Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. П. Долженко, Замечания о модуле непрерывности конформного отображения круга на жорданову область, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 2, 176–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1817>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:32:12

ЗАМЕЧАНИЯ О МОДУЛЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ КРУГА НА ЖОРДАНОВУ ОБЛАСТЬ

Е. П. Долженко

По теореме Каратеодори всякое конформное отображение $w = f(z)$ единичного круга $D : |z| < 1$ на односвязную область G с жордановой границей ∂G продолжается на замыкание $\overline{D} = D \cup \partial D$ этого круга до гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{G} = G \cup \partial G$. Естественно возникающий при этом вопрос о дифференциально-гладкостных свойствах функции f на границе ∂D круга D и на его замыкание $\overline{D}$ решается, грубо говоря, так: если кривая ∂G имеет некоторую гладкость, то $f(z)$ имеет на ∂D и $\overline{D}$ (а обратная функция $z = f^{-1}(w)$ – на ∂G и $\overline{G}$) гладкость на единицу большую, чем гладкость ∂G . В случае негладкой кривой ∂G становится непонятным, в каких терминах следует искать условия на ∂G для получения положительных заключений о степени гладкости функции f , т.е. о ее принадлежности классу Гёльдера определенного показателя, и более общо – о наличии у f на ∂D и $\overline{D}$ модулей непрерывности $\omega(f, \partial D, \delta)$ и $\omega(f, \overline{D}, \delta)$ определенного порядка малости при $\delta \rightarrow 0$. Отметим здесь, что при этом достаточно говорить лишь о ее модуле непрерывности (или о ее принадлежности классу Гёльдера) лишь на ∂D , так как для любой функции $\varphi(z)$, голоморфной в области G с жордановой границей ∂G и непрерывной на $\overline{G}$, ее модули непрерывности $\omega(\varphi, \partial D, \delta)$ и $\omega(\varphi, \overline{D}, \delta)$ связаны соотношениями (см. [5])

$$\omega(\varphi, \partial D, \delta) \leq \omega(\varphi, \overline{D}, \delta) \leq 108\omega(\varphi, \partial D, \delta) \quad (\delta \geq 0). \quad (*)$$

В случае произвольной ограниченной односвязной области G – при условии $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$ – М. А. Лаврентьев в [2] получил неравенства $\rho(G; f(z), f(t)) \leq C(M) |\log |z - t||^{-1/2}$ ($z, t \in D$) и

$$|f^{-1}(w_1) - f^{-1}(w_2)| \leq K (\rho(G; w_1, w_2))^{1/2} \quad (w_1, w_2 \in G),$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-01-00236, и Международного научного фонда, грант NCF000.

где $M > 0$, $C(M) > 0$ зависит лишь от M , $\sup\{|w| : w \in G\} \leq M$, $K = \text{const} > 0$, $\rho(G; w_1, w_2) = \max\{\rho_1(G; w_1, w_2), \rho_2(G; w_1, w_2)\}$, а $\rho_1(G; w_1, w_2)$ – инфимум длин кривых, соединяющих w_1 и w_2 в G , $\rho_2(G; w_1, w_2)$ – инфимум длин разрезов области G , разбивающих G на две непересекающиеся односвязные области, одна из которых содержит точку 0, другая – точки w_1 и w_2 . Отметим замечательное свойство метрики ρ : для любой ограниченной односвязной области G любое конформное отображение $w = f(z)$ круга D на область G устанавливает гомеоморфное соответствие между $\overline{D}$ и $G \cup \partial^* G$, где $\partial^* G$ – множество каратеодориевых граничных элементов области G (топология на $G \cup \partial^* G$ порождается метрикой $\rho(G; \cdot, \cdot)$). Это эквивалентно тому, что $\rho(G; f(z), f(t)) \rightarrow 0$ при $|z - t| \rightarrow 0$ ($z, t \in D$), т.е. имеет место равномерная непрерывность отображения f относительно ρ -метрики в G . При этом функция $f(z)$, вообще говоря, не продолжима на $\overline{D}$ по непрерывности (в обычном смысле) – такого продолжения нет, если у G имеются недостижимые граничные точки. Отметим также, что, вообще говоря, $\rho(G; w_1, w_2)$ по порядку малости не сравнима с $|w_1 - w_2|$: каждая из этих величин может быть бесконечно большой или малой по сравнению с другой. Все это делает метрику ρ неестественной при изучении модулей непрерывности конформных отображений жордановых областей.

