Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Рыбаков, Об интегрируемости по Петтису
стоуновского преобразования, *Матем. заметки*,
1996, том 60, выпуск 2, 238–253

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1822>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 11:15:44

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПО ПЕТТИСУ СТОУНОВСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В. И. Рыбаков

В заметке рассмотрен вопрос об интегрируемости в смысле Петтиса (кратко: P -интегрируемости) функций $\rho(f)$ и стоуновского преобразования $\hat{f}$ (определения ниже) для P -интегрируемой функции f , а также устанавливается связь P -интегрируемости $\hat{f}$ и вопроса о регулярной осцилляции некоторого семейства функций. Вопрос о P -интегрируемости функций $\rho(f)$ и $\hat{f}$ рассматривался, например, в [1, 6.2.1] (при выполнении дополнительной аксиомы), в [2, п. 5, в частности, теорема 5.6].

Укажем основные используемые понятия. Через X обозначим банахово пространство (над $\mathbb{R}$), а через X^* – его сопряженное; для $x \in X$, $x^* \in X^*$ действие x^* на x обозначаем $x^*(x)$, либо $\langle x^*, x \rangle$ (и $\langle x, x^* \rangle$). Напомним (это неоднократно будет использовано), что X^{***} есть топологическая прямая сумма подпространств X^* и $X^\perp = \{\xi \in X^{***} : \langle \xi, x \rangle = 0, x \in X\}$ (X рассматривается как подпространство X^{**}). Если Y – нормированное пространство и $T: X \rightarrow Y$ – линейное непрерывное отображение, то T^* – сопряженное к нему отображение из Y^* в X^* . $B(X)$ – единичный шар пространства X , т.е. $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Имея семейство функций Y на множестве L , будем через $\sigma(L, Y)$ обозначать слабую топологию в L , при которых все функции из Y непрерывны на L . В частности, для банахова пространства X топологию $\sigma(X^*, X)$ на X^* (или на каком-нибудь его подмножестве) обозначаем через w^* . Все топологические пространства, встречающиеся в формулировках, предполагаются отделимыми.

Под мерой понимаем неотрицательную счетно аддитивную функцию множества; если μ – мера, то μ^* – внешняя мера, порожденная μ . Не указывая каждый раз, через $S = (S, \Sigma, \mu)$ обозначаем пространство с конечной полной мерой μ на σ -алгебре Σ подмножеств множества S . Для топологического пространства L отображение $f: S \rightarrow L$ называем *измеримым по Борелю*, если прообраз относительно f каждого борелевского множества из L будет принадлежать Σ . Для измеримого по Борелю отображения $f: S \rightarrow L$ определим $f\mu$ – образ меры μ , как такую борелевскую меру на L , что $f\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$ для всякого борелевского в L множества B .

Если $A \in \Sigma$, то $\mu|_A$ – мера, определенная для $E \in \Sigma$ с $E \subset A$ равенством $\mu|_A(E) = \mu(E)$. Не напоминая определение интеграла Петтиса (оно в настоящее время имеется во многих работах), отметим, что определение интеграла Петтиса и исследование его свойств имеется в [1]. Условимся для функции $f: S \rightarrow X$ ее P -интеграл по множеству E обозначать через $(P) \int_E f d\mu$, а также через $m_f(E)$, тогда $m_f(\Sigma) = \{m_f(E) : E \in \Sigma\}$ – область значений неопределенного интеграла Петтиса.

Пусть ρ – лифтинг в $L_\infty(\mu)$, и $f: S \rightarrow X$ – ограниченная слабо измеримая функция. Тогда определена функция $\rho(f): S \rightarrow X^{**}$ такая, что для $s \in S$ $\langle \rho(f)(s), x^* \rangle = \rho(\langle x^*, f(\cdot) \rangle)(s)$, $x^* \in X$ (в дальнейшем функцию $\langle x^*, f(\cdot) \rangle$, определенную на S , обозначаем через x^*f). Если $\hat{S}$ – спектр $L_\infty(\mu)$, т.е. множество ненулевых линейных мультипликативных функционалов на $L_\infty(\mu)$, наделенное топологией $\sigma(L_\infty^*(\mu), L_\infty(\mu))$, то $\hat{S}$ – компакт и функция $\hat{f}: \hat{S} \rightarrow X^{**}$, называемая стоуновским преобразованием функции f , такова, что для $t \in \hat{S}$ $\langle \hat{f}(t), x^* \rangle = \langle t, x^*f \rangle$, $x^* \in X^*$ (см. [1, 1.5, 3.4]). Функция $\rho(f): S \rightarrow (X^{**}, w^*)$ измерима по Борелю [1, 1.4.4], а $\hat{f}: \hat{S} \rightarrow (X^{**}, w^*)$ непрерывна [1, 1.5.1], причем $\rho(f)(S) \subset \hat{f}(\hat{S})$ [1, 1.5].

Для $E \in \Sigma$ пусть $\hat{E} = \{t \in \hat{S} : \langle t, \mathbf{1}_E \rangle = 1\}$, где $\mathbf{1}_E$ – характеристическая функция множества E . Как показано в [1, 1.4.1], существует радонова мера $\hat{\mu}$ (единственная) на $\hat{S}$ такая, что, в частности,

$$\int \mathbf{1}_{\hat{E}} d\hat{\mu} = \int \mathbf{1}_E d\mu, \quad E \in \Sigma.$$

ЛЕММА 1. Пусть K – компактное пространство с радоновой мерой λ на нем и A – какое-либо счетное множество. Предположим, что f – такая вещественная функция на $K \cup A$, для которой $f(a) = 0$, $a \in A$, и $\lambda^*(B) > 0$, где $B = \{t \in K : f(t) > b\}$. Если f является пределом (в топологии поточечной сходимости на $K \cup A$) какого-либо семейства $\mathcal{F}$ функций, непрерывных на K , равномерно ограниченного на $K \cup A$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такое счетное $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ и такое $B_0 \subset B$, что $\lambda^*(B \setminus B_0) < \varepsilon$ и можно образовать направленность из функций, содержащихся в $\mathcal{F}_0$, сходящуюся на $K \cup A$, так что если f_0 – предел этой направленности, то $f_0(a) = 0$, $a \in A$, и $f_0(t) \geq b$, $t \in B_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ и $\lambda^*(B) = c$. Выберем такую точку $t_1 \in B$, что $\lambda^*(U \cap B) > 0$ для всякой окрестности U точки t_1 . Каждую точку $t \in B$ покроем открытым множеством $U_{t,1}$ таким, что для некоторой $f_{t,1} \in \mathcal{F}$ с $f_{t,1}(t_1) > b$ и $|f_{t,1}(a_1)| < 1/2$ $U_{t,1} = \{s \in K : f_{t,1}(s) > b\}$. Из этого открытого покрытия множества B выделим такое

