Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Кочетков, Гомологии нильпотентных подалгебр супералгебры Ли $K(1, 1)$. 3, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 2, 234–243

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:41:40

УДК 513.83

ГОМОЛОГИИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДАЛГЕБР СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ $K(1, 1)$. 3

Ю. Ю. Кочетков

В работе вычислены размерности групп гомологий второго порядка с тривиальными коэффициентами нильпотентных подалгебр супералгебры Ли $K(1, 1)$, которая является естественным супераналогом алгебры Витта. Доказательство использует непосредственное вычисление ранга дифференциала. В качестве приложения найдены деформации максимальной нильпотентной подалгебры в $K(1, 1)$.

Библиография: 7 названий.

Введение. Рассмотрим бесконечномерное линейное пространство L с базисом $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Градуируем L , положив $\deg e_i = i$. Обозначим через L_n , $n \geq 1$, линейную оболочку векторов e_i , $i \geq n$: $L_n = \langle e_i \rangle_{i \geq n}$. На L можно задать Ли-структуры: структуру алгебры Ли и структуру супералгебры Ли.

1. Положим $[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}$. Тогда L становится алгеброй Ли, которая называется *алгеброй Витта* и обозначается W .
2. Положим

$$\begin{aligned}[e_{2i+1}, e_{2j+1}] &= e_{2i+2j+2}, \\ [e_{2i}, e_{2j+1}] &= (2j - i + 1)e_{2i+2j+1}, \\ [e_{2i}, e_{2j}] &= (2j - 2i)e_{2i+2j}.\end{aligned}$$

Тогда L становится супералгеброй Ли, где элемент e_i четен, если i четно, и нечетен, в противном случае. Эта супералгебра обозначается $K(1, 1)$.

Обе Ли-структуры сохраняют введенную выше градуировку, а подпространства L_n в обоих случаях являются нильпотентными под(супер)алгебрами Ли. Обозначение L_n мы сохраним для нильпотентных подалгебр супералгебры $K(1, 1)$, а соответствующие нильпотентные подалгебры W будут обозначаться $L_n(W)$.

Гомологии $L_n(W)$ были предметом интенсивного изучения в 70–80-х годах. В трудной работе Гончаровой [1] была доказана теорема о размерностях групп гомологий $H_p(L_n(W))$ с тривиальными коэффициентами. Достаточно прозрачное доказательство теоремы Гончаровой было дано Вайнштейном в [2].

Сходство между W и $K(1, 1)$ побудило предпринять исследование гомологий алгебр L_n . В работе [3] был дан набросок доказательства утверждения, что $\dim H_p(L_1) = 2$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00329.

(аналогично тому, что $\dim H_p(L_1(W)) = 2$). Полное доказательство так и не было опубликовано. В работе [4] был вычислен производящий ряд эйлеровой характеристики нильпотентной супералгебры L_1 ,

$$P(t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i t^{2i^2 \pm i},$$

структура которого подкрепляет утверждение из [3]. Вайнштейн предложил изящную гипотетическую формулу для нетривиальных циклов из $c'_p, c''_p \in Z_p(L_1)$:

$$c'_p = \begin{vmatrix} e_1 & e_3 & \dots & e_{2p-1} \\ e_3 & e_5 & \dots & e_{2p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{2p-1} & e_{2p+1} & \dots & e_{4p-3} \end{vmatrix}, \quad c''_p = \begin{vmatrix} e_3 & e_5 & \dots & e_{2p+1} \\ e_5 & e_7 & \dots & e_{2p+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{2p+1} & e_{2p+3} & \dots & e_{4p-1} \end{vmatrix}.$$

Эту формулу следует понимать таким образом: цепь вычисляется как определитель, где умножение заменено внешним произведением. Так как все элементы определителя нечетны, то внешнее произведение коммутативно (см. ниже) и цепь определена корректно. Так

$$c'_3 = \begin{vmatrix} e_1 & e_3 & e_5 \\ e_3 & e_5 & e_7 \\ e_5 & e_7 & e_9 \end{vmatrix} = e_1 \wedge e_5 \wedge e_9 + 2e_3 \wedge e_5 \wedge e_7 - e_5 \wedge e_5 \wedge e_5 - e_3 \wedge e_3 \wedge e_9 - e_1 \wedge e_7 \wedge e_7.$$

Доказать, что c'_p и c''_p являются циклами, несложно. Их нетривиальность проверена при $p \leq 5$.

