Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Плоские модули и кольца, конеч-
нопорожденные как модули над своим центром,
Матем. заметки, 1996, том 60, выпуск 2, 254–277

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1823>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 13:18:52

ПЛОСКИЕ МОДУЛИ И КОЛЬЦА, КОНЕЧНОПОРОЖДЕННЫЕ КАК МОДУЛИ НАД СВОИМ ЦЕНТРОМ

А. А. Туганбаев

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, модули – унитарными. Слова типа *цепное кольцо* означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Модуль называется *дистрибутивным* (*цепным*), если решетка всех его подмодулей дистрибутивна (является цепью). Модуль, у которого все конечнопорожденные подмодули циклически, называется *модулем Безу*. Для коммутативного кольца A равносильны условия [1]: (1) все идеалы кольца A являются плоскими модулями над A ; (2) A – дистрибутивное полупервичное кольцо; (3) все локализации кольца A по максимальным идеалам являются цепными областями. Основным результатом работы является теорема 1, которая следует из предложений 1.14 и 2.13.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть кольцо A является конечнопорожденным модулем над своим унитарным центральным подкольцом R . Тогда равносильны условия:*

- (1) A – дистрибутивное справа или слева полупервичное кольцо;
- (2) *для любого максимального идеала M центрального в A подкольца R кольцо частных A_M является конечным прямым произведением полунаследственных областей Безу, у которых факторкольца по их радикалам Джекобсона являются конечными прямыми произведениями тел;*
- (3) *все подмодули плоских правых модулей и плоских левых модулей над кольцом A являются плоскими модулями, причем A – дистрибутивное кольцо без ненулевых нильпотентных элементов, у которого все факторкольца по первичным идеалам являются полунаследственными порядками в телах.*

В связи с теоремой 1 заметим, что кольцо матриц над полем дает пример кольца A , являющегося конечнопорожденным модулем над своим центром и не являющегося дистрибутивным справа или слева кольцом, причем все

A -модули являются плоскими. Кроме того, существует дистрибутивное полупервичное кольцо A , содержащее главный правый идеал aA , не являющийся плоским правым модулем над A (см. 2.15).

Доказательство теоремы 1 разбито на ряд утверждений. Приведем необходимые обозначения и определения. Элемент кольца называется *регулярным*, если его правый аннулятор $r(a)$ совпадает с его левым аннулятором $\ell(a)$ и равен нулю. Для модуля M через $\text{End}(M)$, $J(M)$, $\text{max}(M)$, $\text{Lat}(M)$, $\text{Sing}(M)$, $\text{sg}(M)$ обозначаются соответственно кольцо эндоморфизмов, радикал Джекобсона, множество всех максимальных подмодулей, решетка всех подмодулей, сингулярный подмодуль и идеал кольца $\text{End}(M)$, образованный всеми эндоморфизмами с существенными ядрами. Для кольца A через $C(A)$, $U(A)$ обозначаются соответственно его центр и группа обратимых элементов. Пусть F – подмножество модуля M_A над кольцом A , $G \in \text{Lat}(M)$. Через $(F : G)$ обозначается правый идеал $\{a \in A \mid Fa \subseteq G\}$ кольца A , являющийся идеалом, если $F \in \text{Lat}(M)$. Если $(F : G)$ – идеал кольца A , то $(F : G) = ((FA) : G)$, где FA – подмодуль модуля M , порожденный его подмножеством F . Модуль M_A называется *мультипликативным* при выполнении следующих эквивалентных условий: (1) для любого $N \in \text{Lat}(M)$ существует такой идеал B кольца A , что $N = MB$; (2) $N = M(M : N)$ для любого $N \in \text{Lat}(M)$. Модуль M называется *антисингулярным* (*сингулярным*), если $\text{Sing}(M) = 0$ ($\text{Sing}(M) = M$). Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Модуль называется *конечномерным* (*по Голди*), если он не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей. Подфактором называется подмодуль фактормодуля. Модуль называется *полунётеровым* (*полуартинновым*), если каждый его ненулевой подфактор обладает простым фактормодулем (подмодулем). Подмодуль N модуля M называется *замкнутым*, если любой подмодуль $N_1 \in \text{Lat}(M)$, являющийся существенным расширением модуля N , совпадает с N . Эндоморфизм f модуля M называется *локально нильпотентным*, если для любого элемента $t \in M$ найдется такое натуральное число $n = n(t)$, что $f^n(t) = 0$. Кольцо с дистрибутивной решеткой двусторонних идеалов называется *арифметическим* кольцом. Модуль называется *инвариантным* (*квазиинвариантным*), если все его подмодули (все его максимальные подмодули) являются в нем вполне инвариантными подмодулями. Кольцо A квазиинвариантно справа (инвариантно справа) $\iff$ все максимальные правые идеалы (все правые идеалы) кольца A являются идеалами $\iff$ все циклические правые A -модули квазиинвариантны (инвариантны). A квазиинвариантно справа $\iff A/J(A)$ квазиинвариантно справа. Первичный идеал кольца A , не содержащий других первичных идеалов кольца A , называется *мини-*

