Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Рожков, Нижний центральный ряд одной группы автоморфизмов деревьев, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 2, 225–237

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1821>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:16:53

НИЖНИЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ РЯД ОДНОЙ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ДЕРЕВЬЕВ

А. В. Рожков

1. Введение. Речь идет о 3-порожденной 2-группе Григорчука H [1], активно изучаемой в последнее время. Р. И. Григорчуком доказано, что она имеет промежуточный рост, И. Г. Лысенко описаны ее определяющие соотношения. К настоящему моменту описаны также ее конечные, абелевы, нормальные подгруппы, найдены ряды коммутантов, описаны централизаторы и повторные централизаторы элементов [2] и т. д.

Эта группа занимает особое место в теории АТ-групп [3]. С одной стороны, общие методы к ней часто неприменимы, поскольку она 2-группа; с другой стороны, эта группа очень популярна среди специалистов и любой вопрос в первую очередь пытаются решить именно для этой группы.

В [2] показано, что индексы последовательных членов ряда коммутантов растут монотонно и очень быстро. Это и неудивительно, поскольку ряд коммутантов является частью ряда конгруэнц-подгрупп. Поведение же индексов соответствующих членов нижнего центрального ряда совершенно иное. Основным результатом статьи является утверждение, что факторы нижнего центрального ряда группы Григорчука – элементарные абелевы группы ранга 1 или 2. При этом указывается точное значение индекса для каждого фактора.

Кроме того доказано, что ступени разрешимости факторов по конгруэнц-подгруппам растут как линейные функции, а ступени нильпотентности этих же факторов как показательные.

В работе используются некоторые технические леммы из [2]. Предложенная схема доказательства в принципе подходит для любой АТ-группы, но на ее реализацию сильно влияют особенности рассматриваемой группы.

Благодарю проф. Р. И. Григорчука за ценные замечания, позволившие обнаружить пробел в доказательстве теоремы 1.

2. Основные соотношения. Группа Григорчука $H = \text{gr}(c, f, g, h)$ задается четырьмя (фактически тремя) автоморфизмами бесконечного одnorodного 2-дерева T , изображенными ниже на рисунке.

где $\pi = (0, 1)$ – подстановка ребер, последовательности

$$\pi, \pi, 1, \dots, \quad \pi, 1, \pi, \dots, \quad 1, \pi, \pi, \dots$$

циклически повторяются, а во всех непомеченных вершинах стоят тождественные подстановки. Из определения следует, что

$$c^2 = f^2 = g^2 = h^2 = 1, \quad fg = h, \quad gh = f, \quad hf = g.$$

Мы будем использовать следующие обозначения. Если v – вершина, то $T_{(v)}$ – поддерево с начальной вершиной v . Деревья T и $T_{(v)}$ естественным образом изоморфны. Пусть

$$\text{id}^{(v)}: T \rightarrow T_{(v)}$$

– указанный изоморфизм, который мы будем обозначать $\text{id}^{(n)}$, если важна только длина n вершины v . Указанный изоморфизм естественным образом задает изоморфизм

$$\text{Aut } T \rightarrow \text{Aut } T_{(v)}$$

групп автоморфизмов деревьев, который мы будем обозначать теми же символами $\text{id}^{(v)}$ и $\text{id}^{(n)}$.

Если $X \leq \text{Aut } T$, V – некоторое подмножество вершин дерева T , то по определению

$$\text{st}_X(V) = \bigcap_{v \in V} \text{st}_X(v), \quad \text{cost}_X(V) = \text{gr} \left(\bigcup_{v \in V} \text{st}_X(T \setminus T_{(v)}) \right),$$

– стабилизатор и костабиллизатор множества V соответственно. Нетрудно видеть, что $\text{cost}(v) \triangleleft \text{st}(v)$ и при $u \leq v$

$$\text{st}(v) \leq \text{st}(u), \quad \text{cost}(v) \leq \text{cost}(u).$$

Кроме того, при несравнимых u и v , костабиллизаторы $\text{cost}(u)$ и $\text{cost}(v)$ поэлементно перестановочны.

Пусть $|v|$ – длина вершины v , тогда по определению

$$\text{st}(n) = \bigcap_{|v|=n} \text{st}(v), \quad \text{cost}(n) = \text{gr} \left(\bigcup_{|v|=n} \text{cost}(v) \right).$$

Если $x \in \text{st}(v)$, то сужение автоморфизма x на поддерево $T_{(v)}$ будем обозначать $x_{(v)}$ и называть v -срезкой. Если $x \in \text{st}(n)$, то автоморфизм x однозначно определяется своими v -срезками, $|v| = n$, и естественно отождествление

$$x = (\dots, x_{(v)}, \dots) \circ \text{id}^{(n)}, \quad |v| = n.$$

Чаще всего мы будем пользоваться им при $n = 1$, опуская в обозначении $\text{id}^{(1)}$ индекс (1).