Попытка доказать аналог теоремы Гончаровой о размерностях групп $H_p(L_n)$ методом фильтрующих базисов [2] не привела к успеху: тождества в концах $L_p(W)$, введенные в [2] и играющие важную роль при построении фильтрующих базисов, не имеют аналога в случае $K(1,1)$. Вместе с тем вычисления показывают, что есть регулярность в поведении размерностей групп гомологий $H_2(L_n)$ и $H_3(L_n)$.

Прежде чем формулировать утверждения, мы введем необходимые определения и обозначения. Четность однородного элемента $a \in K(1,1)$ будет обозначаться $p(a)$, где $p(a) = 0$, если a четно, и $p(a) = 1$, если a нечетно. В суперслучае понятия цепи и дифференциала нуждаются в корректировке [5]. В цепи $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ соседние элементы антикоммутируют, если оба нечетны. Поэтому, например, цепь $e_2 \wedge e_3 \wedge e_3$ задана корректно. Дифференциал $d: C_p(K(1,1)) \rightarrow C_{p-1}(K(1,1))$ определяется следующим образом:

$$d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = \sum_{1 \leq k < l \leq p} (-1)^{\alpha(k,l)} [e_{i_k}, e_{i_l}] \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e}_{i_k} \wedge \dots \wedge \widehat{e}_{i_l} \wedge \dots \wedge e_{i_p},$$

где

$$\alpha(k,l) = \sum_{t=1}^{k-1} (p(e_{i_t})p(e_{i_k}) + 1) + \sum_{t=1}^{l-1} (p(e_{i_t})p(e_{i_l}) + 1) - (p(e_{i_k})p(e_{i_l}) + 1).$$

Другими словами, мы перемещаем элемент e_{i_k} на первое место в цепи, вычисляя знак каждой перестановки по правилу, описанному выше, затем перемещаем элемент e_{i_l} на второе место, также вычисляя знак по тому же правилу, а потом берем скобку от этих двух элементов.

ПРИМЕР. Вычислим

$$\begin{aligned}
 d(e_1 \wedge e_4 \wedge e_5 \wedge e_5) &= [e_1, e_4] \wedge e_5 \wedge e_5 - [e_1, e_5] \wedge e_4 \wedge e_5 - [e_1, e_5] \wedge e_4 \wedge e_5 \\
 &\quad - [e_4, e_5] \wedge e_1 \wedge e_5 - [e_4, e_5] \wedge e_1 \wedge e_5 + [e_5, e_5] \wedge e_1 \wedge e_4 \\
 &= e_5 \wedge e_5 \wedge e_5 - e_6 \wedge e_4 \wedge e_5 - e_6 \wedge e_4 \wedge e_5 \\
 &\quad - 3e_9 \wedge e_1 \wedge e_5 - 3e_9 \wedge e_1 \wedge e_5 + e_{10} \wedge e_1 \wedge e_4 \\
 &= e_5 \wedge e_5 \wedge e_5 - 2e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 - 6e_1 \wedge e_5 \wedge e_9 + e_1 \wedge e_4 \wedge e_{10}.
 \end{aligned}$$

Весом цепи $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ называется число $m = i_1 + \dots + i_p$. Пространство цепей $C_p(\cdot)$ является прямой суммой

$$C_p(\cdot) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} C_p^{(m)}(\cdot)$$

конечномерных пространств цепей веса m . Дифференциал d сохраняет вес; следовательно, пространство циклов (гомологий) является суммой пространств циклов (гомологий) веса m : $Z_p(\cdot) = \bigoplus_m Z_p^{(m)}(\cdot)$ ($H_p(\cdot) = \bigoplus_m H_p^{(m)}(\cdot)$). Далее мы будем изучать размерности пространств $H_2^{(m)}(L_n)$.

В работе [6] было доказано, что $\dim H_2^{(m)}(L_n) = 0$ при $m > 8n$. Следовательно, пространство $H_2(L_n)$ конечномерно. Прежде чем формулировать теорему о размерностях, обратим внимание на следующий факт. Так как пространство $C_1^{(m)}(L_n)$ одномерно (при $m \geq n$), то $\dim Z_2^{(m)}(L_n) = \dim C_2^{(m)}(L_n) - 1$. Поэтому для вычисления $\dim H_2^{(m)}(L_n)$ достаточно знать размерность пространства 2-цепей $C_2^{(m)}(L_n)$ и ранг дифференциала $d: C_3^{(m)}(L_n) \rightarrow C_2^{(m)}(L_n)$.