С. Е. Варшавский [3] рассмотрел жордановы области G со спрямляемыми границами $\Gamma = \partial G$, удовлетворяющими условию: длина кратчайшей из дуг кривой Γ , соединяющих любые две точки $w_1, w_2 \in \Gamma$ (эту длину мы будем обозначать $\text{mes}_1(\Gamma; w_1, w_2)$), не превосходит $C|w_1 - w_2|$, где $C = C(\Gamma)$ не зависит от w_1, w_2 ($C \geq 1$). Он показал, что в этом случае $\omega(f, \overline{D}, \delta) \leq B\delta^k$, где $B > 0$ не зависит от $\delta \geq 0$, а $k = 2(1 + C)^{-2}$.

В настоящей заметке за показатель качества жордановой кривой Γ (замкнутой или разомкнутой, с концами или без них, т.е. открытой) принимается скорость убывания к нулю при $\rho \rightarrow 0$ величины

$$d(\Gamma; \rho) = \sup\{d(\Gamma; z, t) : z, t \in \Gamma, |z - t| \leq \rho\} \quad (\rho \geq 0),$$

где $d(\Gamma; z, t)$ – меньший из диаметров дуг кривой Γ , соединяющих z с t (для незамкнутой кривой Γ такая дуга одна). Функция $d(\Gamma; \rho)$ отражает степень колеблемости кривой Γ на плоскости.

Еще одна, родственная для $d(\Gamma; \rho)$, характеристика кривых, но уже для спрямляемых Γ :

$$m(\Gamma; \rho) = \sup\{\text{mes}_1(\Gamma; z, t) : z, t \in \Gamma, |z - t| \leq \rho\} \quad (\rho \geq 0).$$

Очевидно, $m(\Gamma; \rho) \geq d(\Gamma; \rho) \geq \rho$, и если Γ – замкнутая жорданова кривая или жорданова дуга с концами, то $d(\Gamma; \rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Если Γ спрямляема, то $d(\Gamma; \rho) \rightarrow 0$ и $m(\Gamma; \rho) \rightarrow 0$.

Ниже, как обычно, $x = h^{-1}(y)$ обозначает функцию, обратную к функции $y = h(x)$, $\rho(A, B)$ – евклидово расстояние между множествами A и B , могущими вырождаться в точки: $\rho(A, B) = \inf\{|z - t| : z \in A, t \in B\}$.

Если Γ – открытая достижимая жорданова дуга границы односвязной области G , а $w = f(z)$ – некоторое однолистное конформное отображение круга D на эту область, то отображение $z = f^{-1}(w)$ продолжается по непрерывности из G на Γ , а отображение $w = f(z)$ является гомеоморфизмом открытой дуги $\gamma = f^{-1}(\Gamma)$ на дугу Γ и гомеоморфизмом $D \cup \gamma$ на $G \cup \Gamma$. В описанной ситуации всюду ниже считаем функции $f^{-1}(w)$ и $f(z)$ продолженными указанным способом на Γ и γ соответственно.

Ниже функция $g(x)$ непрерывна и не убывает при $x \geq 0$, $g(x) \geq x$, $g(0) = 0$, $\bar{g}(x) := g(x) + x$, $h(x) := (\bar{g}(x^{1/2}))^2$, $H(x)$ – какая-либо первообразная для функции $1/h^{-1}(x)$. Отметим, что на интервале $(0, +\infty)$ $H(x)$ необходимо строго возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. В самом деле, $g(x) \geq x$, $\bar{g}(x) > x$, $h(x) > x$, $h^{-1}(x) < x$ ($x > 0$), так что функция

$$H_0(x) := - \int_x^a \frac{dy}{h^{-1}(y)} \quad (a = \text{const} > 0)$$

на интервале $(0, +\infty)$ строго возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Поскольку все первообразные функции $1/h^{-1}(x)$ отличаются от $H_0(x)$ лишь постоянными слагаемыми, то функция $H^{-1}(x)$ определена, положительная и строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$, $H^{-1}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, $H^{-1}(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Поэтому, в частности, какова бы ни была замкнутая жорданова кривая Γ , при $\delta \searrow 0$ правые части доказываемых ниже неравенств (2)–(5) стремятся к 0, так что эти неравенства информативны всегда.