В указанных обозначениях имеем

$$f = (g \circ \text{id}, c \circ \text{id}) \quad \text{или} \quad f = (g, c) \circ \text{id}.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} (ch)^4 &= (cg)^8 = (cf)^{16} = 1, & \text{gr}(c, h) &\cong D_4, \\ \text{gr}(c, g) &\cong D_8, & \text{gr}(c, f) &\cong D_{16}. \end{aligned}$$

Очевидно, $\text{st}(1) = \text{gr}(f, g, cfc, cgc)$ и, значит, $\text{st}(1)_{(v)} \cong H \circ \text{id}$ при $v = 0, 1$. Следовательно, $\text{st}(v)_{(v)} \cong H \circ \text{id}^{(v)}$ для любой вершины v дерева T .

Условимся, что в обозначениях стабилизаторов и костабилизаторов, если они рассматриваются во всей группе H или во всей группе $H \circ \text{id}^{(n)}$, мы будем опускать для краткости индексы H и $H \circ \text{id}^{(n)}$.

Если X – подмножество группы H , то $\overline{X}^H$ – нормальное замыкание множества X в группе H .

ЛЕММА 1 [2]. Пусть $a = (cf)^2$, $K = \overline{a}^H$, $L = \overline{f}^H$ – нормальные подгруппы. Тогда имеют место соотношения:

- 1) $K = \text{gr}(a, (1, a) \circ \text{id}, (a, 1) \circ \text{id})$, $L = \text{gr}(f, K)$;
- 2) $H/L \cong D_4 \cong \text{gr}(c, h)$, $H/K \cong D_4 \times \mathbb{Z}_2$, $L/K \cong \text{gr}(f) \cong \mathbb{Z}_2$;
- 3) $\text{cost}(v)_{(v)} = L \circ \text{id}$, при $|v| = 1$;
- 4) $\text{cost}(v)_{(v)} = \text{cost}_K(v)_{(v)} = K \circ \text{id}^{(n)}$, при $|v| = n > 1$;
- 5) $(cg)^4 \in K$, $K/\text{cost}_K(1) \cong D_4$,

и всякий элемент этой фактор-группы имеет вид

$$(\psi(c, g), \psi(g, c)) \text{cost}_K(1),$$

где ψ – некоторое слово от двух переменных.

В дальнейшем нам потребуются следующие непосредственно проверяемые соотношения:

$$a^4 \equiv (a^2, a^{-2}) \circ \text{id} \pmod{\text{cost}(2)}, \quad (1)$$

$$a^c = a^f = a^{-1}, \quad a^h = a^{-g} = (a^{-1}, 1) \circ \text{id} \cdot a, \quad (2)$$

$$[a, c] = [a, f] = a^{-2}, \quad [a, g] = a^{-2} \cdot (a, 1) \circ \text{id}, \quad [a, h] = (a^{-1}, 1)^a \circ \text{id}, \quad (3)$$

$$[a^2, c] = [a^2, f] = a^{-4}, \quad (4)$$

$$[a^2, h] \equiv (a^2, 1) \circ \text{id} \pmod{\text{cost}(2)}, \quad [a^2, g] \equiv (1, a^2) \circ \text{id} \pmod{\text{cost}(2)}. \quad (5)$$

3. Основные леммы. На протяжении этого пункта

$$v = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n), \quad \{f_n, g_n, h_n\} = \{f, g, h\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(f_n)_{(v)} = f \circ \text{id}^{(n)}, \quad (g_n)_{(v)} = g \circ \text{id}^{(n)}, \quad (h_n)_{(v)} = h \circ \text{id}^{(n)}.$$

Далее, пусть $a_n \in \text{cost}(v)$ – такой элемент, что $(a_n)_{(v)} = a \text{id}^{(n)}$. Он существует в силу леммы 1.

ЛЕММА 2. Пусть $1 \neq b \in \text{cost}(n)$ и $b_{(u)} \in \{1, a^{\pm 1} \circ \text{id}^{(n)}\}$ для всех вершин и длины n , $n = 1, 2, \dots$, $B = [\bar{b}^H, H]$. Тогда

$$B \geq \text{cost}(n+1) \cdot \text{gr}((1, \dots, 1, \underbrace{a^2}_i, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n)} \mid 1 \leq i \leq 2^n). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть среди “координат” элемента b есть хотя бы одна, равная 1.

