Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. М. Ахметьев, Ю. В. Муранов, Препятствия к расщеплению многообразий с бесконечной фундаментальной группой, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 2, 163–175

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1816>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:58:28

ПРЕПЯТСТВИЯ К РАСЩЕПЛЕНИЮ МНОГООБРАЗИЙ С БЕСКОНЕЧНОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППОЙ

П. М. Ахметьев, Ю. В. Муранов

1. Пусть $X \subset Y$ – пара гладких или кусочно-линейных многообразий, U – трубчатая окрестность подмногообразия X в многообразии Y , $n = \dim X \geq 5$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \pi_1(\partial U) & \longrightarrow & \pi_1(Y \setminus X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X) & \longrightarrow & \pi_1(Y) \end{pmatrix} \quad (1)$$

– универсальный отталкивающий квадрат фундаментальных групп. Тогда группы $LS_n(\Phi)$, функториально зависящие от квадрата Φ и $n \bmod 4$, определяют группу препятствий к расщеплению простых гомотопических эквивалентностей $f: M \rightarrow Y$ вдоль подмногообразия X . Группы $LS(\Phi)$ как группы кобордизмов в самой общей ситуации были определены Уоллом в работе [1] (см. также [2]). Алгебраическое определение групп $LS(\Phi)$ для одностороннего подмногообразия в случае, когда горизонтальные отображения в квадрате Φ являются эпиморфизмами, дано в работе [3]. Универсальный отталкивающий квадрат Φ фундаментальных групп в этом случае будем, следуя [3], называть геометрической диаграммой.

В данной работе будет рассматриваться ситуация, когда X является односторонним подмногообразием коразмерности 1 в Y . При этом, если вложение $X \subset Y$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп, то пара (Y, X) называется парой Браудера–Ливси. Группа $LS_n(\Phi)$ в этом случае совпадает с группой $LN_n(\pi \rightarrow G)$, где $\pi = \pi_1(Y \setminus U)$, $G = \pi_1(Y)$, $\pi \rightarrow G$ – вложение индекса 2, алгебраически являющейся группой Уолла для кольца с антиструктурой (см. [1], [4]). Мы вычисляем некоторые группы препятствий к расщеплению для геометрических квадратов Φ , в которых группа $\pi_1(X)$, являющаяся фундаментальной группой подмногообразия коразмерности 1, является бесконечной абелевой группой $\mathbb{Z}$ либо $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$. Следует отметить, что о группах препятствий к расщеплению в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–011–1402.

случае бесконечных групп в настоящее время известно очень мало. Это связано со следующими обстоятельствами. Во-первых, уже для самых простых бесконечных групп π группы Уолла $L(\pi)$ оказываются бесконечно порождены. Во-вторых (см. [1]–[5]), в настоящее время отсутствует алгебраическое определение групп LS в общем случае.

В качестве непосредственных следствий из проводимых вычислений в работе описаны такие важные для геометрических приложений отображения групп Уолла, как трансфер (соответствует переходу к двулистному накрытию) и индуцирование для участвующих в квадрате Φ вложений бесконечных групп индекса 2, и рассмотрен ряд примеров, в которых возникают геометрические диаграммы.

В работе [6] для решения вопроса о реализуемости элементов групп Уолла нормальными отображениями замкнутых многообразий было введено понятие типа элемента и проведена классификация по типам для элементарных 2-групп. Определение типа элемента опирается на двустрочную диаграмму, связывающую группы $L(\pi)$, $L(G)$ и $LN(\pi \rightarrow G)$ для подгруппы π индекса 2 в группе G (см. [7], [8]). Даже, когда известны все отображения в двустрочной диаграмме, остаются трудности классификации, связанные с необходимостью знания взаимного расположения образов

$$\begin{aligned} i_* &: L_n(\pi) \rightarrow L_n(G), \\ ti_* &: LN_n(\pi \rightarrow G) \rightarrow L_n(G). \end{aligned}$$

в группе $L_n(G)$. Именно трудности такого рода не позволили закончить классификацию по типам в случае конечных абелевых 2-групп в работе [9]. Отметим также, что последний вопрос тесно связан с задачей идентификации элементов групп Уолла и вычислением дифференциалов в точной последовательности хирургии (см. [10]), построенной в работе [11].

В настоящей работе результаты о группах $LS_n(\Phi)$ применяются нами для определения взаимного расположения образов отображений i_* и ti_* и классификации по типам элементов группы $L_n(G) \ \forall n = 0, 1, 2, 3 \bmod 4$ для произвольной конечной абелевой 2-группы G с исключительным характером ориентации (т.е. в группе G существует прямое слагаемое $\mathbb{Z}/2$, на котором характер ориентации нетривиален). Этот результат принадлежит Ю. В. Муранову.