В принятых обозначениях справедливы следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – ограниченная односвязная область с жордановой границей Γ и выполнено одно из условий:

$$(a) \quad d(\Gamma; \rho) \leq g(\rho) \quad (\rho \geq 0), \quad (b) \quad m(\Gamma; \rho) \leq g(\rho) \quad (\rho \geq 0). \quad (1)$$

Тогда для модуля непрерывности любого конформного отображения $w = f(z)$ круга D на область G имеем неравенство

$$\omega(f, \bar{D}, \delta) \leq C(f) g \left(\left\{ \frac{1}{\lambda} H^{-1}(\lambda \log \delta) \right\}^{1/2} \right) \quad (\delta > 0), \quad (2)$$

где $C(f)$ не зависит от δ , $\lambda = 4\pi^{-2}$ в случае (1a) и $\lambda = 4$ в случае (1b).

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – односвязная область, Γ – открытая достижимая жорданова дуга границы ∂G этой области, $\Gamma \neq \partial G$, и выполняется одно из условий (1). Тогда если $w = f(z)$ – конформное отображение круга D на область G , $\gamma = f^{-1}(\Gamma)$ и σ – замкнутая поддуга дуги γ , то

$$\omega(f, \Delta, \delta) \leq A(f)g\left(\left\{\frac{1}{\lambda}H^{-1}(\lambda \log \delta)\right\}^{1/2}\right) \quad (\delta > 0), \quad (3)$$

где Δ – замыкание объединения сектора и сегмента с дугой σ , $A(f)$ не зависит от δ , а $\lambda = 4\pi^{-2}$ в случае (1a) и $\lambda = 4$ в случае (1b).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Введем дополнительные обозначения. Будем считать $a = 2$ при доказательстве теоремы 1 и $a = \rho(\sigma, \partial D \setminus \gamma)$ – при доказательстве теоремы 2. Пусть $p \in (0, a)$ и $t \in \partial D$, $\sigma_p(t) := \{z : |z| = 1, |z - t| \leq p\}$, $\Sigma_p(t) := f(\sigma_p(t))$, $K_p(t) := \{z : |z| \leq 1, |z - t| = p\}$, $L_p(t) := f(K_p(t))$, $L_p(t) := \text{mes}_1 L_p(t)$, $\Delta_p(t) := \{z : |z| < 1, |z - t| < p\}$, $S_p(t) := \text{mes}_2 f(\Delta_p(t))$. При условиях теоремы 1 через d обозначим максимум таких чисел d' , что $\text{diam } \Sigma_r(t) \leq \text{diam } (\Gamma \setminus \Sigma_r(t))$ при любом $t \in \partial D$ и $r \in (0, d']$ ($d = d(f)$), а при условиях теоремы 2 положим $d = a/2$ ($d = d(\sigma)$). Пусть $t \in \partial D$ в случае теоремы 1, $t \in \sigma$ в случае теоремы 2.

2°. Подобно [3] будем оценивать интеграл

$$F(r) := \int_0^r \frac{1}{p} l_p^2 dp \quad (r \in (0, d]), \quad (4)$$

где $l_p = l_p(t)$. Для любого $p \in (0, d]$ имеем по неравенству Коши

$$l_p^2 = \left(\int_{K_p} |f'(z)| |dz| \right)^2 \leq \left(\int_{K_p} |f'(z)|^2 |dz| \right) \text{mes}_1 K_p(t).$$

Так как $\text{mes}_1 K_p(t) < \pi p$, то отсюда при $0 < r \leq d$ получаем неравенство

$$F(r) \leq \pi \int_0^r dp \int_{K_p} |f'(z)|^2 |dz| = \pi S_r(r) \quad (\leq \pi \text{mes}_2 G). \quad (5)$$

Из него, в частности, следует, что $F(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$.