ЛЕММА. Пусть $2n \leq m$. Тогда

$$\dim C_2^{(m)}(L_n) = \begin{cases} 2l - n, & \text{если } m = 4l, \\ 2l - n + 1, & \text{если } m = 4l + 1, \\ 2l - n + 2, & \text{если } m = 4l + 2, \\ 2l - n + 2, & \text{если } m = 4l + 3. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$C_2^{(m)}(L_n) = \langle e_n \wedge e_{m-n}, e_{n+1} \wedge e_{m-n-1}, \dots, e_s \wedge e_{m-s} \rangle,$$

то последней в этом списке будет цепь

$$\begin{aligned}
 e_{2l-1} \wedge e_{2l+1}, & \quad \text{если } m = 4l, \\
 e_{2l} \wedge e_{2l+1}, & \quad \text{если } m = 4l + 1, \\
 e_{2l+1} \wedge e_{2l+1}, & \quad \text{если } m = 4l + 2, \\
 e_{2l+1} \wedge e_{2l+2}, & \quad \text{если } m = 4l + 3.
 \end{aligned}$$

Теперь сформулируем теорему о размерностях групп $H_2^{(m)}(L_n)$.

ТЕОРЕМА А [4]. *Имеет место равенство*

$$\dim H_2^{(m)}(L_n) = \dim Z_2^{(m)}(L_n) - s(m),$$

где

$$s(m) = \begin{cases} 0 & \text{при } m < 6k + 3, \\ 1 & \text{при } m = 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5, \\ m - 6k - 4 & \text{при } 6k + 5 < m \leq 6k + 10, \\ m - 6k - 3 & \text{при } m > 6k + 10, \end{cases}$$

если $n = 2k + 1$, $n > 7$, и

$$\dim H_2^{(m)}(L_n) = \dim Z_2^{(m)}(L_n) - t(m),$$

где

$$t(m) = \begin{cases} 0 & \text{при } m < 6k + 2, \\ m - 6k - 1 & \text{при } m \geq 6k + 2, m \neq 6k + 4, 6k + 5, \\ m - 6k - 2 & \text{при } m = 6k + 4, 6k + 5, \end{cases}$$

если $n = 2k$.

При нечетном $n \leq 7$ размерности групп гомологий легко вычисляются непосредственно. Имеем следующие результаты.

Случай $n = 1$: $\dim H_2^{(m)}(L_1) = 1$ при $m = 2, 6$. При остальных m соответствующая группа тривиальна.

Случай $n = 3$: $\dim H_2^{(m)}(L_3) = 1$ при $m = 10, 11, 12, 13, 14$. При остальных m соответствующая группа тривиальна.

Случай $n = 5$: размерность $H_2^{(m)}(L_5)$ задается таблицей 1. При остальных m соответствующая группа тривиальна.

ТАБЛИЦА 1

m	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$\dim H_2^{(m)}(L_5)$	1	2	1	1	2	2	1	1	1	1

Случай $n = 7$: размерность $H_2^{(m)}(L_7)$ задается таблицей 2. При остальных m соответствующая группа тривиальна.

ТАБЛИЦА 2

m	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$\dim H_2^{(m)}(L_7)$	1	2	2	2	2	3	3	2	2	2	1	1

Поясним смысл формул теоремы А. Если $n = 2k + 1$, то $\dim C_3^{(m)}(L_n) = 0$ при $m < 6k + 3$. Аналогично, $\dim C_3^{(m)}(L_{2k}) = 0$ при $m < 6k + 2$. Теорема утверждает, что при $n = 2k + 1$ ранг дифференциала d ведет себя так, как показано в таблице 3 (при $m > 6k + 10$ ранг дифференциала равен $m - 6k - 3$), а при $n = 2k$ — так, как показано в таблице 4 (при $m > 6k + 5$ ранг равен $m - 6k - 1$).

ТАБЛИЦА 3

m	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$6k+6$	$6k+7$	$6k+8$	$6k+9$	$6k+10$	$6k+11$	$6k+12$
ранг	1	1	1	2	3	4	5	6	8	9

ТАБЛИЦА 4

m	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	$6k+6$	$6k+7$	$6k+8$
ранг	1	2	2	3	5	6	7

Мы подробно рассмотрим случай нечетного n и объясним, как проводится доказательство теоремы А для четного n .

Случай нечетного n . Пусть $n = 2k + 1$. Редуцированной степенью цепи $c = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_l}$ мы будем называть число $\deg c - 2kl$. Так, например, редуцированная степень 1-цепи e_{2k+1} равна 1, а редуцированная степень цепи $e_{2k+1} \wedge e_{2k+2} \wedge e_{2k+3}$ равна 6. Редуцированную степень цепи $c \in C_3^{(m)}(L_n)$ будем обозначать $\tilde{m}$.