а) Не теряя общности, считаем, что

$$b = (a, 1, *, \dots, *) \circ \text{id}^{(n)}, \quad * \in \{1, a^{\pm 1}\}.$$

Рассмотрим коммутатор

$$[b, a_{n-1}^{-1}] = ([(a, 1) \circ \text{id}, a^{-1}], 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n-1)}.$$

Так как $a = (cg, gc) \circ \text{id}$, то $[(a, 1) \circ \text{id}, a^{-1}] = [(a, gc), 1] \circ \text{id}$. Из формул (2) следует, что $[a, gc] = (1, a) \circ \text{id}$. Следовательно,

$$[b, a_{n-1}^{-1}] = (1, a, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n+1)} \in B.$$

Поскольку подгруппа B нормальна и группа H действует транзитивно на вершинах длины n , то $B \geq \text{cost}(n+1)$. (Этими соображениями мы в дальнейшем будем часто пользоваться.) Отсюда и из соотношения 1) следует, что

$$(1, \dots, 1, \underbrace{a^4}_i, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n)} \in B, \quad 1 \leq i \leq 2^n. \quad (7)$$

б) Пусть $n = 1$, тогда

$$b = (a, 1) \circ \text{id} \quad \text{и} \quad [h, b] = (a^2, 1) \circ \text{id}, \quad (a^2, 1)^c \circ \text{id} = (1, a^2) \circ \text{id},$$

что доказывает включение (6).

в) Пусть $n \geq 2$, тогда

$$b = (a, 1, a^\alpha, a^\beta, *, \dots, *) \circ \text{id}^{(n)}, \quad \alpha, \beta \in \{0, \pm 1\}.$$

Рассмотрим коммутатор

$$[b, a_{n-2}] = ([(a, 1) \circ \text{id}, cg], [(a^\alpha, a^\beta) \circ \text{id}, gc], 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n-1)}.$$

По модулю костабilizатора $\text{cost}(n+1)$ он равен $(a, a, a^{\alpha+\beta}, a^{\beta-\alpha}, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n)}$. Отсюда, учитывая (3), получаем

$$[g_n, [b, a_{n-2}]] \equiv (a^2, a^2, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n)} \pmod{\text{cost}(n+1)}, \quad (8)$$

$$[f_n, [b, a_{n-2}]] = (a^2, 1, a^{2\alpha}, a^{-2\alpha}, 1, \dots, 1) \circ \text{id}. \quad (9)$$

Так как подгруппа B нормальна и элементы (7)–(9) ей принадлежат, то и $(a^2, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n)} \in B$. Следовательно, (6) выполняется.

Пусть теперь все “координаты” элемента b неединичные.

г) Допустим $b = (a, \dots, a) \circ \text{id}^{(n)}$, тогда

$$[f_n, b] = (a^2, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n)} \in B,$$

$$a_n \cdot [h_n, b] \cdot a_n^{-1} = ((a, 1) \circ \text{id}, a^2, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n)} \in B.$$

Следовательно, $(a, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n+1)} \in B$ и (6) очевидно.

д) Пусть b – произвольный элемент со всеми неединичными координатами. Включение (6) докажем индукцией по n . Так как $h \cdot (a^{-1}, a) \circ \text{id} \cdot h = (a, a) \circ \text{id}$, то случай $n = 1$ рассмотрен в пункте г). Заменяя b на b^{-1} , можем считать, что $b_{(v)} = a^{-1} \circ \text{id}^{(n)}$. Рассматривая как и в пункте а) коммутатор $[a_{n+1}, b]$, получаем включение

$$B \geq \text{cost}(n+2). \quad (10)$$

Пусть u – вершина длины 1. Очевидно,

$$B_{(u)} \geq [\overline{b}^{\text{st}(1)}, \text{st}(1)]_{(u)} = [\overline{b_{(u)}}^{H \circ \text{id}}, H \circ \text{id}].$$

Так как элемент $b_{(u)} \in H \circ \text{id}$ имеет тот же вид, что и элемент $b \in H$, то по предположению индукции существуют элементы вида

$$x_j = (\underbrace{\theta_j, 1, \dots, 1}_{2^{n-1}}, *, \dots, *) \in B, \quad * \in K \circ \text{id}^{(n)}, \quad j = 1, 2,$$

$$\theta_j = \begin{cases} (a, 1) \circ \text{id}^{(n+1)}, & j = 1, \\ (1, a) \circ \text{id}^{(n+1)}, & j = 2. \end{cases}$$

Вычисления показывают, что при $h = f_{n+1}$ получаем $[h, x_1] = (a^2, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n+1)}$, а при $h \neq f_{n+1}$ соответственно $[h, x_2] = (1, a^2, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n+1)}$. Следовательно, в любом случае имеем включение

$$(1, \dots, 1, \underbrace{a^2}_i, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n+1)} \in B, \quad 1 \leq i \leq 2^{n+1}.$$

Поэтому, учитывая (1) и (10) получаем (7).