Оценим диаметр множества $f(\Delta_r(t))$ при условии $r \leq d$. Если τ_r' и τ_r'' – общие концы дуг $\Sigma_r(t)$ и $L_r(t)$, то

$$\begin{aligned} \text{diam } f(\Delta_r(t)) &\leq \text{diam } \Sigma_r(t) + \text{diam } L_r(t) \\ &\leq g(|\tau_r' - \tau_r''|) + l_r \leq g(l_r) + l_r = \bar{g}(l_r). \end{aligned} \quad (6)$$

Так как среди всех измеримых (по Лебегу) множеств диаметра b на плоскости наибольшую площадь, равную $\frac{\pi}{4}b^2$, имеет круг ([4]), то

$$\begin{aligned} F(r) &\leq \pi S_r(t) \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \{\text{diam } f(\Delta_r(t))\}^2 \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 (\bar{g}(l_r))^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 h(l_r^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку $F'(r) = l_r^2/r$, то $l_r^2 = rF'(r)$, и $\lambda F(r) \leq h(rF'(r))$, где $\lambda = (2/\pi)^2$. Отсюда $h^{-1}(\lambda F(r)) \leq rF'(r)$, $\lambda F'(r)/h^{-1}(\lambda F(r)) \geq \lambda/r$,

$$\left\{ - \int_{\lambda F(r)}^{\lambda F(d)} (h^{-1}(x))^{-1} dx + \lambda \log \left(\frac{d}{r} \right) \right\}' \geq 0 \quad (0 < r \leq d).$$

Ввиду возрастания на $(0, d]$ функции в фигурных скобках и равенства ее нулю при $r = d$ имеем ее неположительность $(0, d]$ и неравенства

$$\begin{aligned} H(\lambda F(r)) &\leq H(\lambda F(d)) - \lambda \log d + \lambda \log r, \\ F(r) &\leq H^{-1} \frac{C' - \lambda + \lambda \log r}{\lambda}, \quad C' = H(\lambda F(d)) + \lambda(1 - \log d). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что для любого $r \in (0, d]$ существует такое $s \in [r/e, r]$, что $l_s \leq l_p$ при всех $p \in [r/e, r]$, так что (см. (4))

$$\begin{aligned} l_s^2 \log e &\leq \int_{r/e}^r \frac{1}{p} l_p^2 dp \leq F(r) \leq H^{-1} \frac{C' - \lambda + \lambda \log r}{\lambda}, \\ l_s &\leq \left\{ H^{-1} \frac{C' + \lambda \log(r/e)}{\lambda} \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Поэтому при $\varepsilon := d/e$, $|t| = 1$, $|z| \leq 1$ и $|z - t| = r/e \leq \varepsilon$ имеем (см. (6))

$$\begin{aligned} |f(z) - f(t)| &\leq \text{diam } f(\Delta_s(t)) \leq \bar{g}(l_s) \\ &\leq \bar{g} \left(\left\{ H^{-1} \frac{C' + \lambda \log |z - t|}{\lambda} \right\}^{1/2} \right), \\ |f(z) - f(t)| &\leq 2g \left(\left\{ H^{-1} \frac{C' + \lambda \log |z - t|}{\lambda} \right\}^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

3°. Доказываем теорему 1.

Если при условиях теоремы 1 имеем $z, t \in \overline{D}$, $|z - t| \leq \varepsilon = d/e$, то, полагая $u = t - z$ и рассматривая функцию $\varphi(\zeta) = f(\zeta + u) - f(\zeta)$ в замкнутой области $\{\zeta : |\zeta| \leq 1, |\zeta + u| \leq 1\}$, на основании принципа

максимума заключаем, что если $|f(z) - f(t)|$ при фиксированной разности $z - t$ достигает при $z, t \in \overline{D}$ максимума, то хотя бы одна из точек z, t лежит на ∂D . Поэтому из (8) получаем при $q := \exp\{C'/\lambda\}$ и $\delta \leq d/e$:

$$\omega(f, \overline{D}, \delta) \leq 2g\left(\left\{H^{-1} \frac{\lambda \log(q\delta)}{\lambda}\right\}^{1/2}\right) =: S(\lambda, \delta). \quad (9)$$