конечное подсемейство $U_{1,1}, \dots, U_{k_1,1}$, что

$$\lambda^* \left(B \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} U_{i,1} \right) < \frac{1}{10} \varepsilon.$$

Положим

$$E_1 = B \cap \bigcup_{i=1}^{k_1} U_{i,1}.$$

Пусть каждое из этих множеств $U_{i,1}$ соответствует функции $f_{i,1} \in \mathcal{F}$, т.е. $U_{i,1} = \{s \in K : f_{i,1}(s) > b\}$, $i = 1, \dots, k_1$, и пусть $F_1 = \{f_{1,1}, \dots, f_{k_1,1}\}$, а

$$V_1 = \bigcap_{i=1}^{k_1} U_{i,1}.$$

V_1 является окрестностью t_1 , а по выбору $t_1 - \lambda^*(V_1 \cap B) > 0$; при этом для всякой $(s, t) \in (V_1 \cap B) \times E_1$ найдется $f \in F_1$, что $f(s) > b$, $f(t) > b$ (и $|f(a_1)| < 1/2$).

Прежде чем производить дальнейшее образование множеств, осуществим необходимые приготовления. С этой целью множество порядковых чисел, меньших ω_1 , т.е. наименьший счетный ординал, разобьем порядковыми же числами $1 = \alpha_1 < \dots < \alpha_d < \alpha_{d+1} < \dots$ так, что каждое из чисел α_d не является предельным и между каждой соседней парой их — α_d, α_{d+1} — заключено бесконечное множество предельных ординалов. Занумеруем эти предельные ординалы, лежащие между α_d и α_{d+1} (их, очевидно, счетное множество), числами натурального ряда.

Продолжим построение множеств в доказательстве леммы. Предположим, для каждого ординала $1 \leq \alpha < \gamma$ ($\gamma < \omega_1$) построены множества V_α, E_α и конечное подсемейство $F_\alpha \subset \mathcal{F}$ такие, что $E_\alpha \supset E_\beta$ при $\alpha < \beta < \gamma$ и для всякой $(s, t) \in (V_\alpha \cap B) \times E_\alpha$ найдется $f \in F_\alpha$, что $f(s) > b$, $f(t) > b$ (и $|f(a_1)| < 1/2$). Причем имеем для $\alpha \geq 1$, не являющегося предельным ординалом,

$$\lambda^* \left[V_\alpha \cap \left(B \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta \right) \right] > 0, \quad (1)$$

$$\lambda^*(E_\alpha \setminus E_{\alpha+1}) < \frac{1}{10} \cdot \frac{\varepsilon}{c} \lambda^* \left[V_\alpha \cap \left(B \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta \right) \right], \quad (2)$$

и для любого ординала $\alpha < \gamma$, считая $E_0 = B$,

$$\sum_{0 \leq \beta < \alpha} \lambda^*(E_\beta \setminus E_{\beta+1}) \leq \frac{1}{10} \varepsilon + \frac{1}{10} \cdot \frac{\varepsilon}{c} \sum_{1 \leq \beta < \alpha} \lambda^* \left[V_\beta \cap \left(B \setminus \bigcup_{\delta < \beta} V_\delta \right) \right]. \quad (3)$$

Пусть

$$\lambda^* \left(B \setminus \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha \right) \geq \frac{1}{10} \varepsilon,$$

в противном случае процесс образования множеств E_α, F_α считаем завершённым и ниже будет указано как поступать дальше. Предположим, γ не является предельным ординалом, т.е. $\gamma = \delta + 1$. Если при этом δ также не является предельным, то из (1)

$$\lambda^* \left[V_\delta \cap \left(B \setminus \bigcup_{\alpha < \delta} V_\alpha \right) \right] > 0.$$

Выберем тогда

$$t_\gamma \in B \setminus \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha$$

так, чтобы для всякой окрестности U точки t_γ

$$\left[U \cap \left(B \setminus \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha \right) \right] > 0. \quad (*)$$

Каждую точку $t \in E_\delta$ покроем открытым множеством $U_{t,\gamma}$ таким, что для некоторой $f_{t,\gamma} \in \mathcal{F}$ с $f_{t,\gamma}(t_\gamma) > b$ и $|f_{t,\gamma}(a_1)| < 1/2$ выполнено $U_{t,\gamma} = \{s \in K : f_{t,\gamma}(s) > b\}$. Из этого покрытия множества E_δ выделим конечное подсемейство $U_{1,\gamma}, \dots, U_{k_\gamma,\gamma}$ такое, что

$$\lambda^* \left(E_\delta \setminus \bigcup_{i=1}^{k_\gamma} U_{i,\gamma} \right) < \frac{1}{10} \cdot \frac{\varepsilon}{c} \lambda^* \left[V_\delta \cap \left(B \setminus \bigcup_{\alpha < \delta} V_\alpha \right) \right].$$

Если выделенные множества $U_{1,\gamma}, \dots, U_{k_\gamma,\gamma}$ соответствуют функциям $f_{1,\gamma}, \dots, f_{k_\gamma,\gamma}$, то положим

$$E_\gamma = E_\delta \cap \bigcup_{i=1}^{k_\gamma} U_{i,\gamma}, \quad F_\gamma = \{f_{1,\gamma}, \dots, f_{k_\gamma,\gamma}\},$$

$$V_\gamma = \bigcap_{i=1}^{k_\gamma} U_{i,\gamma},$$

при этом

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq \alpha < \gamma} \lambda^*(E_\alpha \setminus E_{\alpha+1}) &\leq \frac{1}{10}\varepsilon + \frac{1}{10} \cdot \frac{\varepsilon}{c} \sum_{\alpha < \gamma} \lambda^* \left[V_\alpha \cap \left(B \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta \right) \right] \\ &= \frac{1}{10}\varepsilon + \frac{1}{10} \cdot \frac{\varepsilon}{c} \lambda^* \left(B \cap \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Если же δ является предельным ординалом, то возьмем d так, что $\alpha_d < \delta < \alpha_{d+1}$ и натуральное число k , которым занумеровано δ при нумерации предельных ординалов, лежащих между α_d и α_{d+1} . Интервал

$$\left(0; \frac{1}{10} \cdot \frac{\varepsilon}{c} \lambda^* \left[V_{\alpha_d} \cap \left(B \setminus \bigcup_{\beta < \alpha_d} V_\beta \right) \right] - \lambda^*(E_{\alpha_d} \setminus E_{\alpha_d+1}) \right)$$

разбит на счетное число попарно непересекающихся множеств, имеющих положительную l -меру (l -мера Лебега на прямой), $\{e_{i,d}\}_{i=1}^\infty$ (это производится сразу же при образовании множеств E_{α_d} , V_{α_d} и E_{α_d+1}).