малым первичным идеалом. Собственный идеал называется *вполне первичным*, если факторкольцо по нему является областью, т.е. не содержит делителей нуля. Кольцо называется *нормальным*, если все его идемпотенты центральны. Кольцо без ненулевых нильпотентных элементов называется *редуцированным кольцом*. Подмножество T кольца A называется: (1) *мультипликативным*, если T – мультипликативно замкнутое подмножество в A , содержащее единицу и не содержащее нуля кольца A ; (2) *перестановочным справа*, если для любых элементов $a \in A$, $t \in T$ найдутся такие элементы $b \in A$, $u \in T$, что $au = tb$; (3) *реверсивным справа*, если для любых таких элементов $a \in A$, $t \in T$, что $ta = 0$, найдется такой элемент $u \in T$, что $au = 0$. Подмножество T кольца A называется *множеством правых знаменателей* при выполнении следующих двух эквивалентных [2, с. 648] условий: (1) T – перестановочное справа реверсивное справа мультипликативное подмножество; (2) существует такое кольцо A_T и кольцевой гомоморфизм $f_T \equiv f: A \rightarrow A_T$, что $f(T) \subseteq U(A_T)$, $A_T = \{f(a)f(t)^{-1} \mid a \in A, t \in T\}$, $\text{Ker}(f) = \{a \in A \mid at = 0 \text{ для некоторого } t \in T\}$. В этих условиях кольцо A_T называется *правым кольцом частных* кольца A относительно T , f_T – *каноническим гомоморфизмом*, причем для любого элемента $a \in A$ будем писать a_T вместо $f_T(a)$. Для любого правого идеала B кольца A через B_T обозначается правый идеал кольца A_T , порожденный множеством $f_T(B)$. Если $T = A \setminus M$, где M – правый идеал кольца A , то пишем f_M, A_M, a_M, B_M вместо f_T, A_T, a_T, B_T . Кольцо A называется *локализуемым справа*, если для любого его максимального правого идеала M существует правое кольцо частных A_M . Аналогично определяются левое кольцо частных ${}_T A$ относительно множества левых знаменателей T и канонический гомоморфизм ${}_T f: A \rightarrow {}_T A$. Если $T = A \setminus M$, где M – левый идеал кольца A , то вместо индекса T также пишем M . Локализуемые слева кольца определяются аналогично локализуемым справа кольцам.

§ 1. Модули Безу и дистрибутивные модули

1.1. ЛЕММА. Для модуля M_A над кольцом A равносильны условия:

- (1) M – дистрибутивный модуль;
- (2) все 2-порожденные подмодули модуля M дистрибутивны;
- (3) все подфакторы модуля M дистрибутивны;
- (4) все подфакторы модуля M квазиинвариантны;
- (5) M не имеет 2-порожденных подмодулей H , обладающих фактормодулями $F \oplus G$, где F, G – изоморфные простые модули;
- (6) для любых элементов $m, n \in M$ найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $1 = a + b$, $maA + nbA \subseteq mA \cap nA$;

(7) все 2-порожденные полупростые подфакторы модуля M квазиинвариантны;

(8) для произвольного подфактора $\overline{M}$ модуля M и для любых таких элементов $\overline{m}, \overline{n} \in \overline{M}$, что $\overline{m}A \cap \overline{n}A = 0$, найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $1 = a + b$, $\overline{m}a = \overline{n}b = 0$;

(9) $A = (m : nA) + (n : mA)$ для любых элементов $m, n \in A$;

(10) $(m + n)A = mA \cap (m + n)A + nA \cap (m + n)A$ для любых элементов $m, n \in M$;

(11) для любых элементов $m, n \in M$ найдется такой правый идеал B кольца A , что $(m + n)A = mB + nB$;

(12) $f(H) \subseteq H$ для каждого замкнутого подмодуля H произвольного подфактора N модуля M и любого гомоморфизма $f : H \rightarrow N$;

(13) $\text{Hom}(F, G) = 0$ для любых таких подмодулей F, G произвольного подфактора N модуля M , что $F \cap G = 0$;

(14) $f(H) \subseteq H$ для каждого простого подмодуля H произвольного подфактора N модуля M и любого гомоморфизма $f : H \rightarrow N$;

(15) $f(H) \subseteq H$ для каждого полуарттинова подмодуля H произвольного подфактора N модуля M и любого гомоморфизма $f : H \rightarrow N$;