Так как (ввиду выпуклости $\overline{D}$) $\omega(f, \overline{D}, k\delta) \leq (k+1)\omega(f, \overline{D}, \delta)$ при любом $k > 0$, то при $0 < \delta \leq 2$ и $q \geq 1$ имеем $\delta d/(2qe) \leq d/e$,

$$\begin{aligned} \omega(f, \overline{D}, \delta) &\leq \left(1 + 2q \frac{e}{d}\right) \omega\left(f, \overline{D}, \frac{\delta d}{2qe}\right) \\ &\leq 2 \left(1 + 2q \frac{e}{d}\right) g\left(\left\{H^{-1} \frac{\lambda \log \delta d/(2e)}{\lambda}\right\}^{1/2}\right) \\ &\leq 2 \left(1 + 2q \frac{e}{d}\right) S(\lambda; \delta). \end{aligned}$$

Если же $0 < \delta \leq 2$ и $q < 1$, то $\delta d/(2e) \leq d/e$, $q\delta < \delta$ и

$$\omega(f, \overline{D}, \delta) \leq \left(1 + 2 \frac{e}{d}\right) \omega\left(f, \overline{D}, \frac{\delta d}{2e}\right) \leq 2 \left(1 + 2 \frac{e}{d}\right) g\left(\left\{H^{-1} \frac{\lambda \log \delta}{\lambda}\right\}^{1/2}\right).$$

Неравенство (2) доказано для случая (1a). В случае (1b) для его доказательства нужно через d обозначить максимум таких чисел d' , что $\text{mes}_1 L_r(t) \leq \text{mes}_1 (\Gamma \setminus L_r(t))$ при любых $t \in \Gamma$ и $r \in (0, d']$, а вместо неравенств (6) и (7) воспользоваться (при $r \in (0, d]$) неравенствами

$$\text{mes}_1 \partial f(\Delta_r(t)) \leq \text{mes}_1 \Sigma_r(t) + \text{mes}_1 L_r(t) \leq g(|\tau'_r - \tau''_r|) + l_r \leq \overline{g}(l_r), \quad (6')$$

$$F(r) \leq \pi S_r \leq \pi \cdot \pi \left(\frac{\text{mes}_1 \partial f(\Delta_r(t))}{2\pi} \right)^2 \leq \frac{1}{4} (\overline{g}(l_r))^2 = \frac{1}{4} h(l_r^2). \quad (7')$$

(в последнем неравенстве использовано то, что среди всех фигур периметра P наибольшую площадь, равную $\pi(P/(2\pi))^2$, имеет круг).

4°. Доказываем теорему 2.

Из (8) (при условии (1a) или (1b)) рассуждениями, подобными только что приведенным, получаем при всех $\delta > 0$ неравенство

$$\omega(f, \sigma, \delta) \leq A(f, \sigma) S(\lambda; \delta) \quad (\delta > 0) \quad (10)$$

(см. (9)). Если σ' — некоторая замкнутая поддуга дуги γ , содержащая σ строго внутри себя, то $\omega(f, \sigma', \delta) \leq A(f, \sigma') S(\lambda; \delta)$ ($\delta > 0$).

Рассмотрим сначала случай $\text{mes}_1 \sigma < \pi$. Тогда Δ – сектор с дугой σ . Пусть выполнено условие (1а).