Построенная для этой цели диаграмма, связывающая группы Уолла и группы препятствий к расщеплению, дает еще один алгебраический метод вычислений и применима в более общей ситуации, чем рассматриваемая в данной работе. Эта диаграмма аналогична диаграммам, построенным в работах [1], [7], [8], применение которых позволило значительно продвинуться в вычислениях L -групп и естественных отображений между ними (см. [9], [10], [12]).

Все группы L , LN , LS , рассматриваемые в данной работе, предполагаются снабженными декорацией S , что в геометрии соответствует перестройкам до простой гомотопической эквивалентности (см. [1]).

2. Диаграммы и точные последовательности для групп $LS_*(\Phi)$.

Обозначим фундаментальные группы и отображения, входящие в геометрическую диаграмму (1), следующим образом:

$$\Phi = \begin{pmatrix} A^+ & \xrightarrow{s} & C^+ \\ \downarrow r & & \downarrow l \\ B^- & \xrightarrow{j} & D^+ \end{pmatrix}.$$

Все группы, входящие в данный квадрат, снабжены гомоморфизмом в группу $\mathbb{Z}/2$ (характер ориентации). При этом все гомоморфизмы, кроме j , коммутируют с гомоморфизмом ориентации, а гомоморфизм j коммутирует с ним на образе отображения r и не коммутирует вне этого образа. Это обстоятельство мы обозначаем верхними индексами “ $\pm$ ” у соответствующих групп. В геометрической диаграмме отображения r и l являются вложениями на подгруппу индекса 2, а отображения s, j – эпиморфизмы. Пусть $t \in B \setminus r(A)$, тогда $j(t) \in D \setminus l(C)$. Это позволяет отмечать индексом “ $-$ ” такую ориентацию D , при которой значение гомоморфизма ориентации согласовано посредством гомоморфизма j с ориентацией на группе B . Важно отметить, что в этом случае гомоморфизм l остается согласованным с ориентациями. Индекс “ $+$ ” в указании ориентации мы будем опускать.

Существует тесная связь между группами $LS_n(\Phi)$ и L -группами всех групп, участвующих в квадрате Φ . Имеет место коммутативная диаграмма (коса Левина) из работы [1]:

$$\begin{array}{ccccccc} & \longrightarrow & L_n(B^-) & \longrightarrow & L_{n+1}(C \rightarrow D) & \longrightarrow & \\ & \nearrow & & \searrow & \nearrow & & \nearrow \\ LS_n & & & & L_{n+1}(A \rightarrow B) & & LS_{n-1} \\ & \searrow & & \nearrow & \searrow & & \searrow \\ & \longrightarrow & L_{n+2}(\Phi) & \longrightarrow & L_{n-1}(A \rightarrow B) & \longrightarrow & \end{array} \quad (2)$$

В работах [7], [8] построена двустрочная диаграмма для случая групп Браудера–Ливси, т.е. когда отображения s, j в квадрате Φ являются изоморфизмами:

$$\begin{array}{ccccccc} L_n(A) & \longrightarrow & L_n(B) & \longrightarrow & LN_{n-2}(A \rightarrow B) & \longrightarrow & L_{n-2}(B^-) \longrightarrow \\ | & & | & & | & & | \\ LN_{n-1}(A \rightarrow B) & \longrightarrow & L_{n-1}(B^-) & \longrightarrow & L_{n-1}(A) & \longrightarrow & LN_{n-2}(A \rightarrow B) \longrightarrow \end{array} \quad (3)$$

В этой диаграмме строки являются цепными комплексами с изоморфными в соответствующих членах гомологиями. Данная диаграмма имеет ряд преимуществ, поскольку все отображения в ней имеют не только геометрический смысл, но и эффективное алгебраическое описание (см. [1], [7],

[8]). В действительности данная диаграмма является косой Левина с относительными группами Уолла отображений r_* (индуцирование) и $r^!$ (трансфер), стоящими в средней строке (см. [1], [8]), которая пропущена на диаграмме. Но именно в виде (3) диаграмма была построена алгебраически в работе [6] и используется в приложениях.

