Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Зайцева, А. А. Злотник, Оптимальные оценки погрешности одного локально-одномерного метода для многомерного уравнения теплопроводности, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 2, 185–197

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1818>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 07:34:21

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ОДНОГО ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНОГО МЕТОДА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

С. Б. Зайцева, А. А. Злотник

Экономичные методы являются важным аппаратом решения многомерных задач математической физики. Им посвящена обширная литература [1]–[4]. Доказана оптимальность некоторых экономичных методов для решения параболических задач [5]–[8], что вызывает дополнительный интерес к этим методам. С развитием архитектуры ЭВМ большое внимание стало уделяться методам, допускающим эффективное распараллеливание; в связи с экономичными методами см., в частности, [9]. Среди экономичных методов в этом плане выделяются локально-одномерные методы с распараллеливанием, см. о них [10], [11]. В них связанные с каждым из координатных направлений вспомогательные шаги, необходимые при переходе со слоя на слой, можно выполнять независимо. В [12], [13] получен набор оценок погрешности такого метода для параболических задач, однако оптимальных оценок типа [14], [7], [8] установить не удалось.

В настоящей работе для случая многомерного уравнения теплопроводности в параллелепипеде выведены оптимальные оценки погрешности в $L_2(Q)$ как порядка $O(\tau + |h|^2)$ при правой части $f \in L_2(Q)$ (и начальной функции $u_0 \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$), так и порядка $O((\tau + |h|^2)^\gamma)$, $1/2 \leq \gamma < 1$, на соответствующих классах менее регулярных f (и u_0). Это сделано при помощи методики из [8].

1. Локально-одномерный метод с распараллеливанием. Формулировка оценок погрешности. Рассмотрим первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$D_t u - a^2 \sum_{i=1}^n D_i^2 u = f(x, t) \quad \text{в } Q = \Omega \times (0, T), \quad (1.1)$$

$$u|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x) \quad \text{на } \Omega, \quad (1.2)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 2$, $\Omega = (0, X_1) \times \dots \times (0, X_n)$ – параллелепипед, $\partial\Omega$ – его граница, а $D_t = \partial/\partial t$, $D_i = \partial/\partial x_i$. Пусть ниже $f = \sum_{i=1}^n f_{(i)}$, а $a = 1$ (что не ограничивает общности).

Введем некоторые обозначения. Положим $h = (h_1, \dots, h_n) = h_1\chi_1 + \dots + h_n\chi_n$, где $h_1 = X_1/N_1, \dots, h_n = X_n/N_n$, а $\chi_1, \dots, \chi_n$ – координатный базис в $\mathbb{R}^n$. Пусть $|h|$ – длина h . Введем в $\overline{\Omega}$ равномерную сетку $\overline{\omega}^h$ с узлами $x_{\mathbf{k}} = (k_1 h_1, \dots, k_n h_n)$, где $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ и $k_1 = \overline{0, N_1}, \dots, k_n = \overline{0, N_n}$. Пусть $\omega^h = \overline{\omega}^h \cap \Omega$, а $\partial\omega^h = \overline{\omega}^h \cap \partial\Omega$. Через S_h обозначим пространство функций, заданных на сетке ω^h и доопределенных нулем на $\partial\omega^h$.

Введем разностные операторы

$$\delta_i \varphi_{\mathbf{k}} = \frac{\varphi_{\mathbf{k}+1/2\chi_i} - \varphi_{\mathbf{k}-1/2\chi_i}}{h_i}, \quad \delta_i^2 \varphi_{\mathbf{k}} = \frac{\varphi_{\mathbf{k}+\chi_i} - 2\varphi_{\mathbf{k}} + \varphi_{\mathbf{k}-\chi_i}}{h_i^2},$$

где, например, $\varphi_{\mathbf{k}} = \varphi(x_{\mathbf{k}})$. Для $\omega \in L_1(\Omega)$ определим усреднения

$$\omega_{\mathbf{k}}^h = \int_{\Pi_h} \omega(x_{\mathbf{k}} + \xi) \prod_{j=1}^n h_j^{-1} (1 - h_j^{-1} |\xi_j|) d\xi,$$

$$\omega_{\mathbf{k}+1/2\chi_i}^{h, \langle i \rangle} = \int_{\Pi_h^{(i)}} \omega(x_{\mathbf{k}} + \xi) h_i^{-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n h_j^{-1} (1 - h_j^{-1} |\xi_j|) d\xi,$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\Pi_h = [-h_1, h_1] \times \dots \times [-h_n, h_n]$, $\Pi_h^{(i)} = \{\xi \in \Pi_h \mid \xi_i > 0\}$. Пусть $(D_i \omega)^h = \delta_i \omega^{h, \langle i \rangle}$.