Прежде всего оценим снизу $S(\lambda; \delta)$ (см. (9)). Так как

$$g(x) \geq x, \quad h(x) \geq 4x, \quad \frac{1}{h^{-1}(x)} \geq \frac{4}{x},$$

$$H(x) \leq 4 \log \frac{x}{C} \quad (C = \text{const} > 0, \quad x > 0), \quad H^{-1}(x) \geq C \exp \frac{x}{4},$$

то

$$S(\lambda; \delta) \geq 2 \left(\frac{C}{\lambda} \right)^{1/2} \delta^q, \quad q = \frac{1}{2\pi^2} < \frac{1}{19} \quad (\delta > 0).$$

Теперь на выбор σ' дополнительно наложим условие $\text{mes}_1 \sigma' < \pi$, через Δ' обозначим сектор с дугой σ' . Замыкание разности $\Delta' \setminus \Delta$ представляет собой объединение пары секторов – Δ_1 и Δ_2 – с единственной общей точкой $z = 0$. Так как $f(\Delta_1)$ и $f(\Delta_2)$ имеют конечные площади, то

$$\iint_{\Delta_j} |f'(re^{is})|^2 r \, dr \, ds < \infty \quad (j = 1, 2),$$

и $\int_0^1 |f'(re^{is})|^2 dr$ конечен при почти каждом $e^{is} \in \Delta_1 \cup \Delta_2$. Если точки z и t лежат на радиусе $R(s)$ с таким концом e^{is} , то (по неравенству Коши)

$$|f(z) - f(t)| \leq \int_{R(s)} |f'(\zeta)| |d\zeta| \leq \left(\int_0^1 |f'(re^{is})|^2 dr \right)^{1/2} |z - t|^{1/2}.$$

Это же означает, что на таком радиусе имеем $\omega(f, R(s), \delta) = O(\delta^{1/2})$. Возьмем два таких радиуса $R(s_1) \in \Delta_1$, $R(s_2) \in \Delta_2$ и обозначим через Δ'' сектор, ограниченный этими радиусами и содержащийся в Δ' . На дуге $\sigma'' = \partial D \cap \partial \Delta'' \subset \sigma'$ имеем $\omega(f, \sigma'', \delta) \leq A(f, \sigma'') S(\lambda; \delta)$ (см. (10); $\delta > 0$). При этом

$$\omega(f, D \cap \partial \Delta'', \delta) = O(\delta^{1/2}) = o(\delta^{1/19}) = o(S(\lambda; \delta)) \quad (\delta \rightarrow 0).$$

Отсюда и из (*)

$$\begin{aligned} \omega(f, \partial \Delta'', \delta) &= O(S(\lambda; \delta)), \\ \omega(f, \Delta, \delta) &= O(\omega(f, \Delta'', \delta)) = O(S(\lambda; \delta)) \quad (\delta \rightarrow 0), \end{aligned}$$

так что (3) доказано для случая (1а).

Пусть теперь выполнено условие (1b). Из неравенства (9) применительно к этому случаю (т.е. при $\lambda = 4$) получаем в принятых обозначениях как и выше (см. конец п. 3°) неравенство

$$\omega(f, \sigma', \delta) \leq A_1(f, \sigma') S(\lambda; \delta) \quad (\delta > 0).$$

Заметим, что в случае (1b) дуга Γ спрямляема, и поэтому $f(z)$ абсолютно непрерывна на γ , а $f'(z)$ имеет конечный граничный предел по некасательным путям почти в каждой точке $t \in \gamma$ (см., например, [5, гл. III, § 11]). Поэтому найдутся радиусы $R(s_1) \in \Delta_1$ и $R(s_2) \in \Delta_2$, ограничивающие сектор $\Delta'' \subset \Delta'$, на которых функция $f'(z)$ имеет конечные граничные пределы, и значит, ограничена, так что

$$\omega(f, \sigma'' = \partial D \cap \partial \Delta'', \delta) = O(\delta).$$

Поскольку $f(z)$ непостоянна на σ'' , то $\omega(f, \sigma'', \delta) \geq J\delta$ ($J = \text{const} > 0$, $0 \leq \delta \leq 2$), и поэтому

$$\omega(f, \partial \Delta'', \delta) = O(\omega(f, \sigma'', \delta)) = O(S(\lambda, \delta)),$$

что (по (*)) эквивалентно неравенству (3).