ТЕОРЕМА 1. *Для геометрической диаграммы (Φ) имеет место следующая коса Левина (коммутативная диаграмма точных последовательностей)*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \longrightarrow & L_{n+1}(B^- \rightarrow D^-) & \longrightarrow & L_n(B^-) & \longrightarrow & \\
 & \nearrow & & \searrow & \nearrow & & \searrow \\
 L_{n+1}(D^-) & & & & LS_n(\Phi) & & L_n(D^-) \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & & \\
 & \longrightarrow & L_{n+2}(C \rightarrow D) & \longrightarrow & LN_n(C \rightarrow D) & \longrightarrow &
 \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $LS, LN, L(B^-), L(D^-)$ спектры Квинна–Раницкого (см. [2], [4], [13]), гомотопические группы которых равны соответствующим L -группам или группам препятствий к расщеплению (так, например, $\pi_n(LN) = LN_n(C \rightarrow D)$ и т.д.), входящим в диаграмму. Длинная точная последовательность

$$\rightarrow LS_n(\Phi) \rightarrow L_n(B^-) \rightarrow L_{n+1}(C \rightarrow D) \rightarrow \quad (4)$$

в диаграмме (2) порождена отображением спектров $LS \rightarrow L(B^-)$. Так как точная последовательность (4) естественна, то отображение квадратов

$$\Phi = \left(\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^- & \longrightarrow & D \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^- & \longrightarrow & D \end{array} \right) = \Phi'$$

индуцирует коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccc}
 LS & \longrightarrow & L(B^-) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 LN & \longrightarrow & L(D^-)
 \end{array},$$

в которой вертикальные отображения индуцированы ξ . Кослои горизонтальных отображений гомотопически эквивалентны спектру $L(C \rightarrow D)$ (см. диаграмму (2)). Следовательно, кослои вертикальных отображений эквивалентны спектру $L(B^- \rightarrow D^-)$. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Точная последовательность, входящая в диаграмму теоремы 1,

$$\rightarrow L_{n+1}(B^- \rightarrow D^-) \rightarrow LS_n(\Phi) \rightarrow LN_n(C \rightarrow D) \rightarrow \quad (5)$$

была построена в работе [14] элементарными методами (без использования понятия спектра) в предположении, что группа D конечна.

3. Группы препятствий к расщеплению. Сначала мы вычислим некоторые группы Браудера–Ливси для случая бесконечных групп. Обозначим через r отображение умножения на 2: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Напомним, что имеют место изоморфизмы

$$LN_{n+2}(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^-) \cong LN_n(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \cong L_n(\mathbb{Z}[z, z^{-1}], \alpha, -z),$$

где z – образующая группы $\mathbb{Z}$, а α – стандартная инволюция:

$$\alpha\left(\sum a_j z^j\right) = \sum a_j z^{-j}.$$

Рассматриваемые группы $LN_n(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z})$ имеют период два. Изоморфизм задается отображением антиструктур, при котором z переходит в $-z$. Вопрос о вычислении данных групп LN ставился еще в работе [1].

ПРИМЕР 1. Пусть M^2 – лист Мёбиуса, $S^1 \subset M^2$ – средняя линия, N – односвязное многообразие высокой размерности. Для пары $X = S^1 \times N \subset Y = M^2 \times N$ геометрическая диаграмма имеет вид

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ \mathbb{Z}^+ & \longrightarrow & \mathbb{Z}^- \end{array}.$$

ТЕОРЕМА 2. Группы $LN_n(\mathbb{Z} \xrightarrow{r} \mathbb{Z}^\pm)$ тривиальны для любого $n \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В диаграмме (3), в рассматриваемом случае, известны все группы (см. [1]) кроме групп LN , которые два-периодичны. Рассмотрим следующий участок этой диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccccc} L_3(\mathbb{Z}^-) & \longrightarrow & LN_1 & \longrightarrow & L_1(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{r^!} & L_1(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{r_*} & L_1(\mathbb{Z}^-) & \longrightarrow & LN_1 \\ | & & | & & | & & | & & | & & | \\ L_2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{r^!} & L_2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{r_*} & L_2(\mathbb{Z}^-) & \longrightarrow & LN_0 & \longrightarrow & L_0(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{r^!} & L_0(\mathbb{Z}) \end{array}.$$

Здесь r_* – отображение групп Уолла, индуцированное r , а $r^!$ – трансфер. Напомним, что $L_n(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2$, а $L_n(\mathbb{Z}^-) = \mathbb{Z}/2, 0, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2$ при

$n = 0, 1, 2, 3 \pmod 4$. Обозначим через k естественное вложение $e \rightarrow \mathbb{Z}/2$, где e – единичная группа. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & L_0(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{r^!} & L_0(\mathbb{Z}) \\ & \nearrow \cong & \downarrow & & \downarrow \cong \\ L_0(e) & & L_0(\mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{k^!} & L_0(e) \\ & \searrow k_* & & & \end{array}.$$