Теперь, как и выше, выбираем

$$t_\gamma \in B \setminus \bigcup_{\alpha < \gamma} V_\alpha,$$

для которой выполнено (*), затем покрываем E_δ открытыми множествами $U_{t,\gamma}$, описанными выше, и выделяем такое конечное подсемейство $U_{1,\gamma}, \dots, U_{k_\gamma,\gamma}$, чтобы

$$\lambda^* \left(E_\delta \setminus \bigcup_{i=1}^{k_\gamma} U_{i,\gamma} \right) < l(e_{k,d}).$$

Множества E_γ , F_γ , V_γ определяются и в этом случае подобно тому, как выше.

Если же γ — предельный ординал, то полагаем

$$E_\gamma = \bigcap_{\alpha < \gamma} E_\alpha,$$

$V_\gamma = \emptyset$ и F_γ — пустое семейство. Отметим, что при каждой из этих трех возможностей для γ , иных не может быть, выполняется (4).

Итак, система множеств E_α , F_α , V_α , удовлетворяющая требованиям (1)–(3), построена и для $\alpha = \gamma$. Согласно принципу трансфинитной

индукции, эта система может быть построена для любого ординала $\gamma < \omega_1$.

Из свойств конечной меры следует существование такого ординала $\gamma_0 < \omega_1$, что

$$\lambda^* \left(B \setminus \bigcup_{\alpha \leq \gamma_0} V_\alpha \right) < \frac{\varepsilon}{10}.$$

Тогда найдется конечное число ординалов $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq \gamma_0$, так что

$$\lambda^* \left(B \setminus \bigcup_{i=1}^k V_{\alpha_i} \right) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Положив

$$B_2 = E_{\gamma_0} \cap \bigcup_{i=1}^k V_{\alpha_i}, \quad \mathcal{F}_2 = \bigcup_{i=1}^k F_{\alpha_i},$$

имеем:

а) справедливо

$$\begin{aligned} \lambda^*(B \setminus B_2) &\leq \lambda^*(B \setminus E_{\gamma_0}) + \lambda^* \left(B \setminus \bigcup_{i=1}^k V_{\alpha_i} \right) \\ &\leq \lambda^*(B \setminus E_1) + \sum_{1 \leq \alpha < \gamma_0} \lambda^*(E_\alpha \setminus E_{\alpha+1}) + \frac{\varepsilon}{5} \\ &< \frac{\varepsilon}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{\varepsilon}{c} c + \frac{\varepsilon}{5} < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

(при оценке суммы внешних мер использовали (4)),

б) $\mathcal{F}_2$ – такое конечное подсемейство функций из $\mathcal{F}$, что для каждой пары $(s, t) \in B_2 \times B_2$ существует $f \in \mathcal{F}_2$ с $f(s) > b$, $f(t) > b$ и $|f(a_1)| < 1/2$.

Таким образом, фактически установлено следующее свойство о покрытии произведения двух множеств $B \times B$: для любого семейства непрерывных функций $G = \{g\}$ на K и произвольного множества $B \subset K$ с $\lambda^*(B) > 0$ такого, что

$$B \times B \subset \bigcup_{g \in G} \{s : g(s) > b\} \times \{t : g(t) > b\},$$

найдутся конечное подсемейство $G_2 \subset G$ и множество $B_2 \subset B$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^*(B \setminus B_2) < \varepsilon_1$ (ε_1 – произвольное наперед заданное положительное число) и для всякой $(s, t) \in B_2 \times B_2$ существует $g \in G_2$ с $g(s) > b$, $g(t) > b$. (На первом этапе от функций из вышепостроенного

семейства $\mathcal{F}_2$ требовалась и выполнимость условия $|f(a_1)| < 1/2$.) Предположим, это свойство о покрытии выполняется для произведения $3, \dots, n$ множеств (одинаковых).

Тогда могут быть построены множества $B_n \subset \dots \subset B_2 \subset B_1 = B$ с $\lambda^*(B_i \setminus B_{i+1}) < \varepsilon/2^i, i = 1, \dots, n-1$, конечные семейства $\mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$, так что для любых $i \in \{2, \dots, n\}$ и $(t_1, \dots, t_i) \in B_i^i$ – декартово произведение i экземпляров множества B_i – найдется $f \in \mathcal{F}_i$ с $f(t_k) > b$ ($k = 1, \dots, i$) и $|f(a_k)| < 1/i$ ($k = 1, \dots, i-1$). Установим существование множества $B_{n+1} \subset B_n$ и семейства $\mathcal{F}_{n+1}$ с подобными свойствами.

Возьмем произвольную точку $t \in B_n$ такую, что $\lambda^*(U \cap B_n) > 0$ для всякой окрестности U точки t . Покроем каждую точку $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n) \in B_n^n$ множеством $U_{\bar{t}} = \{s \in K : f(s) > b\}^n$ (здесь $U_{\bar{t}}$ – произведение n экземпляров множества $\{s \in K : f(s) > b\}$) для некоторой $f \in \mathcal{F}$ с $f(t) > b$ и $|f(a_i)| < 1/(n+1)$ ($i = 1, \dots, n$). Согласно предположению, свойство о покрытии выполняется для произведения из n сомножителей. Тогда из построенного покрытия множества B_n^n можно выделить такое конечное подсемейство $U_1, \dots, U_m$, что если выбранные U_k соответствуют функциям $f_k \in \mathcal{F}$ и

$$E_1 = B_n \cap \bigcup_{k=1}^m \{s : f_k(s) > b\},$$

то $\lambda^*(B_n \setminus E_1) < \frac{1}{10}\varepsilon/2^{n-1}$ и

$$E_1^n \subset \bigcup_{k=1}^m U_k^-.$$

Положим $F_1 = \{f_1, \dots, f_m\}$,

$$V_1 = \bigcap_{k=1}^m \{s \in K : f_k(s) > b\}.$$

Тогда для всякой $(s, t_1, \dots, t_n) \in (V_1 \cap B_n) \times E_1^n$ найдется функция $f \in F_1$, для которой $f(s) > b, f(t_i) > b$ и $|f(a_i)| < 1/(n+1)$ ($i = 1, \dots, n$). Продолжив этот процесс, как в доказательстве первой части леммы, получим $B_{n+1} \subset B_n$ и конечное $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}$ с требуемыми свойствами.