Положим также $\tau = T/M$ и введем на $[0, T]$ равномерную сетку $\overline{\omega}^\tau$ с узлами $t_m = m\tau$, где $m = \overline{0, M}$. Пусть $\omega^\tau = \overline{\omega}^\tau \setminus \{0\}$. Через $S_{h, \tau}$ обозначим пространство функций, заданных на сетке $\omega^h \times \overline{\omega}^\tau$ и доопределенных нулем на $\partial\omega^h \times \overline{\omega}^\tau$. Введем операторы: $\overline{\partial}_t \eta_m = (\eta_m - \eta_{m-1})/\tau$, $\tilde{\eta}_m = \eta_{m-1}$, $I_\tau^m \eta = \sum_{l=1}^m \eta_l \tau$, где $\eta_m = \eta(t_m)$. Для $g \in L_1(0, T)$ определим усреднение $g_\tau^m = \tau^{-1} \int_0^\tau g(t_{m-1} + \theta) d\theta$.

Опишем локально-одномерный метод с распараллеливанием для задачи (1.1), (1.2). Пусть приближенное решение y (определенное на сетке $\overline{\omega}^h \times \overline{\omega}^\tau$) и вспомогательные функции $y_{(i)}$ (определенные на сетке $\overline{\omega}^h \times \omega^\tau$) удовлетворяют для $m = \overline{1, M}$ уравнениям

$$\alpha_i \frac{y_{(i)m} - y_{m-1}}{\tau} - \delta_i^2 y_{(i)m} = f_{(i)m}^{h, \tau} \quad \text{на } \omega^h, \quad (1.3a)$$

$$y_{(i)m} \big|_{\partial\omega^h} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.3b)$$

$$y_m = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{(i)m}, \quad (1.4)$$

$$y_0 = u_0^h. \quad (1.5)$$

Здесь $\alpha_i > 0$ – постоянные, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, а $f_{(i)}^{h,\tau} = (f_{(i)}^h)^\tau$.

Введем пространство $S^{(1)}$ полилинейных восполнений функций из S_h , т.е. непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций, равных 0 на $\partial\Omega$ и линейных по x_i на каждом сегменте $[(l-1)h_i, lh_i]$, $l = \overline{1, N_i}$ (при фиксированных значениях остальных переменных) для всех $i = \overline{1, n}$. Введем также пространство S восполнений функций из $S_{h,\tau}$, принадлежащих $S^{(1)}$ при $t = t_m$, $m = \overline{0, M}$, и постоянных по t на каждом полусегменте $(t_{m-1}, t_m]$, $m = \overline{1, M}$. Будем считать, что $y \in S$.

Будем использовать анизотропные пространства Лебега $L_{2,q}(Q)$ ($1 \leq q \leq \infty$) и Соболева $W_2^{\chi_i,0}(Q)$ ($i = \overline{1, n}$) с нормами

$$\|\cdot\|_{L_{2,q}(Q)} = \|\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}\|_{L_q(0,T)}, \quad \|\cdot\|_{W_2^{\chi_i,0}(Q)} = \|\cdot\|_{L_2(Q)} + \|D_i \cdot\|_{L_2(Q)}.$$

Пусть, как обычно, $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) = \{w \in L_2(\Omega) \mid D_i w \in L_2(\Omega) \ (i = \overline{1, n}), w|_{\partial\Omega} = 0\}$ и $\|\cdot\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)} = \| |D \cdot| \|_{L_2(\Omega)}$, где $D = (D_1, \dots, D_n)$.

Введем также пространства $H_2^{\lambda\chi_i,0}(Q) = (L_2(Q), W_2^{\chi_i,0}(Q))_{\lambda,\infty}$ и $\overset{\circ}{H}_2^\lambda(Q) = (L_2(\Omega), \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))_{\lambda,\infty}$, где $0 < \lambda < 1$, при помощи $K_{\lambda,\theta}$ – метода вещественной интерполяции пространств [15]. Как известно, $H_2^{\lambda\chi_i,0}(Q)$ совпадает (с точностью до эквивалентности норм) с пространством С.М. Никольского функций из $L_2(Q)$, удовлетворяющих по переменной x_i условию Гёльдера порядка λ в норме $L_2(Q)$, а $\overset{\circ}{H}_2^\lambda(\Omega)$ тесно связано с пространством С.М. Никольского $H_2^\lambda(\Omega)$ функций из $L_2(\Omega)$, удовлетворяющих по переменным $x_1, \dots, x_n$ условию Гёльдера порядка λ в норме $L_2(\Omega)$. А именно, $\overset{\circ}{H}_2^\lambda(\Omega)$ совпадает с $H_2^\lambda(\Omega)$ при $0 < \lambda < 1/2$, с $\{w \in L_2(\Omega) \mid \tilde{w} \in H_2^{1/2}(\tilde{\Omega})\}$ при $\lambda = 1/2$, с $\{w \in H_2^\lambda(\Omega) \mid w|_{\partial\Omega} = 0\}$ при $1/2 < \lambda < 1$. Здесь $\tilde{w}(x)$ – нечетное по $x_1, \dots, x_n$ продолжение $w(x)$ с Ω на $\tilde{\Omega} = (-X_1, 2X_1) \times \dots \times (-X_n, 2X_n)$. Отметим, что заведомо $H_2^{1/2}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) \subset \overset{\circ}{H}_2^{1/2}(\Omega)$.