Правый квадрат коммутативен в силу естественности отображения трансфера, а треугольник индуцирован отображениями групп. Указанные в диаграмме изоморфизмы имеют место в силу существования ретракции $\mathbb{Z} \rightarrow e$. Композиция $k^!k_*$ является умножением на 2 (см., например, [10]), следовательно, отображение $r^!$ в размерности 0 является мономорфизмом с коядром $\mathbb{Z}/2$. Отображение r_* является изоморфизмом в размерности 2, так как сохраняет Арф-вариант. Композиция $L_1(\mathbb{Z}) \xrightarrow{r_*} L_1(\mathbb{Z}) \xrightarrow{r^!} L_1(\mathbb{Z})$ является умножением на 2, а левое отображение есть умножение на 2 согласно [1]. Следовательно, отображение $r^!$ является изоморфизмом в размерности 1. Таким образом, из верхней строки диаграммы следует, что гомологии в члене LN_0 тривиальны. Из нижней строки следует, что группа LN_0 полностью остается в гомологиях, следовательно, она тривиальна. Если теперь выписать полностью диаграмму (3) в рассматриваемом случае и сравнить эйлерову характеристику верхнего и нижнего цепного комплекса в смысле 2-кручения, то получим, что $2 \operatorname{rang} LN_1 = 0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. а) Для вложения r индекса 2 группы $\mathbb{Z}$ в группу $\mathbb{Z}^-$ с нетривиальной ориентацией отображение трансфера $r^!$ является изоморфизмом в размерности 3 и тривиально в остальных размерностях. Отображение индуцирования r_* тривиально в нечетных размерностях, является эпиморфизмом в нулевой размерности и изоморфизмом в размерности 2.

б) Если отображение r рассматривается для групп $\mathbb{Z}$ с тривиальной ориентацией, то отображение $r^!$ является изоморфизмом в нечетных размерностях, тривиально в размерности 2 и мономорфизм с коядром $\mathbb{Z}/2$ в размерности 0. Отображение r_* в этом случае является изоморфизмом в четных размерностях, тривиально в размерности 3 и мономорфизм с коядром $\mathbb{Z}/2$ в размерности 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из диаграммы, рассматриваемой в теореме 2, и из аналогичной диаграммы, построенной для случая, когда отображение r рассматривается в группу $\mathbb{Z}$ с противоположной ориентацией.

Следует отметить, что некоторые из приведенных в следствии отображений описаны в работе [1].

Обозначим теперь через r вложение индекса 2 группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^-$ в группу $\mathbb{Z}^\pm \oplus \mathbb{Z}/2^-$, являющееся умножением на 2 на первом слагаемом и тождественным отображением на втором.

ТЕОРЕМА 3. Группы $LN_n(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^- \rightarrow \mathbb{Z}^\pm \oplus \mathbb{Z}/2^-)$ тривиальны $\forall n = 0, 1, 2, 3 \pmod 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично случаю $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ получаем, что данные группы два периодичны. Воспользуемся диаграммой (3). Все группы Уолла, входящие в нее известны (см. [1]):

$$L_n(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^-) \cong L_n(\mathbb{Z}^- \oplus \mathbb{Z}/2^-) = \mathbb{Z}/2 \quad \forall n = 0, 1, 2, 3 \pmod 4.$$

Отображение индуцирования r_* является изоморфизмом в четных размерностях. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} L_3(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{0} & L_3(\mathbb{Z}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ L_3(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^-) & \xrightarrow{r_*} & L_3(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^-) \end{array},$$

в которой верхнее отображение индуцировано умножением на 2, а вертикальные отображения являются изоморфизмами в силу соответствующей диаграммы для вложения $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^-$. Следовательно, отображение r_* тривиально в размерности 3, а, значит, и в размерности 1 в силу естественного изоморфизма $L_n(\pi \oplus \mathbb{Z}/2^-) \cong L_{n+2}(\pi \oplus \mathbb{Z}/2^-)$, имеющего место для любой группы π согласно [1]. Аналогично убеждаемся, что отображение $r^!$ является изоморфизмом в нечетных размерностях. Рассмотрение диаграммы (3) завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $r: \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^- \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^-$ – вложение индекса 2, тождественное на втором слагаемом. Тогда отображение r_* является изоморфизмом в четных размерностях и тривиально в нечетных. Отображение $r^!$ является изоморфизмом в нечетных размерностях и тривиально в четных.