В результате будут построены счетное семейство $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \dots$ конечных множеств из $\mathcal{F}$ и $B = B_1 \supset B_2 \supset \dots$. Положим

$$\mathcal{F}_0 = \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}_n, \quad B_0 = \bigcap_{n=2}^{\infty} B_n.$$

Имеем:

$$a) \lambda^*(B \setminus B_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(B_n \setminus B_{n+1}) < \varepsilon,$$

б) для всяких $m \in \{2, 3, \dots\}$, $(t_1, \dots, t_m) \in B_0^m$ найдется $f \in \mathcal{F}_0$ такая, что $f(t_i) > b$ ($i = 1, \dots, m$) и $|f(a_i)| < 1/m$ ($i = 1, \dots, m-1$). Так как семейство функций $\mathcal{F}$ равномерно ограничено на $K \cup A$, то можно образовать направленность (f_α) , сходящуюся на $K \cup A$, элементами которой являются функции из счетного семейства $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ и для которой $\lim_\alpha f_\alpha(t) \geq b$, $t \in B_0$, $\lim_\alpha f_\alpha(a) = 0$, $a \in A$. Если $f_0(t) = \lim_\alpha f_\alpha(t)$, $t \in K \cup A$, то f_0 – искомая.

ТЕОРЕМА 1. Если $f: S \rightarrow X$ – ограниченная P -интегрируемая функция, у которой область значений неопределенного интеграла сепарабельна, то функция $\rho(f): S \rightarrow X^{**}$ P -интегрируема (и, конечно, $(P) \int_E \rho(f) d\mu = (P) \int_E f d\mu$, $E \in \Sigma$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, $\rho(f)$ не является P -интегрируемой. Найдется элемент $\xi \in B(X^{***}) \cap X^\perp$, для которого $\mu^*\{s \in S : \langle \xi, \rho(f)(s) \rangle \neq 0\} > 0$ (при этом $\langle \xi, m_f(E) \rangle = 0$, $E \in \Sigma$). В этом случае существуют положительные числа b и d , для которых $\mu^*(S_1) = d$, где $S_1 = \{s \in S : \langle \xi, \rho(f)(s) \rangle > b\}$ (при необходимости умножим ξ на -1 , обозначая его по-прежнему через ξ). Пусть A – счетное всюду плотное в $m_f(\Sigma)$ множество.

Отметим, что функция $\rho(f): S \rightarrow X^{**}$ ограничена. Обозначим через K замыкание множества $\rho(f)(S)$ в (X^{**}, w^*) , а через $\lambda - \rho(f)(\mu)$, т.е. λ – образ меры μ при отображении $\rho(f): S \rightarrow K$. Борелевская мера λ на компакте $K = (K, w^*)$ является радоновой [1, 1.5.1]. $\lambda^*(B) > 0$, где $B = \rho(f)(S_1)$, причем $\xi(t) > b$, $t \in B$, и $\xi(a) = 0$, $a \in A$. Тогда находимся в условиях леммы 1, если $\mathcal{F} = B(X^*)$, а в качестве функции на $K \cup A$ взять ξ . Согласно этой лемме, существуют множество $B_0 \subset B$ с $\lambda^*(B \setminus B_0) < d/4$ и направленность (x_α^*) , сходящаяся на $K \cup A$ и состоящая из элементов счетного семейства $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, такая, что $\lim_\alpha x_\alpha^*(t) \geq b$, $t \in B_0$, и $\lim_\alpha x_\alpha^*(a) = 0$, $a \in A$.

Пусть $S_0 = [\rho(f)]^{-1}(B_0)$, очевидно, $\mu^*(S_0) > 0$. Для каждого $x^* \in X^*$ функция $x^*\rho(f)$ совпадает с x^*f μ -почти всюду на S , поэтому найдется μ -измеримое множество E_0 с $\mu(E_0) = 0$, что для любых $x^* \in \mathcal{F}_0$ и $s \in S \setminus E_0$ $x^*(f(s)) = x^*(\rho(f)(s))$. Пусть x_0^* – точка прикосновения направленности (x_α^*) в $(B(X^*), w^*)$, тогда $\langle x_0^*, a \rangle = 0$, $a \in A$, следовательно, $\langle x_0^*, m_f(E) \rangle = 0$, $E \in \Sigma$. Для каждого $s \in S_2 = S_0 \setminus E_0$ существует $\lim_\alpha \langle x_\alpha^*, \rho(f)(s) \rangle = \lim_\alpha \langle x_\alpha^*, f(s) \rangle = \langle x_0^*, f(s) \rangle$, и в то же время для этой точки $s \in S_2$ найдется $t \in B_0$, так что $\rho(f)(s) = t$, а, значит, $\lim_\alpha \langle x_\alpha^*, \rho(f)(s) \rangle = \lim_\alpha \langle x_\alpha^*, t \rangle \geq b > 0$. Это вместе с предыдущим устанавливает: $\langle x_0^*, f(s) \rangle \geq b > 0$, $s \in S_2$, и $\mu^*(S_2) > 0$.

Итак, элемент $x_0^* \in X^*$ таков, что $\langle x_0^*, (P) \int_E f d\mu \rangle = 0$, $E \in \Sigma$, но функция $x^* f$ не является равной нулю μ -почти всюду, что противоречит P -интегрируемости функции f . Это доказывает P -интегрируемость $\rho(f)$.

Определение совершенной меры см., например, в [3], [1].

ТЕОРЕМА 2. Пусть ограниченная функция $f: S \rightarrow X$ P -интегрируема и μ – совершенная мера. Тогда функция $\hat{f}: \hat{S} \rightarrow X^{**}$ P -интегрируема (относительно $\hat{\mu}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из ограниченности P -интегрируемой функции f , условия, что μ – совершенная мера, и результата Стигала [4, 3J] заключаем об относительной компактности (и, значит, сепарабельности) множества $m_f(\Sigma)$. Нетрудно проверить, что $\langle m_f(E), x^* \rangle = \int_{\hat{E}} \langle \hat{f}(t), x^* \rangle d\hat{\mu}(t)$, $x^* \in X^*$, $E \in \Sigma$. Тогда, очевидно, достаточно установить равенство $\langle \xi, m_f(E) \rangle = \int_{\hat{E}} \langle \xi, \hat{f}(t) \rangle d\hat{\mu}$, $\xi \in X^{**}$, $E \in \Sigma$. Предположим, последнее не выполняется. Тогда найдется $\xi \in B(X^{***}) \cap X^\perp$ такой, что $\mu\{t \in \hat{S} : \langle \xi, \hat{f}(t) \rangle \neq 0\} > 0$, причем, $\langle \xi, m_f(E) \rangle = 0$, $E \in \Sigma$. Для простоты считаем, что $\|f(s)\| \leq 1$, $s \in S$, значит, и $\|\hat{f}(t)\| \leq 1$, $t \in \hat{S}$. Положим $\lambda = \hat{f}\hat{\mu}$, λ – радонова мера на компакте $K = \hat{f}(\hat{S})$ (K наделено $\sigma(X^{**}, X^*)$ -топологией). Найдутся такие положительные числа b и c , что (если $B = \{k \in K : \langle \xi, k \rangle > b\}$) $\lambda^*(B) = c$ (при необходимости умножаем ξ на -1 , оставив прежние обозначения).