(16) каждый подфактор модуля M , у которого любой подпрямо неразложимый подфактор полунётеров, является инвариантным модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (1)–(6) и импликации (1) $\implies$ (12), (1) $\implies$ (13) доказаны в [3]. Эквивалентность условий (6), (8), (9), эквивалентность условий (5), (7), эквивалентность условий (2), (10), а также импликации (12) $\implies$ (7), (16) $\implies$ (7), (13) $\implies$ (14), (14) $\implies$ (15), (15) $\implies$ (7) проверяются непосредственно. Импликация (11) $\implies$ (10) следует из того, что если $(m + n)A = mB + nB$, то с использованием модулярного закона получаем равенства $mA \cap (m + n)A = mA \cap (mB + nB) = mB$, $nA \cap (m + n)A = nA \cap (mB + nB) = nB$. Импликация (9) $\implies$ (10) следует из того, что если $m, n \in M$, $f \equiv m + n$, $B \equiv (m : fA)$, то $B = (n : fA)$, $mA \cap fA = mB$, $nA \cap fA = nB$. Докажем импликацию (4) $\implies$ (16). Так как условие (4) верно для всех подфакторов модуля M , то ограничимся доказательством того, что M – инвариантный модуль. Пусть $M \neq N \in \text{Lat}(M)$, $N \subseteq H \in \text{Lat}(M)$ и M/H – подпрямо неразложимый модуль. Докажем, что H – вполне инвариантный подмодуль в M . Достаточно доказать, что H совпадает с пересечением F всех вполне инвариантных подмодулей модуля M , содержащих H . Допустим противное. Так как, по условию, модуль M/H является полунётеровым, то ненулевой модуль F/H обладает максимальным подмодулем G/H . Тогда G – максимальный подмодуль модуля

F , содержащий модуль H . Так как G вполне инвариантен в F , причем F – вполне инвариантный подмодуль в M , то G – вполне инвариантный подмодуль модуля M , строго содержащийся в F и содержащий модуль H , что противоречит выбору модуля F . Так как M/N – подпрямое произведение подпрямо неразложимых модулей и любое пересечение вполне инвариантных подмодулей модуля M вполне инвариантно в M , то N вполне инвариантен в M .

1.2. Если все 2-порожденные подмодули M_A являются мультипликативными, то M – дистрибутивный модуль. (Пусть $m, n \in M$, $f \equiv m+n$, $N \equiv mA + nA$. По условию найдется такой идеал B кольца A , что $fA = NB$. Так как B – идеал, то $NB = (mA + nA)B = mB + nB$. По 1.1 M дистрибутивен.)

1.3. ЛЕММА. Для модуля M_A над инвариантным справа кольцом A равносильны условия:

- (1) M – дистрибутивный модуль;
- (2) $A = (F : G) + (G : F)$ для любых двух циклических подмодулей F, G модуля M ;
- (3) $A = (F : G) + (G : F)$ для любых конечнопорожденных подмодулей F, G модуля M ;
- (4) для любых конечнопорожденных подмодулей F, G модуля M найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $1 = a + b$, $Fa + Gb \subseteq F \cap G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (3) и (4), а также импликация (3) $\implies$ (2) проверяются непосредственно. Эквивалентность (1) и (2) следует из 1.1 (см. условие (9)) и того, что в случае инвариантного справа кольца A для любых элементов $m, n \in M$ верно равенство $(m : nA) = (mA : nA)$. Докажем импликацию (2) $\implies$ (3). Мы будем использовать следующий непосредственно проверяемый факт (*): если $X, Y_1, \dots, Y_t$ – идеалы кольца A и $A = X + Y_j$ для всех j , то $A = X + Y_1 \cdots Y_t = X + \bigcap_{j=1}^t Y_j$. Пусть $F = \sum_{i=1}^m f_i A$, $G = \sum_{j=1}^n g_j A$. По условию (2) $A = (f_i A : g_j A) + (g_j A : f_i A) \quad \forall i, j$. Поэтому $A = (f_i A : G) + (g_j A : f_i A) \quad \forall i, j$. Из (*) следует, что $A = (f_i A : G) + \bigcap_{j=1}^n (g_j A : f_i A) = (f_i A : G) + (G : f_i A) \quad \forall i$. Поэтому $A = (f_i A : G) + (G : F) \quad \forall i$. Тогда из (*) следует, что $A = \bigcap_{i=1}^m (f_i A : G) + (G : F) = (F : G) + (G : F)$.