е) Пусть $n = 2$. С точностью до взятия обратного и сопряженного можем считать, что $b = (a, a, a, a) \circ \text{id}^{(2)}$ или $b = (a, a^{-1}, a, a) \circ \text{id}^{(2)}$. Первый случай рассмотрен нами в пункте г). Для второго случая рассуждения из пункта г) тоже проходят.

ж) Пусть $n \geq 3$. По предположению индукции существует элемент

$$x = (\underbrace{a^2, 1, \dots, 1}_{2^{n-1}}, *, \dots, *) \circ \text{id}^{(n)} \in B, \quad * \in K.$$

Так как подгруппа L транзитивно действует на вершинах фиксированной длины поддеревьев $T_{(0)}$ и $T_{(1)}$ (см. лемму 6), то, коммутируя элемент x с элементами подгруппы $(L, 1) \circ \text{id}$ и учитывая (7), получаем, что

$$(a^2, 1, \dots, 1, \underbrace{a^2}_i, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n)} \in B, \quad 2 \leq i \leq 2^{n-2}.$$

Сопрягая полученные элементы при помощи элементов c, cf, cfc , в свою очередь получаем при $j = 1 + k2^{n-2}$, $k = 0, 1, 2, 3$,

$$(1, \dots, 1, \underbrace{a^2}_j, 1, \dots, 1, \underbrace{a^2}_i, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n)} \in B, \quad j < i < j + 2^{n-2}. \quad (11)$$

Умножая элемент b на подходящие элементы из (11) и учитывая (7), получим, что подгруппа $\overline{b}^H$ содержит элемент, сохраним за ним обозначение b , вида

$$b = (b_1, b_2, b_3, b_4), \quad b_i \in \{(a, \dots, a) \circ \text{id}^{(n-2)}, (a^{-1}, a, \dots, a) \circ \text{id}^{(n-2)}\}.$$

з) Если $b_1 = b_2$ или $b_3 = b_4$, то переходя, если нужно, к элементу bcb , можем считать, что $b_3 = b_4$. Тогда

$$[f_n, b] = [(f_n)_{(00)}, b_1], [c^\varepsilon \circ \text{id}^{(2)}, b_2], 1, 1) \in B, \quad \varepsilon \in \{0, 1\}.$$

Нетрудно видеть, что для любого элемента b_2 и любого $\varepsilon \in \{0, 1\}$ элемент $(1, [c^\varepsilon \circ \text{id}^{(2)}, b_2], 1, 1)$ представим в виде произведения элементов вида (11). Поэтому

$$[f_n, b] \equiv (a^2, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n)} \pmod{B}.$$

Следовательно,

$$(1, \dots, 1, \underbrace{a^2}_i, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n)} \in B, \quad 1 \leq i \leq 2^n.$$

Рассматривая после этого коммутатор

$$[h_n, b] = ((a^{\pm 1}, 1)^a \circ \text{id}, a^2, *, \dots, *) \circ \text{id}^{(n)}, \quad * \in \{1, a^{\pm 2}\},$$

видим, что $(a, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(n+1)} \in B$, и, значит, утверждение леммы верно.

и) Если $b_1 \neq b_2$ и $b_3 \neq b_4$, то для элемента $f_n b f_n = (b'_1, b'_2, b'_3, b'_4)$ имеют место равенства

$$b'_1 = b_2, \quad b'_2 \equiv b_2 \pmod{\text{формула (11)}}, \quad \{b'_3, b'_4\} = \{b_3, b_4\}.$$

Следовательно, мы оказываемся в условиях пункта з). Лемма доказана.

Подгруппу, встретившуюся нам в лемме 2, исследуем более детально.