Согласно лемме 1, существует такое $B_0 \subset B$ с $\lambda^*(B_0) > c/2$ и такая направленность $(x_\alpha^*) \subset B(X^*)$, содержащая лишь счетное семейство различных элементов и сходящаяся к η в (X^{***}, w^*) , что $\eta(k) \geq b$, $k \in B_0$, $\langle \eta, m_f(E) \rangle = 0$, $E \in \Sigma$.

Пусть Z – нормированное подпространство пространства X^* , порожденное счетным множеством $\{x_\alpha^*\}$, j – линейное непрерывное отображение из X^{**} в Z^* , являющееся сужением, т.е. для $x^{**} \in X^{**}$ $\langle jx^{**}, z \rangle = \langle x^*, z \rangle$, $z \in Z$. При этом $j: (K, w^*) \rightarrow (B(Z^*), w^*)$ также непрерывно. Обозначим через $\tilde{z}$ элемент Z^{**} , являющийся пределом направленности (x_α^*) в $(B(Z^{**}), w^*)$. Ввиду теоремы 1, функция $\rho(f)$ P -интегрируема, тогда $j \circ \rho(f): S \rightarrow Z^*$ также P -интегрируема и $(P) \int_E j \circ \rho(f) d\mu = j \circ m_f(E)$, $E \in \Sigma$. Так как $\langle \tilde{z}, j \circ m_f(E) \rangle = 0$, $E \in \Sigma$, то функция $\langle \tilde{z}, j \circ \rho(f) \rangle$ μ -почти всюду на S равна нулю. Борелевская мера $\bar{\nu} = j \circ \rho(f)$ на сепарабельном метрическом пространстве $(j \circ \rho(f)(S), w^*)$ – совершенна [3, 1.6. в), б)]. Пусть $E_1 = \{s \in S : \langle \tilde{z}, j \circ \rho(f)(S) \rangle \neq 0\}$, как установлено, $\mu(S \setminus E_1) = \mu(S)$, следовательно, множество $(\rho(f))^{-1}[j \circ \rho(f)(S \setminus E_1)] \in \Sigma$ и имеет меру, равную $\mu(S)$. Тогда найдется компактное в $(B(Z^*), w^*)$ множество L , содержащееся в $j \circ \rho(f)(S \setminus E_1)$ с $\bar{\nu}(L) > \mu(S) - c/4$ [1, 1.3.4], [3, теорема 12]. Для $v \in L$ $\tilde{z}(v) = 0$, а при $v \in j(B_0)$ $\tilde{z}(v) \geq b > 0$, следовательно, L и $j(B_0)$ – непересекающиеся. Пусть $\nu = j\lambda$, ν – радонова мера на $(j(K), \sigma(Z^*, Z))$ и $\nu^*(j(B_0)) > c/2$, а $\nu(L) = \bar{\nu}(L) > \nu(j(K)) - c/4$.

Итак, L и $j(B_0)$ являются непересекающимися подмножествами множества $j(K)$ такими, что L ν -измеримо с $\nu(L) > \nu(j(K)) - c/4$ и $\nu^*(j(B_0)) > c/2$, чего не может быть. Это доказывает теорему 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полностью от дополнительного требования на меру μ в теореме 2 отказаться нельзя. Это видно на примере P -интегрируемой функции Φ со значениями в ℓ_∞ , приведенном в [1, с. 51]. Область значений неопределенного P -интеграла функции Φ сепарабельна, ибо содержится в c_0 . Однако, если бы функция $\hat{\Phi}$ была P -интегрируема, то эта область должна быть относительно компактным множеством в c_0 , так как $(\hat{S}, \hat{\mu})$ — пространство с совершенной мерой, в то время как область содержит множество $\{\frac{1}{4}e_n, n \in \mathbb{N}\}$, где (e_n) — канонический базис в c_0 и, следовательно, не является относительно компактным множеством.

Если функция $\hat{f}$ P -интегрируема (для P -интегрируемой ограниченной f), то, согласно упомянутому результату Стигала [4, 3J], множество $m_f(\Sigma)$ относительно компактно и, следовательно, сепарабельно. Таким образом, исследование на сепарабельность $m_f(\Sigma)$ является первым шагом в изучении P -интегрируемости $\hat{f}$; дальнейшее изучение вопроса о P -интегрируемости $\hat{f}$ можно проводить, считая сепарабельным $m_f(\Sigma)$ (в противном случае $\hat{f}$ не является P -интегрируемой).

ТЕОРЕМА 3. Пусть f — ограниченная P -интегрируемая функция, область значений неопределенного P -интеграла от которой сепарабельна. Для того, чтобы $\hat{f}$ была P -интегрируемой необходимо и достаточно, чтобы для любых $\xi \in X^{***}$ и $\varepsilon > 0$ существовало такое открыто-замкнутое множество A в $\hat{S}$, что $\hat{\mu}(\hat{S} \setminus A) < \varepsilon$ и функция $\xi\hat{f}$ непрерывна на A .

