tau \leq t$.

Исследуем гладкость оператора $\mathfrak{A}(t) + \mathfrak{B}(t)$ по t . Для этого воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned} & [\mathfrak{A}(t) + \mathfrak{B}(t) - \mathfrak{A}(\tau) - \mathfrak{B}(\tau)][\mathfrak{A}(\tau) + \mathfrak{B}(\tau)]^{-1} \\ &= \{[\mathfrak{A}(t) - \mathfrak{A}(\tau)]\mathfrak{A}^{-1}(\tau) + [\mathfrak{B}(t) - \mathfrak{B}(\tau)]\mathfrak{A}^{-1}(\tau)\}[I + \mathfrak{B}(\tau)\mathfrak{A}^{-1}(\tau)]^{-1}, \\ & [\mathfrak{A}(t) - \mathfrak{A}(\tau)]\mathfrak{A}^{-1}(\tau) \\ &= \begin{pmatrix} [A_1(t) - A_1(\tau)]A_1^{-1}(\tau) & 0 \\ [A_1(t) - A_1(\tau)]A_1^{-1}(\tau) - [A(t) - A(\tau)]A^{-1}(\tau) & [A(t) - A(\tau)]A^{-1}(\tau) \end{pmatrix}, \\ & [\mathfrak{B}(t) - \mathfrak{B}(\tau)]\mathfrak{A}^{-1}(\tau) \\ &= \begin{pmatrix} [A'(t)A^{-1}(t) - A'(\tau)A^{-1}(\tau)]A_1^{-1}(\tau) - D & D \\ [A_1(t) - A_1(\tau)]A^{-1}(\tau) & [A_1(\tau) - A_1(t)]A^{-1}(\tau) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $D = [A'(t)A^{-1}(t) - A'(\tau)A^{-1}(\tau)]A^{-1}(\tau) - [A_1(t) - A_1(\tau)]A^{-1}(\tau)$.

Из этих формул и условия 3°) теоремы 1 вытекает неравенство – нужное условие гладкости

$$\|[\mathfrak{A}(t) + \mathfrak{B}(t) - \mathfrak{A}(\tau) - \mathfrak{B}(\tau)][\mathfrak{A}(\tau) + \mathfrak{B}(\tau)]^{-1}\| \leq c|t - \tau|^\sigma.$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$\|[\mathfrak{A}(t) - \mathfrak{B}(t)]^{-1}[\mathfrak{A}(t) + \mathfrak{B}(t) - \mathfrak{A}(\tau) - \mathfrak{B}(\tau)]w\| \leq c|t - \tau|^\sigma \|w\|$$

для $w \in D(\mathfrak{A}(t))$ и $\tau \leq t$.

Наконец, $w_0 \in D(\mathfrak{A}(0) + \mathfrak{B}(0))$ и функция $\mathfrak{F}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем ε . Поэтому в силу [3] задача (4) имеет единственное решение. Тем самым установлена разрешимость задачи (1).

3. Приведем пример использования теоремы 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (v = v(t, x), \quad x \in [0, 2], \quad t \in [0, 1]). \quad (6)$$

Обозначим через G_1 множество (область) в плоскости переменных (t, x) , ограниченное прямыми $t = 0$, $t = 1$, $x = 0$, $x = t + 1$, а через G_2 – прямыми $t = 0$, $x = 2$, $x = t + 1$. Поставим задачу о нахождении функции $v = v(t, x)$ в прямоугольнике

$G_1 \cup G_2 \cup \{(t, x) : x = t + 1, t \in (0, 1)\}$, которая на G_2 равна нулю, а на части границы G_1 удовлетворяет начальным условиям

$$\begin{aligned} v(0, x) &= v_0(x), & v'_t(0, x) &= v_1(x), & x &\in [0, 1], \\ v_0(x) &= 0, & v_1(x) &= 0, & x &\in (1, 2], \end{aligned} \quad (7)$$

и краевым условиям

$$v(t, 0) = v(t, t + 1) = 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (8)$$

Будем исследовать эту задачу в пространстве $L_2(0, 2) = L_2$ и искать ее обобщенное решение. Для этого умножим (6) на бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi(x)$ с носителем на отрезке $[0, 2]$ ($\varphi \in \overset{\circ}{C}^\infty$) и проинтегрируем полученное равенство по x от 0 до 2. Далее, проведя интегрирование по частям во втором и третьем слагаемых, получим соотношение

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \varphi \right) + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}, \varphi' \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \varphi' \right) = 0$$

$((\varphi, f) - \text{скалярное произведение в } L_2)$, которое и определяет обобщенное решение задачи (6)–(8). Положим

$$D_t = \{v(x) \in W_2^1(0, 2), v(0) = v(t + 1) = 0 \text{ и } v(x) = 0 \text{ для } x \in [t + 1, 2], t \in [0, 1]\}.$$

На этом множестве определим оператор $A(t)$, действующий по правилу $(A(t)v, \varphi) = (v', \varphi')$ для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{C}^\infty$. Тогда задача (6)–(8) сведется к абстрактной задаче Коши

$$v'' + A(t)v' + A(t)v = 0, \quad v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1$$

в функциональном пространстве L_2 . Отметим, что здесь D_t не является плотным в L_2 множеством и $D_\tau \subset D_t$ при $\tau \leq t$. Применяя теперь к этой задаче теорему 1 в случае $B(t) = A(t)$, получим ее разрешимость в классе обобщенных решений, если $v_0(x), v_1(x) \in D_0$.

Воронежский государственный университет

Поступило
20.04.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сильченко Ю.Т. // Изв. вузов. Матем. 1993. Т. 378. № 11. С. 40–49.
2. Якубов С.Я. // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 3. С. 545–548.
3. Сильченко Ю.Т. // Сиб. матем. ж. 1993. Т. 34. № 2. С. 166–169.