ПРИМЕР 2. Пусть $X = \mathbb{R}P^1 \times N \subset Y = \mathbb{R}P^2 \times N$, где N – многообразие высокой размерности с $\pi_1(N) = \pi$. Геометрическая диаграмма имеет вид

$$\Phi = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \oplus \pi & \longrightarrow & \pi \\ \downarrow & & \downarrow l \\ \mathbb{Z} \oplus \pi & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2^- \oplus \pi \end{array} \right). \quad (6)$$

Обсуждение ситуации в этом случае имеется в работе [15].

ТЕОРЕМА 4. Для геометрической диаграммы (6) с тривиальной группой π группы $LS_n(\Phi)$ равны 0, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2$, $\mathbb{Z}/2$ при $n = 0, 1, 2, 3 \pmod 4$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму теоремы 1, в которой известны все группы кроме LS (см., например, [1]). Из нее немедленно следует утверждение теоремы в размерностях 1 и 2. В размерностях 0 и 3 воспользуемся совпадением образов естественных отображений

$$L_0(e) \xrightarrow{l_*} L_0(\mathbb{Z}/2) \leftarrow L_0(\mathbb{Z}),$$

равных $\mathbb{Z}$ в группе $L_0(\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, и описанием автоморфизма t группы $L_0(\mathbb{Z}/2)$, где t – образующая $\mathbb{Z}/2$ (см. [10]). Из последнего, в частности, следует, что $\text{Im } l_* = \{(a, a)\} \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, а образ отображения

$$tl_*: LN_0(e \rightarrow \mathbb{Z}/2^-) \rightarrow L_0(\mathbb{Z}/2),$$

записанный в том же базисе, имеет вид $\{(a, -a)\}$. Отсюда получаем утверждение теоремы во всех размерностях. Теорема доказана.

ПРИМЕР 3. Пусть $X = S^1 \times \mathbb{RP}^4$, $\pi_1(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^-$. Рассмотрим гомоморфизм $\rho: \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}/2$, определенный по формуле $\rho(t_1) = 1$, $\rho(t_2) = 0$, где t_1 и t_2 – образующие первого и второго слагаемых. Индуцируем гомоморфизмом ρ одномерное (неориентируемое) расслоение ξ над X . Пусть U_ξ – трубчатая окрестность расслоения ξ , $\partial(U_\xi) = S^1 \times \mathbb{RP}^4$ – граница трубчатой окрестности. Произведем внешнюю перестройку многообразия $Y = U_\xi$ вдоль края $\partial(U_\xi)$ по ручке индекса 1, “убивающую” циклическую подгруппу, вложенную во второе слагаемое, как подгруппа индекса 2. Подмногообразие $(X, \emptyset) \subset (Y, \partial Y)$ является односторонним подмногообразием коразмерности 1.

Геометрическая диаграмма имеет следующий вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} A^+ & \xrightarrow{s} & C^+ \\ \downarrow r & & \downarrow l \\ B^- & \xrightarrow{j} & D^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^- & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2^- \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^- & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4^- \oplus \mathbb{Z}/2^- \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Здесь отображения r, l – вложения индекса 2 на первом слагаемом и тождественны на втором, а отображения s, j – естественные эпиморфизмы. Отметим также, что группы D и D^- , B и B^- естественно изоморфны. Мы переходим к вычислению групп LS для геометрической диаграммы (7).

Напомним известные факты о группах Уолла и естественных отображениях между ними для групп из квадрата (7) (см. [9], [16], [17]):

$$\begin{aligned} LN_n(C \rightarrow D) &\cong L_n(C) \cong \mathbb{Z}/2, 0, \mathbb{Z}/2, 0; \\ L_n(D^\pm) &\cong (\mathbb{Z}/2)^2, \mathbb{Z}/2, (\mathbb{Z}/2)^2, \mathbb{Z}/2 \end{aligned}$$

для $n = 0, 1, 2, 3 \pmod 4$ соответственно. Отображение индуцирования l_* является мономорфизмом с коядром $\mathbb{Z}/2$ во всех размерностях. Следовательно, для любого n имеет место эпиморфизм

$$L_n(D) \rightarrow L_n(C \rightarrow D) \cong \mathbb{Z}/2$$

в относительной точной последовательности.