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Очевидно, достаточно рассмотреть лишь случай $\xi \in X^{***} \cap X^\perp$. Тогда, как следует из теоремы 1, $\xi\rho(f)$ μ -почти всюду равна нулю. Если $\hat{\rho}: S \rightarrow \hat{S}$ таково, что для $s \in S$ $\langle \hat{\rho}(s), g \rangle = \rho(g)(s)$, $g \in L_\infty(\mu)$, и $E_0 = \{s \in S : \langle \xi, \rho(f)(s) \rangle = 0\}$, то $\mu(E_0) = \mu(S)$, поэтому $\hat{\rho}(E_0)$ всюду плотно в $\hat{S}$. Ввиду $\rho(f) = \hat{f} \circ \hat{\rho}$, $\hat{\rho}(E_0) \subset L = \{t \in \hat{S} : \langle \xi, \hat{f}(t) \rangle = 0\}$. Значит, L всюду плотно в $\hat{S}$ и, в частности, в A . Учитывая непрерывность $\xi\hat{f}$ на A , заключаем: $\xi\hat{f}$ равна нулю на A . Это доказывает, что $\xi\hat{f}$ равна нулю $\hat{\mu}$ -почти всюду на $\hat{S}$, и тем самым устанавливает интегрируемость $\xi\hat{f}$ и равенство $\langle \xi, m_f(E) \rangle = \int_{\hat{E}} \langle \xi, \hat{f}(t) \rangle d\hat{\mu}$, $E \in \Sigma$. Отсюда следует и P -интегрируемость функции $\hat{f}$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. И в этом случае достаточно рассмотреть случай $\xi \in X^{***} \cap X^\perp$. Вследствие P -интегрируемости $\hat{f}$, функция $\xi\hat{f}$ $\hat{\mu}$ -почти всюду равна нулю. Возьмем замкнутое множество

$F \subset \{t \in \hat{S} : \langle \xi, \hat{f}(t) \rangle = 0\}$ с $\hat{\mu}(F) > \hat{\mu}(\hat{S}) - \varepsilon$. Если A – такое замкнутое множество, содержащееся в F , что $\hat{\mu}(A) = \hat{\mu}(F)$ и $\hat{\mu}(A \cap U) > 0$ для любого открытого U с $U \cap A \neq \emptyset$ (существование такого A следует из условия, что $\hat{\mu}$ – радонова борелевская мера), то A открыто [1, 1.4.3]; A искомого.

Усилим теорему 3, установив, что функция $\xi \hat{f}$ непрерывна не только на $A \subset \hat{S}$, но и, в частности, на замыкании в $\sigma(L_\infty^*(\mu), L_\infty(\mu))$ выпуклой оболочки A . С этой целью напомним несколько понятий. Если функция $f: S \rightarrow X$ ограничена и P -интегрируема, то тем самым определен и ассоциированный с f линейный ограниченный оператор $T_f: L_1(\mu) \rightarrow X$, $T_f g = (P) \int g f d\mu$, $g \in L_1(\mu)$. Нетрудно проверить, что $T_f^* x^* = x^* f$, $x^* \in X^*$, и $T_f^{**} t = \hat{f}(t)$, $t \in \hat{S}$. Очевидно также, что $m_f(E) = T_f(1_E)$, $E \in \Sigma$.

Говорят, что ограниченное подмножество $M \subset L_\infty(\mu)$ имеет регулярную осцилляцию (относительно μ), если для каждого z из замыкания M в $(L_\infty^{**}(\mu), w^*)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $A \subset S$ с $\mu(A) > \mu(S) - \varepsilon$ и $g \in L_\infty(\mu|_A)$, так что z совпадает с g на $L_\infty^*(\mu|_A)$ [5, с. 58]. Элемент y называют барицентром вероятностной борелевской меры ν на $\hat{S}$ (y содержится в $\sigma(L_\infty^*(\mu), L_\infty(\mu))$ – замыкании выпуклой оболочки множества $\hat{S}$), если $\langle y, g \rangle = \int \langle t, g \rangle d\nu(t)$, $g \in L_\infty(\mu)$. Если λ – мера на каком-либо измеримом пространстве K , то говорим, что λ сосредоточена на E , если E λ -измеримо и $\lambda(E) = \lambda(K)$.

ЛЕММА 2. *Если ограниченная P -интегрируемая функция $f: S \rightarrow X$ такова, что $\hat{f}$ P -интегрируема, то множество $M = \{x^* f : x^* \in B(X^*)\}$ имеет регулярную осцилляцию относительно μ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть z содержится в $(L_\infty^{**}(\mu), w^*)$ -замыкании M . Очевидно, $z = T_f^{***} \xi$ для некоторого $\xi \in B(X^{***})$ и, не теряя общности, можно рассмотреть лишь случай, когда $\xi \in X^\perp$. Тогда $\xi \hat{f}$ $\hat{\mu}$ -почти всюду на $\hat{S}$ равна нулю, а так как для $t \in \hat{S}$ $\langle z, t \rangle = \langle T_f^{***} \xi, t \rangle = \langle \xi, T_f^{**} t \rangle = \langle \xi, \hat{f}(t) \rangle$, то элемент z $\hat{\mu}$ -почти всюду на $\hat{S}$ равен нулю. Достаточно показать, что для всякого $A \subset \hat{S}$ с $\hat{\mu}(A) > 0$ найдется $B \subset A$ с $\hat{\mu}(B) > 0$, так что сужение z на $L_\infty^*(\mu|_B)$ содержится в $L_\infty(\mu|_B)$ [5, IV.15] (это сужение совпадает в данном случае, конечно, с нулем пространства $L_\infty(\mu|_B)$).

Допустим противное. Тогда найдутся $A \subset \hat{S}$ с $\hat{\mu}(A) > 0$ и $b > 0$ такие, что для любого $B \subset A$ с $\hat{\mu}(B) > 0$ имеется радонова мера $\lambda \neq 0$ на $\hat{S}$, для которой $S_\lambda \subset B$, так что $|z(t)| \geq 2b$ λ -почти всюду на S_λ . Пусть L – множество всех таких радоновых мер на $\hat{S}$. Как ранее отмечалось, множество значений P -интеграла функции $\hat{f}$ относительно компактно в X , следовательно, и $m_f(\Sigma)$ относительно компактно. Если направленность $(x_\alpha^*) \subset B(X^*)$ сходится к ξ в (X^{***}, w^*) , то (ввиду относительной ком-

пактности $m_f(\Sigma)$ (x_α^*) сходится равномерно на $m_f(\Sigma)$ и, значит, направленность функций $(x_\alpha^* f)$ сходится к нулю в $L_1(\mu)$. Этим устанавливается, что ξ есть точка прикосновения в (X^{***}, w^*) для выпуклого множества

$$\mathcal{F} = \left\{ x^* \in B(X^*) : \int |x^* f| d\mu < \frac{1}{5} b\varepsilon_0 \right\},$$

где $0 < \varepsilon_0 < \mu(A)/2$ (при этом

$$\int |x^* \hat{f}| d\hat{\mu} < \frac{1}{5} b\varepsilon_0,$$

если $x^* \in \mathcal{F}$). Положим $\Phi = T_f^* \mathcal{F}$ и условимся для меры $\hat{\mu}$ на $\hat{S}$ через $\hat{\mu}_n$ обозначать радонову меру на $\hat{S}^n$, являющуюся радоновым произведением [1, 1.2.6] меры $\hat{\mu}$ n раз на себя.

Получение противоречия из вышеуказанного допущения (результатом которого является существование множества A с вышесформулированными свойствами) произведем в два этапа.