ЛЕММА 3. Пусть

$$N_1 = \text{gr}(a^2, (x, y) \mid x, y \in K \circ \text{id}),$$

$$N_{m+1} = \text{gr}((1, \dots, 1, \underbrace{a^2}_i, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(m)} \mid 1 \leq i \leq 2^m) \cdot \text{cost}(m+1),$$

$$m = 1, 2, \dots$$

Тогда имеют место соотношения

$$N_m \triangleleft H, \quad (N_m)_{(u)} = N_{m-k} \circ \text{id}^{(k)}, \quad k = |u| < m, \quad m = 2, 3, \dots; \\ \text{cost}(m) < N_m < \text{cost}(m-1), \quad m = 2, 3, \dots; \quad (12)$$

$$N_m < \text{st}(m+1), \quad N_m \not\leq \text{st}(m+2), \quad m = 1, 2, \dots; \quad (13)$$

$$N_m / \text{cost}(m) \cong \mathbb{Z}_2^{2^{m-1}}, \quad \text{cost}(m) / N_{m+1} \cong \mathbb{Z}_2^{2^m}, \quad m = 2, 3, \dots; \quad (14)$$

$$N_m / N_{m+1} \cong \mathbb{Z}_2^{2^{m-1}} \oplus \mathbb{Z}_2^{2^m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО представляет собой прямую проверку с использованием тождеств (1)–(5).

ЛЕММА 4. *Коммутант группы Григорчука имеет вид*

$$[H, H] = \text{gr}((ch)^2, K). \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $K = \overline{(cf)^2}^H$ и $(cf)^2 = [c, f]$, $(ch)^2 = [c, h]$, то правая часть равенства (16) содержится в левой. С другой стороны, поскольку $H = \text{gr}(c, f, h)$, то

$$[H, H] = \overline{\{(cf)^2, (ch)^2\}}^H.$$

Поэтому достаточно проверить, что правая часть равенства (16) – нормальная подгруппа. Поскольку $K \triangleleft H$, то правая часть выдерживает сопряжения элементами c, h . Кроме того, $f(ch)^2 f = a^{-1} \cdot cha^{-1} hc \cdot (ch)^2$. Лемма доказана.

Как принято в теории групп, члены нижнего центрального ряда будем называть центрами, обозначая n -й централ через $\gamma_n H$, или, короче, просто γ_n . Напомним, что $\gamma_1 = H$, $\gamma_{n+1} = [\gamma_n, H]$.

Отметим, что в [2] доказан изоморфизм $H/\gamma_2 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

ЛЕММА 5. *Для третьего центра имеют место равенства*

$$\gamma_3 = N_1, \quad \gamma_2/\gamma_3 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $a \in \gamma_2$, то $\gamma_3 \geq N_1$ (лемма 2). Рассматривая коммутаторы от порождающих групп γ_2 и H , видим, что все они лежат в N_1 . Далее, так как $a(ch)^2 \notin \gamma_3$, то $\gamma_2/\gamma_3 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Подгруппа $\text{gr}(c, L)$ действует транзитивно на вершинах фиксированной длины дерева T . В частности, подгруппа $F = \text{gr}(g^c, \bar{h}^{\text{st}(1)})$ действует транзитивно на вершинах фиксированной длины поддерева $T_{(0)}$ и тождественно на поддереве $T_{(11)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Так как $L = \text{gr}(f, f^c, (1, a) \circ \text{id}, (a, 1) \circ \text{id})$, то главные срезки подгруппы L равны $\text{gr}(c, g, a) \circ \text{id}$. Используя элемент c и элемент $c \circ \text{id}$ из главной срезки подгруппы L , мы можем произвольно изменить два первых символа у любой вершины дерева T . Далее, главные срезки подгруппы $\text{gr}(g, g^c, a)$ равны $\text{gr}(c, h, cg) \circ \text{id} = H \circ \text{id}$. Поскольку группа H действует транзитивно на вершинах фиксированной длины, то первое утверждение доказано.

б) Так как $F_{(0)} = \text{gr}(c, L) \circ \text{id}$, $F_{(1)} = \text{gr}(h \circ \text{id})$ и $h = (f, 1) \circ \text{id}$, то утверждение “В частности...” очевидно. Лемма доказана.

4. Нижний центральный ряд. В дальнейшем нам будет удобно рассматривать фактор-группу N_m/N_{m+1} как векторное пространство над полем $GF(2)$. Пространство над полем $GF(2)$ размерности 2^m обозначим W_m , а его гиперплоскость, ортогональную вектору $(1, 1, \dots, 1)$, обозначим V_m .

Пусть $1 \neq b \in \text{cost}(n)$, $b_{(u)} \in \{1, a^{\pm 1} \circ \text{id}^{(n)}\}$, $|u| = n$; т.е. b – элемент из формулировки леммы 2. Назовем его a -элементом. Число n назовем длиной элемента b и обозначим $|b|$. При $|b| = 0$, очевидно, $b = a^{\pm 1}$. По a -элементу b построим последовательность $\{b_i\}$ a -элементов:

$$b_i = \underbrace{(b, 1, \dots, 1, b)}_{2^i} \circ \text{id}^{(i)}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что $b_0 = b$, $|b_i| = |b| + i$, $b_i \in \text{cost}(|b| + i)$.