1.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для модуля M_A над инвариантным справа кольцом A равносильны условия:

- (1) M – дистрибутивный модуль;
- (2) все конечнопорожденные подмодули модуля M являются мультипликативными;
- (3) для любого конечнопорожденного подмодуля N модуля M и произвольного конечнопорожденного подмодуля F модуля N найдется такой конечнопорожденный идеал B кольца A , что $F = NB$;

(4) все 2-порожденные подмодули модуля M являются мультипликативными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликации $(3) \Rightarrow (4)$, $(2) \Rightarrow (4)$ очевидны, а импликация $(4) \Rightarrow (1)$ следует из 1.2.

$(1) \Rightarrow (2)$. Пусть n – натуральное число, N – любой n -порожденный подмодуль модуля M , $T \in \text{Lat}(N)$. Необходимо доказать существование такого идеала B кольца A , что $T = NB$. Будем вести индукцию по n . При $n = 1$ утверждение верно, поскольку каждый циклический модуль над инвариантным справа кольцом является мультипликативным модулем, что вытекает из изоморфизма этого модуля фактормодулю свободного циклического модуля. Пусть утверждение верно при $n < k$ и $N = F + G$, где модуль F имеет $k - 1$ образующих, а G – циклический модуль. По предположению индукции $F \cap G = F(F : G) = G(G : F)$ и, кроме того, существуют такие идеалы D, E кольца A , что $T \cap F = FD$, $T \cap G = GE$. Кроме того, по 1.3 $A = (F : G) + (G : F)$. Тогда $F = F(F : G) + F(G : F) = G(G : F) + F(G : F) = N(G : F)$. Аналогично доказывается равенство $G = N(F : G)$. Обозначим через B идеал $(G : F)D + (F : G)E$ кольца A . Поэтому $T = T \cap F + T \cap G = FD + GE = N(G : F)D + N(F : G)E = NB$ и B – искомый идеал.

$(2) \Rightarrow (3)$. Пусть $N = \sum_{i=1}^m x_i A$, $F = \sum_{j=1}^n f_j$. Из условия (2) вытекает существование таких элементов $b_{ij} \in (N : F)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, что $f_j = \sum_{i=1}^m x_i b_{ij}$ для любого j . Тогда идеал B кольца A , порожденный всеми элементами b_{ij} , является искомым конечнопорожденным идеалом.

1.5. Если M_A – нётеров модуль над инвариантным справа кольцом A , то дистрибутивность M равносильна тому, что все подмодули модуля M являются мультипликативными. (Вытекает из 1.4.)

1.6. Пусть M_A – модуль над дистрибутивным справа инвариантным справа кольцом A , B и D – правые идеалы кольца A . Тогда $MB \cap MD = M(B \cap D)$. (Пусть $x = \sum_{i=1}^s m_i b_i = \sum_{j=1}^t n_j d_j \in MB \cap MD$, где $m_i, n_j \in M$, $b_i \in B$, $d_j \in D$. Пусть $F \equiv \sum_{i=1}^s b_i A \subseteq A$, $G \equiv \sum_{j=1}^t d_j \subseteq A$. Так как F, G – конечнопорожденные правые идеалы дистрибутивного справа инвариантного справа кольца A , то по 1.3 (см. условие (4)) найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $1 = a + b$, $b_i a, d_j b \in F \cap G \forall i, j$. Тогда $x = xa + xb = \sum_{i=1}^s b_i a + \sum_{j=1}^t d_j b \in M(F \cap G) \subseteq M(B \cap D)$. Поэтому $MB \cap MD \subseteq M(B \cap D)$. Обратное включение очевидно.)

1.7. Пусть M_A – конечнопорожденный дистрибутивный модуль над инвариантным справа кольцом A . Тогда M – инвариантный модуль. (Пусть $f \in \text{End}(M)$, $N \in \text{Lat}(M)$. По 1.4 $N = MB$, где B – идеал кольца A . Тогда $f(N) = f(MB) \subseteq f(M)B \subseteq MB = N$.)

1.8. Пусть A – кольцо с полиномиальным тождеством. Тогда: (1) каждое первичное факторкольцо B кольца A является порядком в простом артиновом кольце и каждый существенный правый или левый идеал кольца B содержит ненулевой центральный элемент; (2) каждое полупервичное факторкольцо кольца A антисингулярно; (3) если A – область, то кольцо A равномерно. ((1), (2) следуют из [4, 6.1.30, 6.1.48, 6.28, 6.31], а (3) вытекает из (1).)