Рассмотрим длинную точную последовательность

$$\rightarrow L_n(B^-) \rightarrow L_{n+1}(A \rightarrow B) \rightarrow LN_{n-1}(A \rightarrow B) \rightarrow,$$

входящую в диаграмму (2) (см. также [4]). Согласно теореме 3 группы LN в этой точной последовательности тривиальны и, следовательно,

$$L_n(A \rightarrow B) \cong \mathbb{Z}/2 \quad \forall n = 0, 1, 2, 3 \pmod{4}.$$

ЛЕММА 1. *Имеет место изоморфизм*

$$L_n(B \rightarrow D) \cong L_n(B^- \rightarrow D^-) \cong \mathbb{Z}/2, 0, \mathbb{Z}/2, 0$$

для $n = 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Два-периодичность данных групп следует из естественной периодичности абсолютных групп (см. [1]). Отображение $j_*: L_{2n}(B) \rightarrow L_{2n}(D)$ является мономорфизмом с коядром $\mathbb{Z}/2$ в силу наличия ретракции, коммутирующей с j , групп B и D на группу $\mathbb{Z}/2^-$, для которой группа L_{2n} изоморфна $\mathbb{Z}/2$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} L_3(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^-) & \xrightarrow{j_*} & L_3(\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2^-) \\ \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ L_3(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{mod } 4} & L_3(\mathbb{Z}/4) \cong \mathbb{Z}/2 \\ \searrow \text{mod } 2 & & \swarrow \text{mod } 2 \\ & L_3(\mathbb{Z}/2) & \end{array}.$$

Левые вертикальные отображения являются изоморфизмами: нижнее – согласно [1, с.138], верхнее – по доказательству теоремы 3. Правое вертикальное отображение – изоморфизм согласно [17]. Следовательно, отображение j_* – изоморфизм в нечетных размерностях и лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Группы $LS_n(\Phi)$, где Φ – геометрическая диаграмма (7) тривиальны $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точной последовательности (5) следует, что группы LS_n либо тривиальны, либо изоморфны группе $\mathbb{Z}/2$ при любом n . Предположим, что реализуется вторая возможность. Рассмотрим следующий участок диаграммы, полученной в теореме 1:

$$\begin{array}{ccccc} L_1(B^- \rightarrow D^-) & \longrightarrow & L_0(B^-) & \longrightarrow & L_1(C \rightarrow D) \\ & \searrow & & \searrow & \\ & LS_0(\Phi) & & L_0(D^-) & \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ L_2(C \rightarrow D) & \longrightarrow & LN_0(C \rightarrow D) & \longrightarrow & L_0(B^- \rightarrow D^-) \end{array}.$$

При нашем предположении диаграмма, начинающаяся с этого участка, имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 = \text{LN}_3 \\
 & \searrow & \nearrow \cong & \text{mono} \searrow & \nearrow & \searrow \cong & \nearrow \\
 & & \mathbb{Z}/2 & & (\mathbb{Z}/2)^2 & & \mathbb{Z}/2 \\
 & \nearrow 0 & \searrow \cong & \nearrow & \searrow \text{epi} & \nearrow \cong & \searrow 0 \\
 \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2 \cong \text{L}_3(B^-)
 \end{array}$$

Все отображения, указанные в диаграмме, определяются из леммы 1 диаграммным поиском. В частности, в диаграмме (2) имеют место изоморфизмы

$$\text{LS}_{2n}(\Phi) \rightarrow \text{L}_{2n}(B^-), \quad \text{L}_{2n+1}(C \rightarrow D) \rightarrow \text{LS}_{2n-1}(\Phi).$$

Тогда участок диаграммы (2) имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\cong} & \text{L}_{2n+1}(\Phi) \\
 & \nearrow \cong & \searrow \cong & \nearrow \psi \equiv 0 & \searrow \cong & \nearrow \cong & \\
 \text{LS}_{2n}(\Phi) \cong \mathbb{Z}/2 & & \mathbb{Z}/2 & & \mathbb{Z}/2 & & \\
 & \searrow \cong & \nearrow \cong & \searrow & \nearrow & \searrow 0 & \\
 & & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow &
 \end{array}$$

где все неизвестные отображения без труда определяются диаграммным поиском. В частности, отображение

$$\psi: \text{L}_{2n+1}(A \rightarrow B) \rightarrow \text{L}_{2n+1}(C \rightarrow D),$$

индуцированное горизонтальными отображениями в квадрате Φ , должно быть тривиально при нашем предположении. Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 \text{L}_{2n+1}(B) & \xrightarrow{j_*} & \text{L}_{2n+1}(D) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{L}_{2n+1}(A \rightarrow B) & \xrightarrow{\psi} & \text{L}_{2n+1}(C \rightarrow D)
 \end{array}$$

в котором j_* – изоморфизм по лемме 1, а правое вертикальное отображение – изоморфизм, согласно рассуждениям, приведенным перед леммой 1. Следовательно, отображение ψ – изоморфизм, и мы приходим к противоречию, т.е. группы $\text{LS}_n(\Phi)$ тривиальны для любого $n \in \mathbb{Z}$. Теорема 5 доказана.