Для описания централов γ_n нам понадобятся пространства $W_{(b,l)} \cong \overline{W}_{(b,l)} \cong W_l$, $l \in \mathbb{N}$, b – a -элемент, где пространство $W_{(b,l)}$ порождается векторами

$$a_i = a_{i,l,b} = (1, \dots, 1, \underbrace{b}_i, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(l)} \cdot N_{l+|b|+1}, \quad 1 \leq i \leq 2^l, \quad (17)$$

а пространство $\overline{W}_{(b,l)}$ – векторами

$$\bar{a}_i = \bar{a}_{i,l,b} = (1, \dots, 1, \underbrace{b^2}_i, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(l)} \cdot N_{l+|b|+2}, \quad 1 \leq i \leq 2^l. \quad (18)$$

Через $V_{(b,l)}$ и $\overline{V}_{(b,l)}$ обозначим их гиперплоскости, ортогональные векторам

$$(b, \dots, b) \circ \text{id}^{(l)} \cdot N_{l+|b|+1} \quad \text{и} \quad (b^2, \dots, b^2) \circ \text{id}^{(l)} \cdot N_{l+|b|+2}$$

соответственно. Отметим некоторые очевидные соотношения:

$$V_{(b,l)} \cong \overline{V}_{(b,l)} \cong V_l, \quad V_{(b,1)}^{2^l} = W_{(b,1)}, \quad \overline{V}_{(b,1)}^{2^l} = \overline{W}_{(b,1)}, \quad W_{(b^2,l)} \neq \overline{W}_{(b,l)}.$$

Из (15) следует, что

$$N_m/N_{m+1} = W_{(a,m)} \oplus \overline{W}_{(a,m-1)}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место соотношения:*

$$\begin{aligned} H/\gamma_2 &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \\ \gamma_2/\gamma_3 &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \\ \gamma_n/\gamma_{n+1} &\cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{при } 2^m + 1 \leq n < 3 \cdot 2^{m-1} + 1, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{при } 3 \cdot 2^{m-1} + 1 \leq n < 2^{m+1} + 1, \end{cases} \end{aligned}$$

где $m = 1, 2, \dots$. Кроме того, $\gamma_{2^m+1} = N_m$ и

$$N_{m+1} \leq \gamma_n \leq N_m \quad \text{при } 2^m + 1 \leq n \leq 2^{m+1} + 1, \quad m = 1, 2, \dots$$

СЛЕДСТВИЕ. *Имеют место равенства:*

$$\log_2 |H : \gamma_2| = 3, \quad \log_2 |H : \gamma_3| = 5,$$

$$\log_2 |H : \gamma_{n+1}| = \begin{cases} 2n - 2^{m-1} + 2 & \text{при } 2^m + 1 \leq n < 3 \cdot 2^{m-1}, \\ n + 2^m + 2 & \text{при } 3 \cdot 2^{m-1} + 1 \leq n < 2^{m+1}, \end{cases}$$

где $n = 3, 4, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия получается после несложных арифметических вычислений из равенства

$$|H : \gamma_{n+1}| = |H : \gamma_2| \cdot |\gamma_2 : \gamma_3| \cdot \dots \cdot |\gamma_n : \gamma_{n+1}|,$$

лемм 4, 5 и теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1. Первые два изоморфизма доказаны в леммах 4 и 5.

а) Пусть $\gamma_n = N_m$, $m = 1, 2, \dots$. Тогда в силу леммы 2 $\gamma_{n+1} \geq N_{m+1}$. Поэтому рассмотрение ведем в фактор-группе $N_m/N_{m+1} \cong W_m \oplus W_{m-1}$. Более точно, имеет место совпадение абелевых подгрупп

$$N_m/N_{m+1} = W_{(a,m)} \oplus \overline{W}_{(a,m-1)}.$$

б) Из формул (1)–(5) следует, что подпространства $W_{(a,m)}$ и $\overline{W}_{(a,m-1)}$ пространства N_m/N_{m+1} инвариантны относительно сопряжения элементами группы H . Поэтому дальнейшие рассмотрения ведем только для подпространства $W_{(a,m)}$. Для подпространства $\overline{W}_{(a,m-1)}$ все получается абсолютно аналогично с заменой во всех формулах элементов $a \circ \text{id}^{(m)}$ на $a^2 \circ \text{id}^{(m-1)}$, а параметра m на параметр $m - 1$. Так как дальнейшее рассмотрение будет вестись в фактор-пространстве по подпространству $\overline{W}_{(a,m)}$, то вместо знака равенства мы будем применять знак сравнения $\equiv$.