1.9. Пусть кольцо A является конечнопорожденным модулем над унитарным подкольцом R своего центра. Тогда: (1) для любого $M \in \text{max}(R)$ кольцо частных A_M является конечнопорожденным модулем над своим локальным центральным подкольцом R_M ; (2) если N – идеал кольца A , являющийся конечнопорожденным как правый или как левый идеал, то N – конечнопорожденный модуль над центральным подкольцом A и, следовательно, конечно порожден и как правый, и как левый идеал кольца A ; (3) $AJ(R) \subseteq J(A)$; (4) $A_M J(R_M) \subseteq J(A_M)$ для любого $M \in \text{max}(R)$; (5) для любого $M \in \text{max}(R)$ кольцо частных A_M полулокально; (6) каждое первичное факторкольцо кольца A является порядком в простом артиновом кольце; (7) если A – цепное справа артиново справа кольцо, то A – цепное артиново кольцо. ((1) и (2) проверяются непосредственно. (3) доказано в [5, гл. 3, следствие 0.5]. (4) вытекает из (3), примененного к A_M и R_M . (5) следует из (4) и того, что $(A_M)/(A_M J(R_M))$ конечномерная алгебра над полем $R_M/J(R_M)$. (6) следует из 1.8 (1). Докажем (7). Пусть N – ненулевой радикал кольца A , F – поле, являющееся центром тела $Q \cong A/N$, n – размерность векторного пространства Q над F , $T \cong N/N^2$. Так как $T_A \cong Q_A$, то размерность векторного пространства T над F равна n . Тогда ${}_A T \cong {}_A Q$. Поэтому главный правый идеал N является также главным левым идеалом, откуда A – цепное артиново кольцо.)

1.10. Пусть $\text{max}(R)$ – множество всех максимальных идеалов центрального подкольца R кольца A , F и G – подмодули модуля A_R (например, пересечение, сумма или произведение односторонних идеалов кольца A). Тогда: (1) если $F_M = G_M$ для всех $M \in \text{max}(R)$, то $F = G$; (2) $(FG)_M = F_M G_M$, $(F + G)_M = F_M + G_M$, $(F \cap G)_M = F_M \cap G_M$ для всех $M \in \text{max}(R)$; (3) если $M \in \text{max}(R)$, T – произвольный правый (левый) идеал кольца A_M , то найдется такой правый (левый) идеал B кольца A , что $B_M = T$; (4) равенство нулю элемента $a \in A$ равносильно тому, что равны нулю канонические образы этого элемента в кольце частных A_M для любого $M \in \text{max}(R)$; (5) редуцированность (полупервичность) A равносильна редуцированности (полупервичности) всех колец A_M для любого $M \in \text{max}(R)$; (6) правая (левая) дистрибутивность A равносильна правой (левой) дистрибутивности всех колец A_M для любого $M \in \text{max}(R)$. ((1), (2), (3), (4) хорошо известны и

проверяются непосредственно, (5) следует из (4) и (1), а (6) вытекает из (1), (3) и того, что по (2) $((B + D) \cap E)_M = (B_M + D_M) \cap E_M$, $(B \cap E + D \cap E)_M = B_M \cap E_M + D_M \cap E_M$.

1.11 [3]. A – дистрибутивное справа полулокальное кольцо $\iff A$ – правое кольцо Безу и $A/J(A)$ – конечное прямое произведение тел.

1.12. Пусть кольцо A является конечнопорожденным модулем над унитарным центральным подкольцом R . A дистрибутивно справа $\iff$ для любого $M \in \text{max}(R)$ кольцо частных A_M является правым кольцом Безу, у которого факторкольцо по радикалу Джекобсона – конечное прямое произведение тел. (Вытекает из 1.9 (5), 1.10 (6) и 1.11.)

1.13 [3]. A – полулокальное редуцированное правое кольцо Безу $\iff A$ – конечное прямое произведение полунаследственных справа равномерных справа полулокальных правых областей Безу, над которыми правые циклические модули конечномерны.

1.14. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть кольцо A является конечнопорожденным модулем над унитарным центральным подкольцом R . Тогда равносильны условия:

- (1) A – дистрибутивное справа полупервичное кольцо;
- (2) A – дистрибутивное слева полупервичное кольцо;
- (3) для любого $M \in \text{max}(R)$ кольцо частных A_M является конечным прямым произведением полунаследственных равномерных областей Безу, у которых факторкольца по их радикалам Джекобсона являются конечными прямыми произведениями тел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как (3) симметрично, то достаточно доказать, что (1) $\iff$ (3). Импликация (3) $\implies$ (1) следует из 1.10 (5) и 1.12.

(1) $\implies$ (3). По 1.8 (2) и 1.22 (3) A – редуцированное кольцо. Пусть $M \in \text{max}(R)$, $B \equiv A_M$. По 1.10 (5), 1.12 B – редуцированное правое кольцо Безу, причем $A/J(A)$ – конечное прямое произведение тел. Теперь применяем 1.13.