I этап. Докажем, что при любых $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ и $\lambda \in L$ выполнено равенство

$$\hat{\mu}_n \left(\bigcup_{\varphi \in F_{\lambda, \varepsilon}} \{t \in A : |\varphi(t)| > b\}^n \right) = (\hat{\mu}(A))^n,$$

где $F_{\lambda, \varepsilon} = \{\varphi : \varphi = x^* f \text{ для } x^* \in \mathcal{F} \text{ и } \lambda \in L \text{ таковы, что } \lambda(S_\lambda \setminus \{t \in A : |\varphi(t)| > b\}) < \varepsilon\}$. Доказательство проведем индукцией по n . Пусть $n = 1$. Если $\lambda \in L$, а $B - \hat{\mu}$ -измеримое подмножество в A с $\hat{\mu}(B) > 0$, то выберем $\nu \in L$ с $S_\nu \subset B$ (можно считать множества S_ν и S_λ непересекающимися), при этом $\nu + \lambda \in L$. Функция z является точкой прикосновения в слабой топологии пространства $L_1(\nu + \lambda)$ для семейства функций Φ . Так как последнее семейство является выпуклым, то z является точкой прикосновения для Φ и в нормированной топологии пространства $L_1(\nu + \lambda)$, поэтому найдется $\varphi \in \Phi$ такое, что $\lambda(\{t \in A : |\varphi(t)| > b\}) > \lambda(\hat{S}) - \varepsilon$ (напомним: z — такая функция на $\hat{S}$, что, в частности, $|z(t)| \geq 2b$ $(\nu + \lambda)$ -почти всюду на $\hat{S}$) и $\nu(\{t \in A : |\varphi(t)| > b\}) > 0$. Из последнего неравенства имеем: $\{t \in A : |\varphi(t)| > b\} \cap B \neq \emptyset$, при этом $\varphi \in F_{\lambda, \varepsilon}$. Итак, $\hat{\mu}$ -измеримое множество

$$\bigcup_{\varphi \in F_{\lambda, \varepsilon}} \{t \in A : |\varphi(t)| > b\}$$

таково, что оно имеет непустое пересечение со всяким множеством $B \subset A$ с $\hat{\mu}(B) > 0$, значит,

$$\hat{\mu} \left(\bigcup_{\varphi \in F_{\lambda, \varepsilon}} \{t \in A : |\varphi(t)| > b\} \right) = \hat{\mu}(A).$$

Пусть утверждение, доказываемое на этапе I, выполняется для $n = k$, и докажем, что тогда оно будет выполняться и для $n = k + 1$. Допустим противное. Тогда найдутся такая $\lambda \in L$ и такое $\varepsilon > 0$, что если

$$E = \bigcup_{\varphi \in F_{\lambda, \varepsilon}} \{t \in A : |\varphi(t)| > b\}^{k+1},$$

то $\hat{\mu}_{k+1}(E) < (\hat{\mu}(A))^{k+1}$. В таком случае, положив $c = (\hat{\mu}(A))^k$, найдем $B \subset A$ с $\hat{\mu}(B) > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\hat{\mu}_k(E_t) < c - \delta \quad \text{при любом } t \in B, \quad (5)$$

где $E_t = \{x \in \hat{S}^k : t \times x \in E\}$. Выберем $\nu \in L$ с $S_\nu \subset B$ (можно считать, что S_λ, S_ν — непересекающиеся множества, и что каждое из чисел $\lambda(\hat{S}), \nu(\hat{S})$ больше ε).

Возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon/5$. Согласно индуктивному допущению

$$\hat{\mu}_k \left(\bigcup_{\varphi \in F_{\lambda+\nu, \varepsilon_1}} \{t \in A : |\varphi(t)| > b\}^k \right) = c.$$

Выберем функцию $\varphi_1 \in F_{\lambda+\nu, \varepsilon_1}$ такую, что если $O_1 = \{t \in A : |\varphi_1(t)| > b\}^k$, то $\hat{\mu}_k(O_1) > 0$. Пусть

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{5c} \hat{\mu}_k(O_1).$$

Найдется $\varphi_2 \in F_{\lambda+\nu, \varepsilon_2}$ так, что если $O_2 = \{t \in A : |\varphi_2(t)| > b\}^k$, то $\hat{\mu}_k(O_2 \setminus O_1) > 0$. Положив

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon}{5c} \hat{\mu}_k(O_2 \setminus O_1),$$

выберем $\varphi_3 \in F_{\lambda+\nu, \varepsilon_3}$ так, что если $O_3 = \{t \in A : |\varphi_3(t)| > b\}^k$, то $\hat{\mu}_k(O_3 \setminus (O_1 \cup O_2)) > 0$. Подобным образом (используя способ доказательства первой части леммы 1) построим семейство функций $\{\varphi_\alpha, \alpha \in a\}$, занумерованных порядковыми числами меньшими ω_1 , так, что

$$(\nu + \lambda) \left(S_{\nu+\lambda} \setminus \bigcup_{\alpha \in a} \{t \in A : |\varphi_\alpha(t)| \leq b\} \right) > (\nu + \lambda)(\hat{S}) - \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\hat{\mu}_k \left(\bigcup_{\alpha \in a} \{t \in A : |\varphi_\alpha(t)| > b\}^k \right) > c - \delta.$$

Тогда $\varphi_\alpha \in F_{\lambda, \varepsilon}$ ($\alpha \in a$) и найдется точка $t_0 \in S_\nu \subset B$, для которой $|\varphi_\alpha(t_0)| > b$ при всяком $\alpha \in a$. В этом случае

$$t_0 \times \left(\bigcup_{\alpha \in a} \{t \in A : |\varphi_\alpha(t)| > b\}^k \right) \subset E,$$

и, следовательно, $\hat{\mu}_k(E_{t_0}) > c - \delta$, что противоречит (5).

Полученное противоречие доказывает, что индуктивное предположение верно и, тем самым, установлено утверждение, доказываемое на этапе I.