ТЕОРЕМА. *Верна оценка погрешности*

$$\|u - y\|_{L_2(Q)} \leq c(\tau + |h|^2) \left(\sum_{i=1}^n \|f_{(i)}\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)} \right). \quad (1.6)$$

При $f_{(i)} = f_{(i)}^{(1)} + D_i F_i$ верна оценка погрешности

$$\|u - y\|_{L_2(Q)} \leq c(\tau^{1/2} + |h|) \left(\sum_{i=1}^n \|f_{(i)}^{(1)}\|_{L_{2,1}(Q)} + \|F_i\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \right), \quad (1.7)$$

а также оценка ($0 < \lambda < 1$)

$$\begin{aligned} \|u - y\|_{L_2(Q)} &\leq c(\tau + |h|^2)^{(\lambda+1)/2} \left(\sum_{i=1}^n \|f_{(i)}^{(1)}\|_{L_{2,2/(2-\lambda)}(Q)} \right. \\ &\quad \left. + \|F_i\|_{H_2^{\lambda \chi_i, 0}(Q)} + \|u_0\|_{H_2^{\lambda}(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь и ниже постоянные c могут зависеть лишь от n и

$$\underline{\alpha} = \min_{1 \leq i \leq n} \alpha_i.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $f_{(i)}(x, t) = w_i(x)\delta(t - \theta)$, где δ – дельта-функция, $\theta \in (0, T)$, что соответствует мгновенно (в момент $t = \theta$) действующему источнику тепла. Положим $f_{(i)m}^{h, \tau} = \frac{1}{\tau} w_i^h$, если $\theta \in (t_{m-1}, t_m]$, и $f_{(i)m}^{h, \tau} = 0$ для остальных $m = \overline{1, M}$. Как и в [8, следствие теоремы 2.2.2] из оценки (1.7) вытекает (посредством предельного перехода) оценка погрешности

$$\|u - y\|_{L_2(Q)} \leq c(\tau^{1/2} + |h|) \left(\sum_{i=1}^n \|w_i\|_{L_2(\Omega)} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $\lambda = 1/2$ оценка (1.8) охватывает широкое семейство δ -образных функций $f(x, t)$, сосредоточенных при каждом $t \in (0, T)$ на некоторых $(n - 1)$ -мерных подмножествах Ω (зависящих от t), а также весьма широкий класс разрывных функций u_0 , ср. с [7], [8].

Отметим, что в [8] оценки погрешности типа (1.6)–(1.8) были установлены для различных РС (разностных схем), включая стандартный – последовательный – локально-одномерный метод

$$\begin{aligned} \frac{y_{(i)m} - y_{(i-1)m}}{\tau} - \delta_i^2 y_{(i)m} &= f_{(i)m}^{h, \tau} \quad \text{на } \omega^h, \\ y_{(i)m}|_{\partial\omega_h} &= 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ y_{(0)m} &= y_{m-1}, \quad y_{(n)m} = y_m, \\ y_0 &= u_0^h. \end{aligned}$$

2. Доказательство оценок погрешности. Введем в пространстве S_h скалярное произведение и норму

$$(\varphi, \psi)_h = \sum_{k_1=1}^{N_1-1} \cdots \sum_{k_n=1}^{N_n-1} \varphi_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}} h_1 \cdots h_n, \quad \|\varphi\|_h = (\varphi, \varphi)_h^{1/2}.$$

Положим также

$$(\eta, \zeta)_{h, \tau} = \sum_{m=1}^M (\eta_m, \zeta_m)_{h, \tau}, \quad \|\eta\|_{h, \tau} = (\eta, \eta)_{h, \tau}^{1/2}.$$

Введем класс $\mathcal{S}[S_h]$ самосопряженных положительно определенных операторов, действующих в S_h . Пусть, в частности, E – единичный оператор, а Λ_i – оператор, отвечающий разностному оператору $(-\delta_i^2)$, и пусть $\Lambda_d = \sum_{i=1}^n \Lambda_i$.

Выполним в изучаемой РС исключение вспомогательных функций $y_{(i)}$. Для этого перепишем уравнения (1.3) в операторном виде (опустив индекс m)

$$(E + \tau \varkappa_i \Lambda_i) \alpha_i y_{(i)} = \alpha_i \check{y} + \tau f_{(i)}^{h, \tau}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

где $\varkappa_i = 1/\alpha_i$.

Введем расщепляющиеся операторы

$$\overline{E} = \prod_{i=1}^n (E + \tau \varkappa_i \Lambda_i), \quad \overline{E}_{\langle i \rangle} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (E + \tau \varkappa_j \Lambda_j).$$

Применим к уравнениям (2.1) операторы $\overline{E}_{\langle i \rangle}$, просуммируем результаты по $i = \overline{1, n}$ и с учетом равенства (1.4) выведем уравнение

$$\overline{E} y = \sum_{i=1}^n \overline{E}_{\langle i \rangle} (\alpha_i \check{y} + \tau f_{(i)}^{h, \tau}).$$

Перейдем к канонической форме записи, удобной для анализа РС первого по τ порядка аппроксимации (отметим, что она отлична от принятой в [3]), вспомним начальное условие (1.5) и окончательно получим уравнения

$$\widehat{B} \overline{\partial}_t y + \widehat{A} y = \sum_{i=1}^n \overline{E}_{\langle i \rangle} f_{(i)}^{h, \tau}, \quad y_0 = u_0^h. \quad (2.2)$$