в) Вычислим централ γ_{n+1} . Так как группа H действует транзитивно на вершинах фиксированной длины дерева T , то для любого элемента

$$(a, 1, \dots, 1, \underbrace{a}_i, 1, \dots, 1) \circ \text{id}^{(m)} \in W_{(a,m)}, \quad 2 \leq i \leq 2^m,$$

найдется $x \in H$ такой, что коммутатор $[a_1, x]$ (где $a_1 = a_{1,m,a}$, см. формулу (17)) равен этому элементу. Следовательно, имеет место включение абелевых групп $\gamma_{n+1}/N_{m+1} \geq V_{(a,m)}$.

Так как $\dim W_{(a,m)} - \dim V_{(a,m)} = 2^m - (2^m - 1) = 1$, то фактически $\gamma_{n+1}/N_{m+1} \equiv V_{(a,m)}$, ибо в противном случае ряд централов стабилизируется (ведь в подпространстве с чертой все происходит аналогично).

г) Поскольку любое пространство $W_{(b,l)}, V_{(b,l)}$, где $b - a$ -элемент, содержит, очевидно, a -элементы, то в силу леммы 2 верны включения

$$[W_{(b,l)}, H] \geq N_{m+1}, \quad [V_{(b,l)}, H] \geq N_{m+1}.$$

Поэтому при рассмотрении последующих централов мы можем оставаться в фактор-группе N_m/N_{m+1} .

д) Рассмотрим централ γ_{n+2} . Если $m = 1$, то $\gamma_{n+2} = N_2$, поскольку

$$\dim V_{(a,m)} = 1, \quad \dim \bar{V}_{(a,m-1)} = 0.$$

Так как $\gamma_3 = N_1$, то $\gamma_5 = N_2$.

Пусть поэтому $m > 1$. Сначала ограничимся подгруппой $[\gamma_{n+1}, F]$ централа γ_{n+2} , где F – подгруппа из леммы 6. Пусть

$$x = a_m = (a, 1, \dots, 1, a) \circ \text{id}^{(m)} \in \gamma_{n+1}.$$

Из свойств подгруппы F и рассуждений пункта в) настоящего доказательства получаем включение

$$[\text{gr}(x), F]/N_{m+1} \geq V_{(a,m-1)} \oplus \{0\}. \quad (19)$$

Сопрягая правую часть элементами группы H , транзитивно действующей на множестве вершин фиксированной длины, мы, не выходя за пределы централа γ_{n+2} , получаем включение

$$\gamma_{n+2}/N_{m+1} \geq V_{(a,m-1)}^2.$$

Так как

$$\dim V_{(a,m)} - \dim V_{(a,m-1)}^2 = (2^m - 1) - 2(2^{m-1} - 1) = 1,$$

то фактически $\gamma_{n+2}/N_{m+1} \equiv V_{(a,m-1)}^2$, ибо иначе ряд централов стабилизируется.

е) Пусть мы по-прежнему находимся в фактор-группе N_m/N_{m+1} и для некоторого централа имеет место формула

$$\gamma_{n+s}/N_{m+1} \equiv V_{(b,l)}^{2^k}.$$

Из подсчета размерностей следует, что $k + l + |b| = m$.

е1) Если $l = 1$, то $V_{(b,l)}^{2^k} = W_{(b_1,k)}$ и применимы рассуждения пункта в). Следовательно,

$$\gamma_{n+s+1}/N_{m+1} \equiv V_{(b_1,k)}.$$

е2) Если $l > 1$, но $k = 0$, то проходят рассуждения пункта д), и поэтому

$$\gamma_{n+s+1}/N_{m+1} \equiv V_{(b,l-1)}^2.$$

е3) Пусть $l > 1$, $k > 0$, $v = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k$. В формуле (19) вместо

подгруппы F и элемента x берем такие подгруппу $F_v \leq \text{st}(v)$ и элемент $x_v \in \text{st}(v) \cap \gamma_{n+s}$, что

$$(F_v)_{(v)} = F \circ \text{id}^{(k)}, \quad (x_v)_{(v)} = b_l \circ \text{id}^{(k)}, \quad b_l = (b, 1, \dots, 1, b) \circ \text{id}^{(l)}. \quad (20)$$

После чего формула (19) дает нам включение

$$\gamma_{n+s+1}/N_{m+1} \geq [\text{gr}(x_v), F_v] \geq V_{(b,l-1)} \oplus \underbrace{\{0\} \oplus \dots \oplus \{0\}}_{2^{k+1}-1}.$$

Сопрягая его правую часть элементами группы H , транзитивно действующей на вершинах фиксированной длины, получаем, что

$$\gamma_{n+s+1}/N_{m+1} \geq V_{(b,l-1)}^{2^{k+1}}. \quad (21)$$

В отличие от случая $k = 0$ здесь равенства нет!