Из выполнимости этого утверждения следует, что

$$\hat{\mu}_n \left(\bigcup_{\varphi \in \Phi} \{t \in A : |\varphi(t)| > b\}^n \right) = (\hat{\mu}(A))^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

II этап. Пусть множество $E_0 \subset A$ с $\hat{\mu}(E_0) = 0$ таково, что для любой точки $\bar{t} \in A \setminus E_0$

$$\hat{\mu} \left(\bigcup_{\varphi \in \Phi} \{t \in A : |\varphi(t)| > b, |\varphi(\bar{t})| > b\} \right) = \hat{\mu}(A)$$

(существование указанного E_0 следует из (6)). Возьмем такую $t_1 \in A \setminus E_0$, чтобы $\hat{\mu}(A \cap U) > 0$ для любой окрестности U точки t_1 . Из семейства $\{\varphi \in \Phi : |\varphi(t_1)| > b\}$ выделим такое конечное подсемейство $\{\varphi_{i,1}\}_{i=1}^n$, чтобы для множеств $U_{i,1} = \{t \in A : |\varphi(t)| > b\}$ выполнялось неравенство

$$\mu \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^n U_{i,1} \right) < \frac{1}{10} \varepsilon_0.$$

Положим

$$E_1 = A \cap \bigcup_{i=1}^n U_{i,1}, \quad V_1 = \bigcap_{i=1}^n U_{i,1},$$

и, далее, поступая как в доказательстве леммы 1 и используя равенство (6) при $n = 2$, установим существование такого $\hat{\mu}$ -измеримого $A_2 \subset A$ с $\hat{\mu}(A \setminus A_2) < \varepsilon_0/2$, что при любых $(s, t) \in A_2 \times A_2$ найдется функция $\varphi \in \Phi$, для которой $|\varphi(s)| > b, |\varphi(t)| > b$.

Аналогично, как и при доказательстве леммы 1, используя равенство (6), установим существование такого $\hat{\mu}$ -измеримого $A_0 \subset A$ с $\hat{\mu}(A \setminus A_0) < \varepsilon_0$, что для всяких $m \in \{2, 3, \dots\}$, $(t_1, \dots, t_m) \in (A_0)^m$ найдется $\varphi \in \Phi$, для которой $|\varphi(t_i)| > b$ ($i = 1, \dots, m$).

Результатом этих построений является существование направленности $(x_\beta^*, \beta \in B)$ в $\mathcal{F}$ w^* -сходящейся к некоторому $\hat{x} \in X^{***}$ так, что

$$|\langle \hat{x}, \hat{f}(t) \rangle| = \lim_{\beta} |\langle x_\beta^*, \hat{f}(t) \rangle| = \lim_{\beta} |(x_\beta^* f)(t)| \geq b, \quad t \in A_0. \quad (7)$$

Так как для каждого $\beta \in B$

$$\int |x_\beta^* f| d\mu < \frac{1}{5} b \varepsilon_0,$$

то и

$$\int |\langle \hat{x}, \hat{f}(t) \rangle| d\hat{\mu} \leq \frac{1}{5} b \varepsilon_0,$$

что (ввиду $0 < \varepsilon_0 < \hat{\mu}(A)/2$) противоречит соотношению (7).

Полученное противоречие показывает, что допущение, результатом которого является существование вышеуказанного множества A , неверно. Следовательно, лемма 2 доказана.

Нижеследующее утверждение содержит понятие регулярного оператора. Не приводя его здесь, укажем, что оно имеется в [5, с. 40].

ТЕОРЕМА 4. Пусть ограниченная функция $f: S \rightarrow X$ P -интегрируема и T_f — ассоциированный с f оператор из $L_1(\mu)$ в X . Следующие условия эквивалентны:

- а) $\hat{f}$ — P -интегрируема,
- б) множество $T_f^*(B(X^*))$ имеет регулярную осцилляцию относительно μ ,
- в) $T_f: L_1(\mu) \rightarrow X$ — регулярный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) $\Rightarrow$ б) установлено в лемме 2, ибо $T_f^* x^* = x^* f$, $x^* \in X^*$. Эквивалентность утверждений б) и в) следует из [5, IV.17].

Пусть выполнено б). Для доказательства P -интегрируемости $\hat{f}$ достаточно установить, что $\xi \hat{f}$ $\hat{\mu}$ -почти всюду на $\hat{S}$ равна нулю для $\xi \in X^{***} \cap X^\perp$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдутся $A \subset S$ с $\mu(S \setminus A) < \varepsilon$ и $g \in L_\infty(\mu|_A)$ такие, что сужение $z = T_f^{***} \xi$ на $L_\infty^*(\mu|_A)$ совпадает с g . Для $E \in \Sigma$ с $E \subset A$ выполнено

$$\begin{aligned} \int_E g d\mu &= \langle g, 1_E \rangle = \langle z, 1_E \rangle = T_f^{***} \xi, 1_E \rangle \\ &= \langle \xi, T_f^{**} 1_E \rangle = \langle \xi, T_f 1_E \rangle = \langle \xi, m_f(E) \rangle = 0; \end{aligned}$$

следовательно, g $\hat{\mu}$ -почти всюду на A равна нулю. Тогда g тождественно равна нулю на $\hat{A}$, поэтому и $z(t) = 0$, $t \in \hat{A}$, причем $\hat{\mu}(\hat{S} \setminus \hat{A}) < \varepsilon$. Это

доказывает, что z $\hat{\mu}$ -почти всюду на $\hat{S}$ равен нулю. В то же время для $t \in \hat{S}$ $\langle z, t \rangle = \langle \xi, T_f^{**}t \rangle = \langle \xi, \hat{f}(t) \rangle = (\xi \hat{f})(t)$, что устанавливает истинность утверждения б) $\Rightarrow$ а), и, значит, заканчивает доказательство теоремы 3.

Линейное отображение $T: L_1(\mu) \rightarrow X$ называется D - P -оператором, если образ единичного шара из $L_\infty(\mu)$ относительно компактен в X . Из теоремы 4 и вышеприведенного результата Стигала, принимая во внимание, что $T_f(1_E) = m_f(E) = m_{\hat{f}}(\hat{E})$, $E \in \Sigma$, выводим

СЛЕДСТВИЕ. Пусть ограниченная функция $f: S \rightarrow X$ P -интегрируема. Если $T_f: L_1(\mu) \rightarrow X$ регулярен, то T_f является D - P -оператором.

Тульский государственный
педагогический университет

Поступило
20.02.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Talangrand M. Pettis integral and measure theory // Amer. Math. Soc. Memoirs. 1984. V. 307.
- [2] Sentilles D., Wheeler R. Pettis integration via the Stonian transform // Pacific J. Math. 1983. V. 107. №2. P. 473–495.
- [3] Сазонов В. В. О совершенных мерах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26. №3. С. 391–414.
- [4] Flemlin D., Talagrand M. A decomposition theorem for additive set-functions, with applications to Pettis integrals and ergodic means // Math. Z. 1979. V. 168. P. 117–142.
- [5] Ghoussoub N., Godefroy G., Maurey B., Schachermayer W. Some topological and geometrical structures in Banach spaces // Amer. Math. Soc. Memoirs. 1987. V. 378.