Наш основной объект – это матрица A дифференциала $d: C_3^{(m)}(L_n) \rightarrow C_2^{(m)}(L_n)$. Ее строки нумеруются тройками чисел (i_1, i_2, i_3) , $i_1 + i_2 + i_3 = \tilde{m}$, $i_1 \leq i_2 \leq i_3$, отвечающими ненулевым 3-цепям $e_{2k+i_1} \wedge e_{2k+i_2} \wedge e_{2k+i_3}$. Ее столбцы отвечают базисным элементам пространства $C_2^{(m)}(L_n)$, которые мы будем обозначать $b_1 = e_{2k+1} \wedge e_{m-2k-1}$, $b_2 = e_{2k+2} \wedge e_{m-2k-2}$, Столбец, отвечающий i -му базисному вектору, мы будем называть i -м столбцом и обозначать s_i .

Столбцы A линейно зависимы: линейная комбинация $\sum \alpha_i s_i$ равна нулевому столбцу, где коэффициенты α_i определяются из условия $d(b_i) = d(e_{2k+i} \wedge e_{m-2k-i}) = \alpha_i e_m$. Равенство нулю этой линейной комбинации следует из того, что $d^2 = 0$.

При работе с матрицей A удобно выделить два случая.

1) Пусть $\tilde{m} < 2k + 4$. При этом в цепи $e_i \wedge e_j \wedge e_{m-i-j} \in C_3^{(m)}(L_n)$ всегда $i + j > m - i - j$, $m - j > j$ и $m - i > i$. Тогда в столбцах с номерами $\tilde{m} - 1, \tilde{m}, \dots$ стоят нули. Пусть, например, $n = 11$, $m = 37$, т.е. $k = 5$ и $\tilde{m} = 7$. Тогда $\dim C_2^{(37)}(L_{11}) = 8$ и базис состоит из элементов $b_1 = e_{11} \wedge e_{26}, \dots, b_8 = e_{18} \wedge e_{19}$. В то же время, $\dim C_3^{(37)}(L_{11}) = 3$ и базис состоит из цепей $e_{11} \wedge e_{11} \wedge e_{15}$, $e_{11} \wedge e_{12} \wedge e_{14}$ и $e_{11} \wedge e_{13} \wedge e_{13}$. Имеем

$$\begin{aligned} d(e_{11} \wedge e_{11} \wedge e_{15}) &= -b_5 - 2b_1, \\ d(e_{11} \wedge e_{12} \wedge e_{14}) &= 5b_4 - 4b_2 - 2b_1, \\ d(e_{11} \wedge e_{13} \wedge e_{13}) &= 2b_3 - b_1. \end{aligned}$$

То есть в столбцах 6, 7 и 8 матрицы A стоят нули. В этом случае через A мы будем обозначать подматрицу исходной матрицы, образованную теми же строками и столбцами от первого до $(\tilde{m} - 2)$ -го включительно. При $\tilde{m} < 12$ ранг A легко вычисляется.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\tilde{m} \geq 12$ и $\tilde{m} < 2k + 4$. Тогда ранг матрицы A на единицу меньше числа ее столбцов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как столбцы матрицы A линейно зависимы, то ее ранг не превышает числа столбцов минус 1. Строки $(1, 1, \tilde{m} - 2)$, $(1, 2, \tilde{m} - 3)$ и $(1, 3, \tilde{m} - 4)$ вносят вклад 3 в ранг A , потому что столбцы $\tilde{m} - 2$, $\tilde{m} - 3$ и $\tilde{m} - 4$ содержат ровно по одному ненулевому элементу как раз в этих строках. Рассмотрим подматрицу B матрицы A ,

полученную из A удалением первого и трех последних столбцов, первых трех строк и всех строк $(i, j, \tilde{m} - i - j)$, где $i > 3$.

Мы докажем, что ранг матрицы B равен числу ее столбцов, т.е. $\tilde{m} - 6$. Вот как выглядит матрица B для $\tilde{m} = 17$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5-k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4-k & 0 & 0 & 0 & k-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ k-3 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k-2 \\ -k-9 & 0 & k+10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ k & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k-4 & 0 & 0 \\ -k-6 & 0 & 0 & 0 & k+8 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ k+3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -k-6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 2-k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k+1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1-k & 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Столбцы матрицы B имеют номера $2, \dots, 12$, а ее строки нумеруются тройками $(1, 4, 12)$, $(1, 5, 11)$, $(1, 6, 10)$, $(1, 7, 9)$, $(2, 3, 12)$, $(2, 4, 11)$, $(2, 5, 10)$, $(2, 6, 9)$, $(2, 7, 8)$, $(3, 3, 11)$, $(3, 4, 10)$, $(3, 5, 9)$, $(3, 6, 8)$, $(3, 7, 7)$.