1.15 [3]. Пусть Q – правое кольцо частных кольца A относительно множества правых знаменателей T , $Q = A_T$, $f: A \rightarrow Q$ – канонический гомоморфизм. Тогда:

- (1) для любых элементов $q_1, \dots, q_n \in Q$ найдутся такие элементы $t \in T$, $a_1, \dots, a_n \in A$, что $q_i = f(a_i)f(t)^{-1}$ при $i = 1, \dots, n$;
- (2) если B – правый идеал кольца A , то $B_T = \{f(b)f(t)^{-1} \mid b \in B, t \in T\}$;
- (3) если B – правый идеал кольца A , $a \in A$, $f(a) \in B_T$, то $at \in B$ для некоторого элемента $t \in T$;
- (4) $(B + D)_T = B_T + D_T$, $(B \cap D)_T = B_T \cap D_T$ для любых правых идеалов B, D кольца A ;

(5) если N – правый идеал кольца Q , $E \equiv f^{-1}(N \cap f(A))$, то E – правый идеал кольца A и $N = E_T$;

(6) если G – конечнопорожденный подмодуль левого модуля $f(A)Q$, то найдется такой элемент $t \in T$, что $Gf(t) \subseteq f(A)$ и, следовательно, левый модуль $f(A)G$ изоморфен конечнопорожденному левому идеалу $Gf(t)$ кольца $f(A)$;

(7) если A – дистрибутивное слева кольцо, то кольца Q и $f(A)$ дистрибутивны слева, $f(A)Q$ – дистрибутивный левый модуль, причем кольцо $f(A)$ содержит все идемпотенты и все нильпотентные элементы кольца Q ;

(8) если A – дистрибутивное справа кольцо, то и Q – дистрибутивное справа кольцо;

(9) если Q – дистрибутивное справа кольцо, то для любых правых идеалов B, D, E кольца A верно равенство $(B \cap (D + E))_T = (B \cap D + B \cap E)_T$;

(10) если кольцо $A / \text{Ker}(f)$ конечномерно справа (равномерно справа, нётерово справа, артиново справа), то Q – конечномерное справа (равномерное справа, нетерово справа, артиново справа, полунётерово справа, полуартиново справа) кольцо;

(11) если T является также множеством левых знаменателей в кольце A , то ${}_T A \cong Q$, причем ядра канонических гомоморфизмов $A \rightarrow Q$ и $A \rightarrow {}_T A$ совпадают;

(12) если $T = A \setminus M$, где M – правый идеал кольца A , то Q – локальное кольцо и $J(Q) = M_T \equiv M_M$.

1.16. ЛЕММА. Пусть A – локализуемое справа кольцо. Для любого $M \in \text{max}(A_A)$ через $H(M)$ обозначим ядро канонического гомоморфизма $A \rightarrow A_M$. Тогда:

(1) если a – элемент кольца A , B – правый идеал кольца A и $a_M \in B_M$ для всех $M \in \text{max}(A_A)$, то $a \in B$;

(2) если $a \in A$ и $a_M = 0$ для всех $M \in \text{max}(A_A)$, то $a = 0$;

(3) если B, D – правые идеалы кольца A и $B_M = D_M$ для всех $M \in \text{max}(A_A)$, то $B = D$;

(4) для редуцированности кольца A необходимо и достаточно, чтобы для любого $M \in \text{max}(A_A)$ кольцо A_M было редуцированным;

(5) если B – такой правый идеал кольца A , что B_M – идеал кольца A_M для любого $M \in \text{max}(A_A)$, то B – идеал кольца A ;

(6) если для любого $M \in \text{max}(A_A)$ кольцо A_M инвариантно справа, то A – инвариантно справа кольцо;

(7) каждый максимальный правый идеал кольца A является вполне первичным идеалом кольца A , причем A/M – тело;

(8) правая дистрибутивность кольца A равносильна тому, что A_M – цепное справа кольцо для любого $M \in \text{max}(A_A)$;

(9) если A дистрибутивно справа, $M \in \text{max}(A_A)$ и факторкольцо $A/H(M)$ является полунетеровым справа, то A_M – полунетерово

справа инвариантное справа цепное справа кольцо;

(10) *если A дистрибутивно справа, $M \in \text{max}(A_A)$ и факторкольцо $A/H(M)$ является полуартиновым справа, то A_M – артиново справа инвариантное справа цепное справа кольцо;*

(11) *если A дистрибутивно справа и для любого $M \in \text{max}(A_A)$ факторкольцо $A/H(M)$ является либо полунетеровым справа, либо полуартиновым справа, то A – инвариантное справа кольцо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты (1)–(8) доказаны в [3].

(9), (10). Пусть $Q \equiv A_M$. По пункту (8) и лемме 1.15 (10) Q – цепное справа кольцо, являющееся либо полунетеровым справа, либо полуартиновым справа. По лемме 1.1 (см. условия (15), (16)) Q – инвариантное справа кольцо. Пусть теперь кольцо $A/H(M)$ полуартиново справа. По пункту (6) A инвариантно справа. По лемме 1.15 (10) Q – цепное справа полуартиново справа кольцо. Тогда Q совершенно слева и удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов. Поэтому Q_Q – цепной модуль с условием минимальности для циклических модулей и, следовательно, артинов модуль.