3. Применения. В этом пункте результаты о группах препятствий к расщеплению применяются для исследования естественных отображений групп Уолла конечных групп. Мы также рассматриваем еще один пример применения групп LS к расщеплению вдоль систем подмногообразий. Мы сохраняем обозначения предыдущего параграфа.

Сначала отметим, что большинство отображений, участвующих в коммутативной диаграмме теоремы 1, имеют эффективное алгебраическое определение. Так отображение $tl_*: \text{LN}_n(C \rightarrow D) \rightarrow \text{L}_n(D^-)$ является композицией отображения индуцирования l_* и скейлинга t , где элемент $t \in D \setminus C$, а отображение j_* индуцировано отображением j .

ЛЕММА 2. *Образы отображений j_* и tl_* порождают группу*

$$\text{L}_{2n}(D^-) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующий участок диаграммы, построенной в теореме 1:

$$\begin{array}{ccccc} \text{L}_{2n}(B^-) \cong \mathbb{Z}/2 & & \longrightarrow & & \mathbb{Z}/2 \\ & \nearrow & j_* & \searrow \text{epi} & \\ \text{LS}_{2n}(\Phi) & & & & (\mathbb{Z}/2)^2 \cong \text{L}_{2n}(D^-) \\ & \searrow & tl_* & \nearrow \text{epi} & \\ \text{LN}_{2n}(C \rightarrow D) \cong \mathbb{Z}/2 & & \longrightarrow & & \mathbb{Z}/2 \end{array} .$$

Из тривиальности групп LS и точности соответствующих последовательностей, входящих в диаграмму, получаем утверждение леммы.

Мы будем пользоваться понятием типа элемента групп Уолла. Определение можно найти в работах [6], [9], где также обсуждается связь типа элемента с реализуемостью нормальными отображениями замкнутых многообразий.

ТЕОРЕМА 6. *Единственный нетривиальный элемент группы*

$$\text{L}_{2n+1}(\mathbb{Z}/2^- \oplus \mathbb{Z}/4^\pm) \cong \mathbb{Z}/2$$

является элементом третьего типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [9], нам достаточно доказать, что образы отображений

$$tl_*: \text{LN}_{2n}(\mathbb{Z}/2^- \oplus \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/2^- \oplus \mathbb{Z}/4) \rightarrow \text{L}_{2n}(\mathbb{Z}/2^- \oplus \mathbb{Z}/4),$$

$$l_*: \text{L}_{2n}(\mathbb{Z}/2^- \oplus \mathbb{Z}/2) \rightarrow \text{L}_{2n}(\mathbb{Z}/2^- \oplus \mathbb{Z}/4)$$

порождают всю группу. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^- & \xrightarrow{j} & \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2^- \\ \uparrow & & \uparrow l \\ \mathbb{Z}/2^- & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2^- \end{array} ,$$

индуцирующую отображение групп Уолла в четной размерности. Отсюда получаем, что в четных размерностях $\text{Im } j_* = \text{Im } l_*$. Теперь теорема следует из леммы 2.

Отметим, что теорема 6 дает ответ на вопрос, поставленный в работе [9, с. 1088] и позволяет провести классификацию по типам элементов в случае конечной абелевой 2-группы с исключительным характером ориентации. Случай четномерных групп Уолла в этой ситуации полностью разобран в работе [9]. Приводимый ниже результат дает ответ в случае нечетной размерности.

Итак, пусть конечная абелева 2-группа π записана в виде $\pi = \mathbb{Z}/2^- \oplus \pi_1 \oplus \pi_2$, где подгруппа π_1 не имеет прямых слагаемых $\mathbb{Z}/2$, а π_2 – элементарная 2-группа. Обозначим через k естественное вложение $\mathbb{Z}/2^- \oplus \pi_1 \rightarrow \pi$, а через k_* – отображение групп Уолла, индуцированное k .

СЛЕДСТВИЕ 3. а) Если группа π_2 не тривиальна, то элементы, лежащие в подгруппе $\text{Im } k_*$ группы $L_{2n+1}(\pi)$, являются элементами второго типа, а элементы, не лежащие в указанном образе, имеют третий тип.

б) Если $\pi_2 = 0$, то все элементы группы $L_{2n+1}(\pi)$ имеют третий тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из результатов [9, § 6] и теоремы 5.