Преобразуем B в ступенчатую матрицу: в строке $(2, 4, \tilde{m} - 6)$ (а также в строках $(2, 5, \tilde{m} - 7)$, $(2, 6, \tilde{m} - 8)$, ...) мы обнуляем элемент в $(\tilde{m} - 6)$ -м столбце (в столбцах $\tilde{m} - 7, \tilde{m} - 8, \dots$ соответственно), используя для этого строку $(3, 3, \tilde{m} - 6)$ (строки $(3, 4, \tilde{m} - 7)$, $(3, 5, \tilde{m} - 8)$, ... соответственно). Теперь строки $(1, 4, \tilde{m} - 5)$, $(3, 3, \tilde{m} - 6)$, $(3, 4, \tilde{m} - 7)$, ... и преобразованные строки $(2, 4, \tilde{m} - 6)$, $(2, 5, \tilde{m} - 7)$, ... образуют ступенчатую матрицу ранга $\tilde{m} - 8$. Чтобы достроить B до ступенчатой матрицы полного ранга, т.е. построить еще две недостающие строки, рассмотрим в исходной матрице B строки $(1, 4, \tilde{m} - 5)$, $(1, 5, \tilde{m} - 6)$, $(2, 3, \tilde{m} - 5)$, $(2, 4, \tilde{m} - 6)$, $(2, 5, \tilde{m} - 7)$, $(3, 3, \tilde{m} - 6)$ и $(3, 4, \tilde{m} - 7)$. Ненулевые элементы этих строк располагаются в столбцах с номерами $2, 3, 4, 5, \tilde{m} - 7, \tilde{m} - 6$ и $\tilde{m} - 5$. Теперь рассмотрим (7×7) -подматрицу C матрицы B , образованную этими строками и столбцами. В случае нечетного $\tilde{m}$ матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(\tilde{m} - 7) - 2 & 0 & 0 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ k - \frac{1}{2}(\tilde{m} - 11) & \tilde{m} - 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k-2 \\ 8 - k - \tilde{m} & 0 & k + \tilde{m} - 7 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ k - \frac{1}{2}(\tilde{m} - 17) & 0 & 0 & \tilde{m} - 9 & -k - 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 11 - \tilde{m} & \frac{1}{2}(\tilde{m} - 13) - k & 0 & k - 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель C равен $3(\tilde{m} - 3)(\tilde{m} - 9)(\tilde{m} - 4k - 15)/2$, если $\tilde{m}$ нечетно, и $3(\tilde{m} - 8)(\tilde{m} - 10) \times (\tilde{m} + 6k)/2$, если $\tilde{m}$ четно. Так как в рассматриваемом случае $(\tilde{m} < 2k + 4)$ определитель не равен нулю, то ранг матрицы B равен $\tilde{m} - 6$.

2) Пусть теперь $\tilde{m} \geq 2k + 4$. Мы рассматриваем полную матрицу A , т.е. учитываем все столбцы b_i , которые, по-прежнему, линейно зависимы. Поэтому ранг матрицы A не превышает числа ее столбцов минус 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\tilde{m} \geq 2k + 4$. Тогда ранг матрицы A равен числу ее столбцов минус 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подматрицу B матрицы A , полученную удалением из A первого столбца и строк $(i, j, \tilde{m} - i - j), i > 3$. Мы докажем, что ранг матрицы B равен числу ее столбцов. Вот как выглядит фрагмент B при $n = 11, m = 59$, содержащий строки $(2, 3, 24), (2, 4, 23), \dots, (2, 13, 14)$ (номера столбцов B меняются от 2 до 19):