(11). Утверждение следует из пунктов (6), (9), (10).

1.17. ЛЕММА. (1) *A – дистрибутивное справа полупервичное кольцо, в котором факторкольцо по любому минимальному первичному идеалу является антисингулярным справа $\iff A$ – дистрибутивное справа антисингулярное справа кольцо $\iff A$ – дистрибутивное справа редуцированное кольцо $\iff$ для любого максимального правого идеала M кольца A правое кольцо частных A_M существует и является цепной справа областью;*

(2) *если A – дистрибутивное справа редуцированное кольцо, у которого каждое факторкольцо по минимальному первичному идеалу конечномерно слева, то A – дистрибутивное слева кольцо;*

(3) *если A – дистрибутивное справа кольцо, над которым все непосредственно неразложимые циклические правые модули являются полунетеровыми, то A инвариантно справа;*

(4) *если A – дистрибутивное справа нетерова справа конечномерное слева первичное кольцо, то A – инвариантная дистрибутивная нетерова область;*

(5) *если A – дистрибутивное справа полупервичное кольцо, у которого каждое факторкольцо по минимальному первичному идеалу является полунетеровым справа, то A – инвариантное справа редуцированное кольцо, у которого для любого $M \in \text{max}(A_A)$ правое кольцо частных A_M существует и является цепной справа инвариантной справа полунетеровой областью;*

(6) если A – дистрибутивное справа полупервичное кольцо, у которого факторкольцо по каждому минимальному первичному идеалу является нётеровым справа конечномерным слева кольцом, то A – инвариантное дистрибутивное кольцо, у которого каждое первичное факторкольцо является инвариантной дистрибутивной нётеровой областью, причем для любого максимального идеала M из A кольца A_M , $M A$ существуют, изоморфны и являются инвариантными цепными областями главных идеалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты (1) и (2) доказаны в [3].

(3) следует из 1.1 (см. условие (16)).

(4). Так как первичное кольцо A инвариантно справа по пункту (3), то A – область. Пункт (3) доказан для областей в [3].

(5). Пусть $F(A)$ – множество всех полунётеровых справа факторколец кольца A по минимальным первичным идеалам, $B \in F(A)$. По пункту (4) B – инвариантное справа первичное кольцо и, следовательно, область. Тогда A – подпрямое произведение областей и, следовательно, редуцированное кольцо. По пункту (1) для любого $M \in \text{max}(A_A)$ кольцо A_M существует и является цепной справа областью, откуда ядро H канонического гомоморфизма $A \rightarrow A_M$ является вполне первичным идеалом и, следовательно, A/H является гомоморфным образом полунётерова справа кольца из $F(A)$. Тогда A/H – полунётерово справа кольцо и применяем лемму 1.15 (9), (11).

(6). По пунктам (4) и (5) A – инвариантное справа редуцированное кольцо, у которого каждое факторкольцо по минимальному первичному идеалу является инвариантной нетеровой областью. По симметричному аналогу пункта (5) A – инвариантное дистрибутивное кольцо. По пункту (5) и лемме 1.15 (10), (11) кольца A_M , $M A$ существуют, изоморфны и являются инвариантными цепными нётеровыми областями. Тогда A_M и $M A$ – области главных идеалов.

1.18 [3]. Каждый правый модуль Безу над квазиинвариантным справа кольцом является дистрибутивным модулем. Если A – правое кольцо Безу, то правая дистрибутивность кольца A равносильна его правой квазиинвариантности.

1.19. Для дистрибутивности модуля M_A над строго регулярным кольцом A необходимо и достаточно, чтобы M был модулем Безу. (Достаточность следует из 1.18. Докажем необходимость. Достаточно доказать цикличность модуля $N \equiv mA + nA \subseteq M$. По 1.1 найдутся такие $a, b \in A$, что $1 = a + b$, $ma \in nA$, $nb \in mA$. Найдется такой центральный идемпотент t строго регулярного кольца A , что $aA = tA$. Тогда $mt \in nA$, $n(1 - t) = (na + nb)(1 - t) = nb(1 - t) \in m(1 - t)A$. Поэтому $N = Nt \oplus N(1 - t) = mtA + ntA + m(1 - t)A + n(1 - t)A = (nt + m(1 - t))A$.)