Здесь

$$\widehat{B} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{E}_{\langle i \rangle}, \quad \widehat{A} = \sum_{i=1}^n \Lambda_i \overline{E}_{\langle i \rangle};$$

использованы формулы $\widehat{A} = \frac{1}{\tau} (\overline{E} - \widehat{B})$ и

$$\overline{E} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (E + \tau \varkappa_i \Lambda_i) \overline{E}_{\langle i \rangle} = \widehat{B} + \tau \sum_{i=1}^n \Lambda_i \overline{E}_{\langle i \rangle}.$$

Введем операторы

$$B = \prod_{i=1}^n B_i, \quad B_{\langle i \rangle} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n B_j, \quad \Lambda = \sum_{i=1}^n B_{\langle i \rangle} \Lambda_i,$$

где B_i – операторы усреднения: $B_i \varphi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{6} \varphi_{\mathbf{k}+\chi_i} + \frac{2}{3} \varphi_{\mathbf{k}} + \frac{1}{6} \varphi_{\mathbf{k}-\chi_i}$.

Введем также операторы $R_B = \widehat{B} - E$, $R_A = \widehat{A} - \Lambda_d$, $\dot{\Lambda}_E = \frac{1}{\tau}(\overline{E} - E)$. Нетрудно видеть, что

$$R_B = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overline{E}_{\langle i \rangle} - E), \quad R_A = \sum_{i=1}^n \Lambda_i (\overline{E}_{\langle i \rangle} - E), \quad (2.3)$$

$$\dot{\Lambda}_E = \sum_{k=1}^n \tau^{k-1} \dot{\Lambda}_E^{(k)}, \quad \text{где} \quad \dot{\Lambda}_E^{(k)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \prod_{l=1}^k \varkappa_{i_l} \Lambda_{i_l}. \quad (2.4)$$

Последняя формула представляет собой разложение $\dot{\Lambda}_E$ по степеням τ .

Укажем некоторые неравенства между введенными операторами. Положим

$$\overline{\alpha} = \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i.$$

ЛЕММА 1. *Справедливы операторные неравенства*

$$E - B \leq \frac{1}{6} |h|^2 \Lambda_d, \quad \Lambda_d - \Lambda \leq \frac{1}{6} |h|^2 \Lambda_d^2, \quad (2.5)$$

$$\widehat{A} \leq \Lambda_d \overline{E}, \quad \widehat{B} \leq \overline{E}, \quad (2.6)$$

$$\widehat{A} \leq \underline{\alpha}^{-1} \Lambda_d \widehat{B}, \quad (2.7)$$

$$\underline{\alpha} \dot{\Lambda}_E \leq \widehat{A} \leq n \overline{\alpha} \dot{\Lambda}_E, \quad (2.8)$$

$$\dot{\Lambda}_E \leq \underline{\alpha}^{-1} \Lambda_d \overline{E}, \quad (2.9)$$

$$\overline{E}_{\langle i \rangle} - E \leq \underline{\alpha}^{-1} \tau \widehat{A}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.10)$$

$$R_B \leq \underline{\alpha}^{-1} \tau \Lambda_d \widehat{B}, \quad R_A \leq \underline{\alpha}^{-1} \tau \Lambda_d \widehat{A}. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $B_i = E - \frac{1}{6} h_i^2 \Lambda_i \leq E$ и

$$E - \prod_{i=1}^k B_i = \frac{1}{6} h_k^2 \Lambda_k + B_k \left(E - \prod_{i=1}^{k-1} B_i \right),$$

то левое неравенство (2.5) [8, с. 89] выводится индукцией по k . Правое неравенство (2.5) в силу формулы $\Lambda_d - \Lambda = \sum_{i=1}^n (E - B_{\langle i \rangle}) \Lambda_i$ следует из $(n-1)$ -мерного варианта левого неравенства.

Поскольку $\overline{E}_{\langle i \rangle} \leq \overline{E}$, то верны неравенства (2.6). Неравенство (2.7) очевидно.

Неравенство (2.8) легко следует из формулы

$$\sum_{i=1}^n \varkappa_i \Lambda_i \overline{E}_{\langle i \rangle} = \sum_{k=1}^n k \tau^{k-1} \dot{\Lambda}_E^{(k)}, \quad (2.12)$$

если иметь в виду формулу (2.4). Формула же (2.12) получается посредством разложения $\overline{E}_{\langle i \rangle}$ по степеням τ и перегруппировки слагаемых левой части

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varkappa_i \Lambda_i \overline{E}_{\langle i \rangle} &= \sum_{i=1}^n \varkappa_i \Lambda_i + \sum_{j=1}^{n-1} \tau^j \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n \\ i_1 \neq i, \dots, i_j \neq i}} \left(\prod_{l=1}^j \varkappa_{i_l} \Lambda_{i_l} \right) \varkappa_i \Lambda_i \\ &= \dot{\Lambda}_E^{(1)} + \sum_{k=2}^n \tau^{k-1} k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \prod_{l=1}^k \varkappa_{i_l} \Lambda_{i_l} \\ &= \sum_{k=1}^n k \tau^{k-1} \dot{\Lambda}_E^{(k)}. \end{aligned}$$

Левые неравенства (2.6) и (2.8) влекут неравенство (2.9).