$$\begin{pmatrix} -4 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -26 & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ -23 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ -20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13 & 0 \\ -17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 \\ -14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что элементы матрицы B , находящиеся в строке $(2, i, \tilde{m} - i - 2)$ и столбцах i и $\tilde{m} - i - 2$ (или $2 + i + 2k$), не равны нулю (так как $[e_{2k+2}, e_{2k+i}] \neq 0$ при $i > 2$). Мы будем приводить матрицу B к ступенчатому виду следующим образом: в строке $(2, i, \tilde{m} - i - 2), i > 3$, мы будем обнулять самый правый ненулевой элемент с помощью строки $(3, i - 1, \tilde{m} - i - 2)$. После этих преобразований строки $(2, 4, \tilde{m} - 6), (2, 5, \tilde{m} - 7), \dots, (2, (\tilde{m} - 3)/2, (\tilde{m} - 1)/2), (3, (\tilde{m} + 1)/2 + k - 3, (\tilde{m} - 1)/2 + k), \dots, (3, s, \tilde{m} - s - 3)$ образуют ступенчатую матрицу, ранг которой равен числу столбцов B минус 2 (здесь $s = (\tilde{m} - 3)/2$, если $\tilde{m} \equiv 1 \pmod{4}$, и $s = (\tilde{m} - 5)/2$, если $\tilde{m} \equiv 3 \pmod{4}$). Другими словами, мы отбираем строки $(3, i, \tilde{m} - i - 3)$, начиная с той, где самый правый ненулевой элемент находится в последнем столбце.

Чтобы достроить B до ступенчатой матрицы требуемого ранга, мы поступаем, как в теореме 1, т.е. рассматриваем строки $(1, 4, \tilde{m} - 5), (1, 5, \tilde{m} - 6), (2, 3, \tilde{m} - 5), (2, 4, \tilde{m} - 6), (2, 5, \tilde{m} - 7), (3, 3, \tilde{m} - 6), (3, 4, \tilde{m} - 7)$ и столбцы $2, 3, 4, 5, 2k + 5, 2k + 6, 2k + 7$ матрицы A . Матрица C , образованная этими строками и столбцами, отличается от аналогичной матрицы, построенной в теореме 1, лишь знаками элементов в трех последних столбцах. Поэтому ее определитель равен $-3(\tilde{m} - 3)(\tilde{m} - 9)(\tilde{m} - 4k - 15)/2$, если $\tilde{m}$ нечетно, и $-3(\tilde{m} - 8)(\tilde{m} - 10)(\tilde{m} + 6k)$, если $\tilde{m}$ четно. Если $\tilde{m} \neq 4k + 15$, то матрица C дает возможность достроить матрицу B до ступенчатой матрицы требуемого ранга.

Если же $\tilde{m} = 4k + 15$, то вместо C рассматривается (8×8) -матрица, образованная строками $(1, 5, 4k + 9), (1, 6, 4k + 8), (2, 4, 4k + 9), (2, 5, 4k + 8), (2, 6, 4k + 7), (3, 3, 4k + 9), (3, 4, 4k + 8), (3, 5, 4k + 7)$ и столбцами $2, 3, 4, 5, 6, 4k + 6, 4k + 7, 4k + 8$. Определитель этой матрицы равен $240(k + 1)(k + 3)(2k + 3) \neq 0$.

Существует, однако, еще одна неприятность: в строке $(3, 2k + 6, \tilde{m} - 2k - 9)$ в $(4k + 9)$ -м (или в $(\tilde{m} - 2k - 9)$ -м) столбце стоит 0 (так как $[e_{2k+3}, e_{4k+6}] = 0$). Следовательно, мы не можем обнулить соответствующий элемент того же столбца, стоящий в строке $(2, 2k + 7, \tilde{m} - 2k - 9)$. В этом случае обнуление происходит с помощью строки $(4, 2k + 5, \tilde{m} - 2k - 9)$, и ее же мы используем для построения ступенчатой матрицы.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\tilde{m} \geq 2k + 4$ и $n > 10$, то $\dim H_2^{(m)}(L_n) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае количество столбцов матрицы A равно

$$\dim C_2^{(m)}(L_n),$$

а ранг A (т.е. ранг d) равен числу столбцов A минус 1, т.е. размерности группы циклов $Z_2^{(m)}(L_n)$.

Случай четного n . Пусть $n = 2k$. Величина $m - 2kl$ называется *редуцированной степенью* цепи $c \in C_l^{(m)}(L_n)$. При этом элемент e_{2k} (т.е. 1-цепь) имеет редуцированную степень 0. Матрица A определяется также, как и в случае нечетного n (ее первый столбец имеет номер 0). Столбцы A линейно зависимы.