Случай $\text{mes}_1 \sigma \geq \pi$ исчерпывается аналогично. В этом случае Δ – сегмент с дугой σ . На дугу σ' дополнительно наложим условие: дуги, на которые распадается разность $\sigma' \setminus \sigma$, имеют одинаковую длину. Теперь $\Delta' –$ сегмент с дугой σ' . Вместо пары секторов Δ_1 и Δ_2 рассматриваем криволинейную трапецию $\Delta_0 = \Delta' \setminus \Delta$, а вместо радиусов $R(s) = [0, e^{is}]$ – хорды $N(s)$ с концами $e^{is} \in \sigma' \setminus \sigma$ соответственно, параллельные хорде сегмента Δ . В случае (1a) рассуждаем так: поскольку $\text{mes}_2 f(\Delta_0) < \infty$, то

$$\int_{N(s)} |f'(z)|^2 |dz| < \infty$$

для некоторой хорды $N(s'') \subset \Delta_0$, $\omega(f, N(s''), \delta) = O(\delta^{1/2})$. Через Δ'' обозначим сегмент с хордой $N(s'')$, через σ'' – его дугу ($\sigma \subset \sigma'' \subset \sigma'$) и т.д. В случае же (1b) находим хорду $N(s'') \subset \Delta_0$, на которой $f'(z)$ ограничена, и т.д.

Отметим два следствия из теоремы 1.

Как известно [6, гл. 4, теорема 5], квазиконформная кривая L (образ окружности или отрезка при однолистом квазиконформном отображении плоскости на себя) характеризуется свойством, эквивалентным тому, что $d(\Gamma; z, t) \leq Q|z - t|$ для любых $z, t \in L$, где $Q = \text{const} \geq 1$. Полагая $g(x) = Qx$, имеем следствие из теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если область G ограничена замкнутой квазиконформной кривой Γ , то конформное отображение $w = f(z)$ круга D на область G удовлетворяет на замкнутом круге $\overline{D}$ условию Гёльдера с некоторым показателем $k > 0$. Точнее, если $d(\Gamma; z, t) \leq Q|z - t|$ при всех $z, t \in \Gamma$ ($Q = \text{const}$), то $\omega(f, \overline{D}, \delta) \leq A\delta^k$, где $A = A(f)$, $k = \frac{1}{8}\pi^2(Q + 1)^{-2}$.

С другим k этот результат следует из теоремы Альфорса о квазиконформном отражении ([6, гл. IV, начало п. D]) и теоремы Мори ([6, гл. III, п. C]), на что мое внимание обратил В. А. Зорич. Действительно, если Γ – образ окружности $|z| = 1$ при K -квазиконформном отображении $w = \varphi(z)$, то f продолжается из D на плоскость $\mathbb{C}$ до K^2 -квазиконформного автоморфизма $\mathbb{C}$, так что по теореме Мори $\omega(f, \overline{D}, \delta) = O(\delta^k)$, $k = K^{-2}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если область G ограничена замкнутой жордановой кривой Γ , для которой $d(\Gamma; z, t) \leq Q|z - t|^r$ при любых $z, t \in \Gamma$, где $Q = \text{const}$, $0 < r = \text{const} < 1$, то для всякого конформного отображения $w = f(z)$ круга D на область G имеем неравенство

$$\omega(f, \overline{D}, \delta) \leq N(f) \cdot |\log \delta|^{-v}, \quad v = \frac{1}{2}r^2(1 - r)^{-1} \quad (0 < \delta < 1).$$

В заключение хочу выразить благодарность моему ученику А. Добрянскому за помощь при подготовке этой статьи к печати.

Результаты работы частично анонсированы в [7].

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
09.03.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Тамразов П. М. Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного // УМН. 1973. Т. 28. № 1. С. 131–161.
- [2] Лаврентьев М. А. О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях // Докл. АН СССР. 1936. Т. 4. № 5. С. 207–209.
- [3] Warschawski S. E. On differentiability at the boundary in conformal mapping // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. № 4. P. 615–620.
- [4] Урысон П. С. Зависимость между средней шириной и объемом выпуклых тел в n -мерном пространстве // Матем. сб. 1924. Т. 31. С. 477–486.
- [5] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
- [6] Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.
- [7] Долженко Е. П. О граничном поведении конформных отображений круга на жорданову область // Тезисы докладов школы-конференции “Теория функций и ее приложения”. Казань: Казанский фонд “Математика”, 1995. С. 24–27.