Неравенство (2.10) достаточно установить, например, при $i = n$. Применим левое неравенство (2.8) для случая $n - 1$ пространственных переменных

$$\left(\min_{1 \leq i \leq n-1} \alpha_i \right) \frac{1}{\tau} (\overline{E}_{\langle n \rangle} - E) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} (E + \tau \varkappa_i \Lambda_i).$$

Правая часть данного неравенства мажорируется оператором $\hat{A}$ и тем самым неравенство (2.10) доказано.

Неравенства (2.11) сразу следуют из формул (2.3) и неравенства (2.10). Лемма доказана.

Нам потребуются три вспомогательные разностные схемы

$$B \overline{\partial}_t v + \Lambda v = f^{h, \tau}, \quad B v_0 = u_0^h, \quad (2.13)$$

$$\overline{\partial}_t v_d + \Lambda_d v_d = f^{h, \tau}, \quad v_{d,0} = u_0^h, \quad (2.14)$$

$$\hat{B} \overline{\partial}_t z + \hat{A} z = f^{h, \tau}, \quad \overline{E} z_0 = u_0^h. \quad (2.15)$$

Первая из них – чисто неявная проекционно-разностная схема [14], [8], вторая – чисто неявная конечно-разностная схема, а третья – схема с расщепляющимся оператором (она отличается от схемы (2.2) стандартным видом правой части первого уравнения и наличием оператора $\overline{E}$ в начальном условии).

Для схемы (2.13) хорошо известны оценки погрешности

$$\|u - v\|_{L_2(Q)} \leq c(\tau + |h|^2) \left(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{\dot{W}_2^1(\Omega)} \right), \quad (2.16)$$

$$\|u - v\|_{L_2(Q)} \leq c(\tau^{1/2} + |h|) \left(\|f^{(1)}\|_{L_{2,1}(Q)} + \sum_{i=1}^n \|F_i\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \right) \quad (2.17)$$

с $f^{(1)} + D_i F_i = f$, см. [14] (а также [8]). Следуя методу из [8], мы сведем оценки погрешности (1.6), (1.7) к указанным оценкам, дав оценки разностей $v - v_d$, $v_d - z$ и $y - z$.

Приведем оценки усреднений (они потребуются в конце п. 2).

ЛЕММА 2. Справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|B^{-1/2} w^h\|_h &\leq \|w\|_{L_2(\Omega)}, & \|B^{-1} \Lambda^{1/2} w^h\|_h &\leq \frac{\sqrt{21}}{4} \|w\|_{\dot{W}_2^1(\Omega)}; \\ \|B^{-1/2} f^{h,\tau}\|_{h,\tau} &\leq \|f\|_{L_2(Q)}, & \|B^{-1/2} f^{h,\tau}\|_{h,\tau} &\leq \tau^{-1/2} \|f\|_{L_{2,1}(Q)}; \\ \|B_{\langle i \rangle}^{-1/2} \Lambda_i^{-1/2} (D_i F)^{h,\tau}\|_{h,\tau} &\leq \|F\|_{L_2(Q)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Эти оценки достаточно хорошо известны (их можно найти, в частности, в [8]).

Следующая лемма является опорной при выводе различных оценок решений разностных схем и разностей этих решений.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{B} \overline{\partial}_t + \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}[S_h]$, и оператор $\mathcal{C} \in \mathcal{S}[S_h]$ перестановочен с $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Тогда для любой $\eta \in S_{h,\tau}$ верны неравенства

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{C} \mathcal{A})^{1/2} \eta\|_{h,\tau} &\leq \|(\mathcal{C} \mathcal{A}^{-1})^{1/2} \mathcal{P} \eta\|_{h,\tau} + \frac{1}{\sqrt{2}} \|(\mathcal{C} \mathcal{B})^{1/2} \eta_0\|_h, \\ \|(\mathcal{C} \mathcal{B})^{1/2} \overline{\partial}_t \eta\|_{h,\tau} &\leq \|(\mathcal{C} \mathcal{B}^{-1})^{1/2} \mathcal{P} \eta\|_{h,\tau} + \frac{1}{\sqrt{2}} \|(\mathcal{C} \mathcal{A})^{1/2} \eta_0\|_h. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится энергетическим методом: достаточно рассмотреть выражение $(\mathcal{P} \eta, \mathcal{C} \zeta)_{h,\tau}$ с $\zeta = \eta, \overline{\partial}_t \eta$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если указанные выше операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ перестановочны, то для любой $\eta \in S_{h,\tau}$ верны неравенства

$$\|\eta\|_{h,\tau} \leq \|\mathcal{A}^{-1} \mathcal{P}\eta\|_{h,\tau} + \frac{1}{\sqrt{2}} \|(\mathcal{A}^{-1} \mathcal{B})^{1/2} \eta_0\|_h, \quad (2.19)$$

$$\max\{\|\mathcal{B} \bar{\partial}_t \eta\|_{h,\tau}, \|\mathcal{A} \eta\|_{h,\tau}\} \leq \|\mathcal{P}\eta\|_{h,\tau} + \frac{1}{\sqrt{2}} \|(\mathcal{A} \mathcal{B})^{1/2} \eta_0\|_h. \quad (2.20)$$

Дадим некоторые оценки функций v_d и z .