Как и для нечетного n , мы различаем два случая: $\tilde{m} < 2k + 2$ и $\tilde{m} \geq 2k + 2$. В первом случае столбцы матрицы A с номерами большими, чем $\tilde{m} - 1$, являются нулевыми и удаляются. Доказательство того, что ранг матрицы A равен числу ее столбцов минус 1, почти такое же, как и в случае нечетного n . Единственное отличие состоит в том, что C строится, как (8×8) -матрица, образованная строками $(0, 2, \tilde{m} - 2)$, $(0, 3, \tilde{m} - 3)$, $(0, 4, \tilde{m} - 4)$, $(1, 1, \tilde{m} - 2)$, $(1, 2, \tilde{m} - 3)$, $(1, 3, \tilde{m} - 4)$, $(1, 4, \tilde{m} - 5)$, $(2, 3, \tilde{m} - 5)$ и столбцами $1, 2, 3, 4, \tilde{m} - 5, \tilde{m} - 4, \tilde{m} - 3, \tilde{m} - 2$. В случае равенства нулю определителя матрицы C следует перейти к большей матрице, как это делается в доказательстве теоремы 2.

Дополнение. Деформации. Знание размерностей групп $H_2^{(m)}(L_n)$ позволяет найти деформации супералгебр L_n . При этом достаточно иметь лишь частичную информацию о группах $H_3^{(m)}(L_n)$. В этом пункте мы найдем деформации супералгебры L_1 (см. также [7]).

Так как мы будем работать не с гомологиями, а с когомологиями, то введем соответствующие обозначения: через $C_{(m)}^*$ (соответственно $Z_{(m)}^*$, $H_{(m)}^*$) мы будем обозначать группу коцепей (соответственно коциклов, когомологий) степени m . Обозначим через f_i линейный функционал на L_1 (т.е. элемент из $C^1(L_1)$) такой, что $f_i(e_j) = \delta_{ij}$. Рассмотрим коцепь $c = f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_n} \otimes e_s \in C^n(L_1, L_1)$. Положим $\deg c = s - i_1 - \dots - i_n$. Введем фильтрацию на пространстве коцепей

$$C^*(L_1, L_1) = \Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \dots,$$

положив, что Φ_p — это линейная оболочка цепей $c = f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_n} \otimes e_s$ таких, что $i_1 + \dots + i_n \geq p$. Тогда первый член $E_{p,q}^1$ соответствующей спектральной последовательности $\mathcal{E}$ есть $E_{p,q}^1 = H_{(p)}^{p+q}(L_1)$ [2]. Таким образом, для решения нашей задачи мы должны знать $H^1(L_1)$, $H^2(L_1)$ и иметь достаточную информацию об $H^3(L_1)$.

Легко видеть, что $\dim H^1(L_1) = 2$. Нетривиальными коциклами здесь являются $f_1 \in H_{(1)}^1(L_1)$ и $f_3 \in H_{(3)}^1(L_1)$. Нам достаточно знать, что

$$\dim H^3(L_1) \geq 2, \quad \dim H_{(15)}^3(L_1) = \dim H_{(21)}^3(L_1) = 1, \quad \dim H_{(m)}^3(L_1) = 0$$

при $m < 21$, $m \neq 15$. Этот факт проверяется прямым вычислением.

Используя оценки работы [1], нетрудно показать, что $\dim H^2(L_1) = 2$, причем

$$\dim H_{(6)}^2(L_1) = \dim H_{(10)}^2(L_1) = 1.$$

Вычисления позволяют найти следующие формулы для нетривиальных коциклов:

$$c_6 = f_3 \wedge f_3 \in Z_{(6)}^2(L_1),$$

$$c_{10} = f_3 \wedge f_7 + 2f_4 \wedge f_6 - 2f_5 \wedge f_5 \in Z_{(10)}^2(L_1).$$

Займемся вычислением группы $H_{(m)}^2(L_1, l_1)$. Рассмотрим следующие дифференциалы в спектральной последовательности $\mathcal{E}$:

Здесь число i ($i = 1, 3, 6, 10, 15, 21$) обозначает коцепь $c_i \otimes e_{i+m}$, где c_i – нетривиальный цикл из $Z_{(1)}^1(L_1)$, $Z_{(3)}^1(L_1)$, $Z_{(6)}^2(L_1)$, $Z_{(10)}^2(L_1)$, $Z_{(15)}^3(L_1)$, $Z_{(21)}^3(L_1)$ соответственно.

Дифференциал $3 \rightarrow 6$ равен нулю только при $m = 2$ и при $m \leq -3$ (в этом случае коцепь $f_3 \otimes e_{3+m}$ не существует). Однако, при $m = 2$ дифференциал $1 \rightarrow 6$ не равен нулю. Следовательно, коцепь $c_6 \otimes e_{6+m} = f_3 \wedge f_3 \otimes e_{6+m}$ может порождать нетривиальный элемент из $H_{(m)}^2(L_1, L_1)$ только при $m = -3, -4, -5$ (при $m < -5$ коцепь $c_6 \otimes e_{6+m}$ не существует).