Тривиальность групп LS для геометрической диаграммы (7) интересна также со следующей точки зрения. Рассмотрим естественное отображение

$$\xi_*: \text{LS}_n(\Phi) \rightarrow \text{LN}_n(\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2^- \rightarrow \mathbb{Z}/4^- \oplus \mathbb{Z}/2^-),$$

индуцированное отображением геометрических диаграмм $\Phi \rightarrow \Phi'$. Отображение ξ_* тривиально в размерности 0, а группа LN_0 порождена Арф-инвариантом и изоморфна $\mathbb{Z}/2$. Это означает следующее.

Пусть $X \rightarrow Y$ – вложение замкнутых многообразий, реализующее геометрическую диаграмму Φ (пример 3 легко построить для случая $\partial X = \partial Y = \emptyset$). Проведем внутреннюю перестройку $(Y, X) \rightarrow (Y, X')$ подмногообразия по ручке индекса 2 с меридианом D^2 такую, что для пары $X' \subset Y$ геометрическая диаграмма имеет вид Φ' . Предположим, что $f: M \rightarrow Y$ – простая гомотопическая эквивалентность, не расщепляющаяся вдоль подмногообразия X' . (Препятствие $\sigma(f)$ к расщеплению f лежит в ненулевой группе $\text{LN}_0(\Phi) = \mathbb{Z}/2$.) Одно из следующих трех утверждений истинно.

А) Препятствие $\sigma(f)$ не реализуется при гомотопических эквивалентностях замкнутых многообразий и предположение о существовании f не верно.

В) Гомотопическая эквивалентность f расщепляется вдоль подмногообразия X' , но не расщепляется вдоль системы подмногообразий (X', D^2) , содержащей двумерное подмногообразие с краем – меридианом, приклеиваемой к X ручке.

С) Гомотопическая эквивалентность f не расщепляется вдоль подмногообразия X' (заметим, что группа $LS(\Phi')$ препятствий нулевая), поскольку некоторые достаточные условия для полноты группы препятствий при расщеплении вдоль конкретного подмногообразия (а не классов кобордизма пары многообразий) могут быть не выполнены (см. [3], [14]).

ВОПРОС. Какое из утверждений истинно?

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
22.04.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wall С. Т. С. Surgery on Compact Manifolds. London: London Acad. Press, 1970.
- [2] Ranicki А. А. Exact sequences in the algebraic theory of surgery // Math. Notes. 1981. V. 26.
- [3] Ахметьев П. М. Расщепление гомотопических эквивалентностей вдоль одностороннего подмногообразия коразмерности 1 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. С. 211–241.
- [4] Hambleton I. Projective surgery obstructions on closed manifolds // Lecture Notes. 1982. V. 943. P. 102–131.
- [5] Ranicki А. А. Algebraic L -theory and topological manifolds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
- [6] Харшиладзе А. Ф. Перестройка многообразий с конечными фундаментальными группами // УМН. 1987. Т. 42. С. 55–85.
- [7] Харшиладзе А. Ф. Эрмитова K -теория и квадратичные расширения колец // Тр. ММО. 1980. Т. 41. С. 3–36.
- [8] Ranicki А. А. The L -theory of twisted quadratic extensions. Appendix 4. Preprint: Princeton, 1981.
- [9] Муранов Ю. В., Харшиладзе А. Ф. Группы Браудера–Ливси абелевых 2-групп // Матем. сб. 1990. Т. 181. С. 1061–1098.
- [10] Муранов Ю. В. Естественные отображения относительных групп Уолла // Матем. сб. 1992. Т. 183. С. 39–52.
- [11] Хэмблтон И., Харшиладзе А. Ф. Спектральная последовательность в теории перестроек // Матем. сб. 1992. Т. 183. С. 3–14.
- [12] Hambleton I., Taylor L., Williams B. An Introduction to maps between surgery obstruction groups // Lecture Notes. 1984. V. 1051. P. 49–127.
- [13] Hambleton I., Ranicki А. А., Taylor L. Round L -theory // J. Pure Appl. Algebra. 1987. V. 47. P. 131–154.
- [14] Ахметьев П. М. Задача расщепления гомотопических эквивалентностей. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: МИАН, 1988.
- [15] Харшиладзе А. Ф. Обобщенный инвариант Браудера–Ливси // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. С. 379–401.
- [16] Wall С. Т. С. On the classification of Hermitian forms. VI. Group rings // Ann. of Math. 1976. V. 103. P. 1–80.
- [17] Муранов Ю. В. Препятствия к перестройкам двулистных накрытий // Матем. сб. 1986. Т. 131(173). С. 347–356.