ЛЕММА 4. Для решения разностной схемы (2.14) верны оценки

$$\max\{\|\bar{\partial}_t v_d\|_{h,\tau}, \|\Lambda_d v_d\|_{h,\tau}\} \leq \|f^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\Lambda_d^{1/2} u_0^h\|_h, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} & \max\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \max_{0 \leq m \leq M} \|v_{d,m}\|_h, \|\Lambda_d^{1/2} v_d\|_{h,\tau}\right\} \\ & \leq \sqrt{2} I_\tau^M \|f^{(1),h,\tau}\|_h + \|\Lambda_d^{-1/2} f^{(2),h,\tau}\|_{h,\tau} + \frac{1}{\sqrt{2}} \|u_0^h\|_h, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $f^{(1)} + f^{(2)} = f$, а для решения разностной схемы (2.15) – оценки

$$\max\{\|\widehat{B} \bar{\partial}_t z\|_{h,\tau}, \|\widehat{A} z\|_{h,\tau}\} \leq \|f^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\Lambda_d^{1/2} u_0^h\|_h, \quad (2.23)$$

$$\max\{\|\Lambda_d^{-1/2} \widehat{B} \bar{\partial}_t z\|_{h,\tau}, \|\Lambda_d^{-1/2} \widehat{A} z\|_{h,\tau}\} \leq \|\Lambda_d^{-1/2} f^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \frac{1}{\sqrt{2}} \|u_0^h\|_h. \quad (2.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки (2.21) и (2.23) верны в силу следствия 1, см. (2.20), а также неравенств (2.6). Оценка (2.22) является стандартной энергетической оценкой (она следует из рассмотрения выражения $I_\tau(\bar{\partial}_t v_d + \Lambda_d v_d, v_d)_h$). Оценка (2.24) следует из (2.23), поскольку функция $\Lambda_d^{-1/2} z$ является решением уравнений вида (2.15), но с правыми частями $\Lambda_d^{-1/2} f^{h,\tau}$ и $\Lambda_d^{-1/2} u_0^h$.

Оценим последовательно разности $v - v_d$, $v_d - z$ и $y - z$ в норме $\|\cdot\|_{h,\tau}$.

ЛЕММА 5. Справедливы оценки ($c f^{(1)} + f^{(2)} = f$)

$$\|v - v_d\|_{h,\tau} \leq c|h|^2 (\|f^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2} u_0^h\|_h), \quad (2.25)$$

$$\|v - v_d\|_{h,\tau} \leq c|h| (I_\tau^M \|f^{(1),h,\tau}\|_h + \|\Lambda_d^{-1/2} f^{(2),h,\tau}\|_{h,\tau} + \|u_0^h\|_h). \quad (2.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно уравнениям (2.13) для v и (2.14) для v_d разность $r = v - v_d$ удовлетворяет уравнениям

$$B\bar{\partial}_t r + \Lambda r = \bar{\partial}_t(E - B)v_d + (\Lambda_d - \Lambda)v_d, \quad Br_0 = (E - B)v_{d,0}. \quad (2.27)$$

Если слагаемое $(\Lambda_d - \Lambda)v_d$ опустить, то тогда $Br + \Lambda I_\tau r = (E - B)v_d$, откуда (после рассмотрения выражения $(Br + \Lambda I_\tau r, B^{-1}r)_{h,\tau}$) следует оценка $\|r\|_{h,\tau} \leq \|B^{-1}(E - B)v_d\|_{h,\tau}$. В общем случае, используя также неравенство (2.19) и линейность задачи (2.27), имеем

$$\|r\|_{h,\tau} \leq \|B^{-1}(E - B)v_d\|_{h,\tau} + \|\Lambda^{-1}(\Lambda_d - \Lambda)v_d\|_{h,\tau}.$$

Поэтому, во-первых, в силу операторных неравенств (2.5) и $\Lambda^{-1} \leq B^{-1}\Lambda_d^{-1}$, $B^{-1} \leq cE$ имеем $\|r\|_{h,\tau} \leq c|h|^2\|\Lambda_d v_d\|_{h,\tau}$. При помощи оценки (2.21) устанавливаем (2.25).

Во-вторых, из неравенств (2.5) и очевидных неравенств $E - B \leq E$, $\Lambda_d - \Lambda \leq \Lambda_d$ следует, что

$$E - B \leq \frac{1}{\sqrt{6}}|h|\Lambda_d^{1/2}, \quad \Lambda_d - \Lambda \leq \frac{1}{\sqrt{6}}|h|\Lambda_d^{3/2}.$$

Значит, $\|r\|_{h,\tau} \leq c|h|\|\Lambda_d^{1/2}v_d\|_{h,\tau}$, и при помощи оценки (2.22) устанавливаем (2.26).