Дифференциал $10 \rightarrow 15$ равен нулю только при $m = 2$. Но при $m = 2$ дифференциал $10 \rightarrow 21$ не равен нулю.

Таким образом, $\dim H^2(L_1, L_1) \leq 3$, и ненулевыми (причем одномерными) могут быть только группы $H_{(-3)}^2(L_1, L_1)$, $H_{(-4)}^2(L_1, L_1)$ и $H_{(-5)}^2(L_1, L_1)$. Эти группы в самом деле ненулевые. Соответствующие нетривиальные коциклы имеют вид

$$c_{-3} = \delta(f_1 \otimes e_{-2} + 4f_2 \otimes e_{-1})|_{L_1},$$

$$c_{-4} = \delta(f_1 \otimes e_{-3} + 2f_2 \otimes e_{-2} - f_3 \otimes e_{-1})|_{L_1},$$

$$c_{-5} = \delta(2f_1 \otimes e_{-4} + 12f_2 \otimes e_{-3} + 3f_3 \otimes e_{-2} + 16f_4 \otimes e_{-1})|_{L_1}.$$

Здесь имеется в виду, что рассматриваются только значения c_{-3} , c_{-4} и c_{-5} на $L_1 \wedge L_1$. Например,

$$c_{-3}(e_1, e_1) = 4e_{-1} + 2[e_1, e_{-2}] = 0.$$

Легко проверить нетривиальность указанных коциклов (на L_1 , так как на $K(1, 1)$ они, конечно, тривиальны).

Коциклы c_{-3} и c_{-5} нечетны, и поэтому не могут быть продолжены до глобальных деформаций. Глобальная деформация, если она существует, может быть только продолжением коцикла c_{-4} . Пусть такая глобальная деформация есть и имеет вид

$$h(e_i, e_j) = [e_i, e_j] + tc_{-4}(e_i, e_j) + t^2 d_{-8}(e_i, e_j) + t^3 d_{-12}(e_i, e_j) + t^4 d_{-16}(e_i, e_j) + \dots,$$

где d_{-8} , d_{-12} , d_{-16} – коцепи степеней -8 , -12 , -16 соответственно. Рассмотрим равенства

$$h(h(e_i, e_j), e_k) - h(e_i, h(e_j, e_k)) + (-1)^{ij} h(e_j, h(e_i, e_k)) = 0$$

при $i + j + k \leq 17$ и приравняем к нулю коэффициенты в этих равенствах при t в степени 2, 3 и 4. Полученная система не имеет решений. Следовательно, коцикл c_{-4} не продолжаем до глобальной деформации. Сформулируем наш результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Имеют место равенства*

$$\dim H^2(L_1, L_1) = 3,$$

$$\dim H_{(-3)}^2(L_1, L_1) = \dim H_{(-4)}^2(L_1, L_1) = \dim H_{(-5)}^2(L_1, L_1) = 1.$$

Нетривиальный четный коцикл $s_{-4} \in H_{(-4)}^2(L_1, L_1)$ не продолжаем до глобальной деформации, и, следовательно, супералгебра L_1 жесткая.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гончарова Л. В. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли формальных векторных полей на прямой // Функцион. анализ и его прилож. 1973. Т. 7. С. 6–14.
- [2] Weinstein F. V. Filtering bases: a tool to compute cohomologies of abstract superalgebras of the Witt algebra // Adv. Soviet Math. 1993. V. 17. P. 155–216.
- [3] Ретах В. С., Фейгин Б. Л. Окогомологиях некоторых алгебри супералгебр Ли векторных полей // УМН. 1982. Т. 37. № 2. С. 233–234.
- [4] Кочетков Ю. Ю. Гомологии нильпотентных подалгебр супералгебры Ли $K(1, 1)$ // Функцион. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 4. С. 86–88.
- [5] Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984.
- [6] Кочетков Ю. Ю. Гомологии нильпотентных подалгебр супералгебры Ли $K(1, 1)$. 2 // УМН. 2000. Т. 55. № 6. С. 143–144.
- [7] van den Hijligenberg N. W., Kotchetkov Yu. Yu. The absolute rigidity of the Neveu-Schwarz and Ramond superalgebras // J. Math. Phys. 1996. V. 37. № 11. P. 5858–5868.

Московский государственный институт электроники и математики

E-mail: yuyuk@kochetkov.mcsme.ru

Поступило

14.03.2000

Исправленный вариант

07.02.2002