е4) Рассмотрим подпространство $W_{(b_l,k)}$ пространства из правой части включения (21), где элемент b_l из формулы (20). А также его гиперплоскость $V_{(b_l,k)}$. Как и в пункте в) получаем включение $\gamma_{n+s+1}/N_{m+1} \geq [W_{(b_l,k)}, H] \geq V_{(b_l,k)}$. Так как

$$V_{(b_l,k)} \cap V_{(b,l-1)}^{2^{k+1}} = \{0\}, \quad \text{то} \quad \gamma_{n+s+1}/N_{m+1} \geq V_{(b,l-1)}^{2^{k+1}} \oplus V_{(b_l,k)}.$$

Фактически же вместо знака $\geq$ должно быть $\equiv$, так как

$$\dim V_{(b,l)}^{2^k} - \dim (V_{(b,l-1)}^{2^{k+1}} \oplus V_{(b_l,k)}) = 2^k(2^l - 1) - (2^{k+1}(2^{l-1} - 1) + 2^k - 1) = 1,$$

и в противном случае ряд централов стабилизировался бы.

е5) Вычислим централ γ_{n+s+2} . Возвращаясь к началу пункта е3) и используя то, что в подпространстве $V_{(b_l,k)}$ есть необходимые векторы x_v , получаем включение $\gamma_{n+s+2}/N_{m+1} \geq V_{(b,l-1)}^{2^{k+1}}$. Применив к подпространству $V_{(b_l,k)}$ рассуждения пункта д), получаем включение $[V_{(b_l,k)}, H] \geq V_{(b_l,k-1)} \oplus V_{(b_l,k-1)}$. Следовательно,

$$\gamma_{n+s+2}/N_{m+1} \geq V_{(b,l-1)}^{2^{k+1}} \oplus V_{(b_l,l-1)}^2. \quad (22)$$

Так как опять разность соответствующих размерностей равна 1, то фактически в (22) нужно ставить знак $\equiv$.

ж) Продолжая вычисления, мы на каждом шаге будем получать только подпространства вида $W_{(b,l)}, V_{(b,l)}$, (и соответствующие подпространства с чертой). При этом, если ограничиться только подпространством $W_{(a,m)}$, то размерность на каждом шаге будет падать на 1. Поскольку $\dim W_{(a,m)} = 2^m$, $\dim \overline{W}_{(a,m-1)} = 2^{m-1}$, то первые 2^{m-1} последовательных факторов нижнего центрального ряда (начиная с γ_n/γ_{n+1}) будут иметь размерность 2 и, значит, окажутся изоморфными группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, а последующие 2^{m-1} факторов (когда подпространство $\overline{W}_{(a,m-1)}$ уже будет исчерпано), будут иметь размерность 1 и соответственно будут изоморфны группе $\mathbb{Z}_2$.

Так как $\gamma_3 = N_1$, то $\gamma_{3+2} = N_2$ и $\gamma_n = N_m$, где $n = 3 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1} = 2^m + 1$, $m = 1, 2, \dots$.

Учитывая сказанное, формулы теоремы 1 получаются простым арифметическим подсчетом размерностей. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n > 3$ – натуральное число. Ступени нильпотентности фактор-групп

$$H/\text{st}(n), \quad H/\text{cost}(n)$$

задаются функциями $2^{m-1} + 1$ и $2^{m+1} + 1$ соответственно. А их ступени разрешимости равны $(n+3)/2$ при n нечетном и соответственно $(n+2)/2$ и $(n+4)/2$ при n четном.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о ступени нильпотентности следует из теоремы 1 и формул (12), (13). Далее, в [2] доказано, что $H^{(n)} = \text{cost}(2n-3)$, $n = 3, 4, \dots$, где $H^{(n)}$ – n -й коммутант группы Григорчука. Так как очевидно

$$\text{cost}(2n-3) < \text{st}(2n-2) \quad \text{и} \quad \text{cost}(2n-3) \not\leq \text{st}(2n-1),$$

то отсюда получаем утверждение о ступени разрешимости. Теорема доказана.

Челябинский государственный университет

Поступило

13.07.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Григорчук Р. И. К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функцион. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. С. 273–276.
- [2] Рожков А. В. Централизаторы элементов в одной группе автоморфизмов деревьев // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 6. С. 85–102.
- [3] Рожков А. В. К теории групп алешинского типа // Матем. заметки. 1986. Т. 40. № 5. С. 572–589.