ЛЕММА 6. *Справедливы оценки*

$$\|v_d - z\|_{h,\tau} \leq c\tau(\|f^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2}u_0^h\|_h), \quad (2.28)$$

$$\|v_d - z\|_{h,\tau} \leq c\tau^{1/2}(\|\Lambda_d^{-1/2}f^{h,\tau}\| + \|u_0^h\|_h). \quad (2.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнений (2.14) для v_d и (2.15) для z следует, что разность $r = v_d - z$ удовлетворяет уравнениям

$$\bar{\partial}_t r + \Lambda_d r = R_B \bar{\partial}_t z + R_A z, \quad r_0 = \tau \dot{\Lambda}_E z_0.$$

Поэтому в силу неравенства (2.19) верна оценка

$$\|r\|_{h,\tau} \leq \|\Lambda_d^{-1}R_B \bar{\partial}_t z\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{-1}R_A z\|_{h,\tau} + \tau\|\Lambda_d^{-1/2}\dot{\Lambda}_E z_0\|_h.$$

Отсюда, во-первых, при помощи операторных неравенств (2.11) и (2.9) выводим

$$\|r\|_{h,\tau} \leq c\tau(\|\widehat{B}\bar{\partial}_t z\|_{h,\tau} + \|\widehat{A}z\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2}\overline{E}z_0\|_h).$$

После применения оценки (2.23) получается оценка (2.28).

Во-вторых, из тех же операторных неравенств и очевидных неравенств $R_A \leq \widehat{A}$, $R_B \leq \widehat{B}$, $\tau \dot{\Lambda}_E \leq \overline{E}$ следует, что

$$R_A \leq (\underline{q}^{-1}\tau\Lambda_d)^{1/2}\widehat{A}, \quad R_B \leq (\underline{q}^{-1}\tau\Lambda_d)^{1/2}\widehat{B}, \\ \tau^{1/2}\dot{\Lambda}_E \leq (\underline{q}^{-1}\Lambda_d)^{1/2}\overline{E}.$$

При помощи этих неравенств выводим

$$\|r\|_{h,\tau} \leq c\tau^{1/2}(\|\Lambda_d^{-1/2}\widehat{B}\bar{\partial}_t z\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{-1/2}\widehat{A}z\|_{h,\tau} + \|\overline{E}z_0\|_h),$$

и после применения оценки (2.24) получается оценка (2.29).

ЛЕММА 7. *Справедливы оценки*

$$\|y - z\|_{h,\tau} \leq c\tau \left(\sum_{i=1}^n \|f_{(i)}^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2} u_0^h\|_h \right), \quad (2.30)$$

$$\|y - z\|_{h,\tau} \leq c\tau^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|\Lambda_i^{-1/2} f_{(i)}^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \|u_0^h\|_h \right). \quad (2.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно уравнениям (2.2) для y и (2.15) для z разность $r = y - z$ удовлетворяет уравнениям

$$\widehat{B}\bar{\partial}_t r + \widehat{A}r = \sum_{i=1}^n (\bar{E}_{\langle i \rangle} - E) f_{(i)}^{h,\tau}, \quad r_0 = \tau \dot{\Lambda}_E z_0.$$

Поэтому в силу неравенства (2.19) верна оценка

$$\|r\|_{h,\tau} \leq \sum_{i=1}^n \|\widehat{A}^{-1}(\bar{E}_{\langle i \rangle} - E) f_{(i)}^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \tau \|(\widehat{A}^{-1} \widehat{B})^{1/2} \dot{\Lambda}_E z_0\|_h.$$

Отсюда, во-первых, при помощи операторных неравенств (2.10), (2.8) (левого) и (2.6) выводим

$$\|r\|_{h,\tau} \leq c\tau \left(\sum_{i=1}^n \|f_{(i)}^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2} \bar{E} z_0\|_h \right),$$

т.е. оценка (2.30) получена.

Во-вторых, из операторных неравенств (2.10), (2.8) (левого) и простых неравенств $\Lambda_i(\bar{E}_{\langle i \rangle} - E) \leq \widehat{A}$ и $\tau \dot{\Lambda}_E \leq \bar{E}$, а также $\widehat{B} \leq \bar{E}$, следует, что

$$\begin{aligned} \bar{E}_{\langle i \rangle} - E &\leq (\underline{\alpha}^{-1} \tau)^{1/2} \Lambda_i^{-1/2} \widehat{A}, \\ (\widehat{A}^{-1} \widehat{B})^{1/2} \tau^{1/2} \dot{\Lambda}_E &\leq (\underline{\alpha}^{-1} \widehat{B})^{1/2} \bar{E}^{1/2} \leq \underline{\alpha}^{-1/2} \bar{E}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|r\|_{h,\tau} \leq c\tau^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|\Lambda_i^{-1/2} f_{(i)}^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \|\bar{E} z_0\|_h \right),$$

т.е. оценка (2.31) также получена.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку $\Lambda_d^{-1} \leq \underline{\alpha}^{-1} \hat{A}^{-1} \hat{B}$, см. (2.7), то полученные в доказательстве данной леммы оценки норм z_0 влекут соответствующие оценки в доказательстве леммы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Нетрудно проверить, что верны также следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|v - v_d\|_{h,\tau} &\leq c|h|^{2\gamma} (\|\Lambda_d^{\gamma-1} f^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{\gamma-1/2} u_0^h\|_h), \\ \|v_d - z\|_{h,\tau} &\leq c\tau^\gamma (\|\Lambda_d^{\gamma-1} f^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{\gamma-1/2} u_0^h\|_h), \\ \|y - z\|_{h,\tau} &\leq c\tau^\gamma \left(\sum_{i=1}^n \|\Lambda_i^{\gamma-1} f_{(i)}^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{\gamma-1/2} u_0^h\|_h \right), \end{aligned} \quad 0 \leq \gamma \leq 1.$$

Завершим доказательство теоремы.

ЛЕММА 8. *Справедливы оценки погрешности (1.6), (1.7) и (1.8).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\|v - y\|_{L_2(Q)} = \|B^{1/2}(v - y)\|_{h,\tau} \leq \|v - v_d\|_{h,\tau} + \|v_d - z\|_{h,\tau} + \|y - z\|_{h,\tau}.$$

Применив сначала первые оценки лемм 5–7, затем неравенства $E \leq B^{-1/2}$, $\Lambda_d^{1/2} \leq B^{-1} \Lambda^{1/2}$ и лемму 2, получим

$$\begin{aligned} \|v - y\|_{L_2(Q)} &\leq c(\tau + |h|^2) \left(\sum_{i=1}^n \|f_{(i)}^{h,\tau}\|_{h,\tau} + \|\Lambda_d^{1/2} u_0^h\|_h \right) \\ &\leq c_1(\tau + |h|^2) \left(\sum_{i=1}^n \|f_{(i)}\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{\dot{W}_2^1(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Если вместо оценки (2.25) применить оценку (2.26) с $f^{(2)} = 0$, а вместо первой оценки (2.18) – вторую, то при $u_0 = 0$ получим

$$\|v - y\|_{L_2(Q)} \leq c(\tau^{1/2} + |h|) \sum_{i=1}^n \|f_{(i)}\|_{L_{2,1}(Q)}.$$

Кроме того, при помощи вторых оценок лемм 5–7 (и с учетом неравенства $\Lambda_d^{-1/2} \leq \Lambda_i^{-1/2} \leq B_{\langle i \rangle}^{-1/2} \Lambda_i^{-1/2}$) при $f_{(i)} = D_i F_i$ имеем

$$\|v - y\|_{L_2(Q)} \leq c(\tau^{1/2} + |h|) \left(\sum_{i=1}^n \|F_i\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \right).$$

Из оценок (2.16), (2.17) для $u - v$ и полученных оценок $v - y$ следуют оценки (1.6), (1.7).

Оценка (1.8) следует из оценок (1.6), (1.7) при помощи интерполяции оператора погрешности [8, теорема 2.5.1].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Понятно (и это представляет самостоятельный интерес), что для разностных схем (2.14) и (2.15) верны оценки погрешности вида (2.16), (2.17) с v_d и z в роли v и вида (1.8) с v_d и z в роли y .

Московский энергетический институт

Поступило

16.05.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
- [2] Дьяконов Е. Г. Разностные методы решения краевых задач. Вып. 2. Нестационарные задачи. М.: Изд-во МГУ, 1972.
- [3] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
- [4] Марчук Г. И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
- [5] Бахвалов Н. С. О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики // ЖВМиМФ. 1970. Т. 10. № 3. С. 555–568.
- [6] Бахвалов Н. С. Об оптимизации численных методов // Международный конгресс математиков в Ницце 1970 г. Доклады советских математиков. М.: Наука, 1972. С. 27–33.
- [7] Злотник А. А. О скорости сходимости проекционно-разностной схемы с расщепляющимся оператором для параболических уравнений // ЖВМиМФ. 1980. Т. 20. № 2. С. 422–432.
- [8] Злотник А. А. Проекционно-сеточные методы для нестационарных задач с негладкими данными. Дисс. ... к.ф.-м.н. М.: МГУ, 1979.
- [9] Johnson S. L., Saad Y., Schultz M. Alternating direction methods on multiprocessors // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1987. V. 8. № 5. P. 686–700.
- [10] Гордезиани Д. Г., Самарский А. А. Некоторые задачи термоупругости пластин и метод суммарной аппроксимации // Комплексный анализ и его прилож. М.: Наука, 1978. С. 173–186.
- [11] Гордезиани Д. Г. Методы построения приближенных решений некоторых классов многомерных задач математической физики. Автореферат дисс. ... д.ф.-м.н. М.: Изд-во МГУ, 1982.
- [12] Кузык А. М., Макаров В. Л. Оценка точности метода суммарной аппроксимации решения абстрактной задачи Коши // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 2. С. 297–300.
- [13] Кузык А. М., Макаров В. Л. О быстроте сходимости разностной схемы метода суммарной аппроксимации для обобщенных решений // ЖВМиМФ. 1986. Т. 26. № 6. С. 941–946.
- [14] Злотник А. А. Оценка скорости сходимости в L_2 проекционно-разностных схем для параболических уравнений // ЖВМиМФ. 1978. Т. 18. № 6. С. 1454–1465.
- [15] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.