1.20. M_A – дистрибутивный модуль $\iff$ любой 2-порожденный полупростой фактормодуль произвольного 2-порожденного подмодуля T модуля M является дистрибутивным $\iff$ для любого 2-порожденного подмодуля T модуля M_A модуль $T/TJ(A)$ над кольцом $A/J(A)$ является дистрибутивным. (Вытекает из 1.1 (см. условие (6) и из совпадения решеток $\text{Lat}((N/NJ(A))_{A/J(A)}), \text{Lat}((N/NJ(A))_A)$.)

1.21. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть M_A – модуль над кольцом A , причем факторкольцо $A/J(A)$ строго регулярно (это так, например, если $A/J(A)$ – прямое произведение тел). Для дистрибутивности модуля M необходимо и достаточно, чтобы M был модулем Безу.

В предложении 1.21 достаточность следует из 1.18, а необходимость проверяется с помощью 1.19, 1.20 и леммы Накаямы.

1.22. СЛЕДСТВИЕ. A – дистрибутивное справа кольцо, причем факторкольцо $A/J(A)$ регулярно $\iff A$ – правое кольцо Безу, причем факторкольцо $A/J(A)$ строго регулярно.

Так как строго регулярные кольца совпадают с дистрибутивными справа регулярными кольцами, то следствие 1.22 вытекает из 1.21.

1.23. A – дистрибутивное справа антисингулярное справа полулокальное кольцо $\iff A$ – антисингулярное справа правое кольцо Безу и $A/J(A)$ – конечное прямое произведение тел $\iff A$ – конечное прямое произведение равномерных справа правых областей Безу A_i , причем $A_i/J(A_i)$ является для любого i конечным прямым произведением тел и все циклические правые модули над A конечномерны. (1.23 вытекает из 1.11, 1.13 и 1.17.)

1.24. (1) Если все простые подфакторы модуля M изоморфны, то M дистрибутивен $\iff M$ – цепной модуль. (2) Если A – локальное кольцо, то M_A дистрибутивен $\iff M$ – модуль Безу $\iff M$ – цепной модуль. ((1) см. в [3]. (2) следует из 1.21 и (1).)

§ 2. Плоские модули

Нам потребуется ряд хорошо известных утверждений о тензорных произведениях и плоских модулях. Пусть E_A – правый модуль над кольцом A , тогда правилом $f_B(\sum e_j \otimes b_j) = \sum e_j b_j$ для любого левого идеала B кольца A корректно определен канонический групповой гомоморфизм $f_B: E \otimes_A B \rightarrow EB$. Если при этом M – левый идеал кольца A , содержащий B , а $i: B \rightarrow M$ естественное вложение, то $f_B = f_M(1_E \otimes i)$.

2.1. Пусть E_A и ${}_A M$ – правый и левый модули над кольцом A . Тогда: (1) если B, C – подмодули модуля ${}_A M$, то пересечение в $E \otimes (B + C)$ канонических образов групп $E \otimes B$ и $E \otimes C$ совпадает с каноническим образом группы $E \otimes (B \cap C)$; (2) если ${}_A M = \sum_{t \in T} A m_t$, а $\{e_t\}_{t \in T}$ –

некоторое множество элементов из E , среди которых лишь конечное число ненулевых, то для выполнения равенства $\sum_{t \in T} e_t \otimes m_t = 0$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечное множество J , некоторое конечное множество $\{x_j\}_{j \in J}$ элементов модуля E и некоторое множество $\{a_{jt}\}_{j \in J, t \in T}$ элементов кольца A , среди которых лишь конечное число ненулевых, такие что $\sum_{t \in T} a_{jt} m_t = 0$ для любого $j \in J$ и $e_t = \sum_{j \in J} x_j a_{jt}$ для всех $t \in T$. (2.1 следует из лемм 7 и 10 из [6, гл. 1, § 2].)

2.2. Модуль E_A над кольцом A называется *модулем без кручения по Хаттори*, если для произвольных элементов $e \in E$ и $a \in A$, удовлетворяющих условию $ea = 0$, найдутся такие элементы $f_i \in E$, $b_i \in A$, где $i = 1, \dots, n$, что $e = \sum_{i=1}^n f_i b_i$, $b_i a = 0 \quad \forall i$. (1) E_A – модуль без кручения по Хаттори $\iff$ каждый циклический подмодуль из M содержится в некотором модуле без кручения по Хаттори, лежащем в $M \iff$ для любого элемента $a \in A$ естественный групповой гомоморфизм $E \otimes Aa \rightarrow Ea$ является изоморфизмом; (2) каждый плоский модуль является модулем без кручения по Хаттори; (3) если каждый циклический подмодуль модуля M содержится в некотором плоском модуле, лежащем в M , то M – модуль без кручения по Хаттори. (В (1) первая эквивалентность проверяется непосредственно, а вторая эквивалентность проверяется с помощью 2.1 (2). (2) следует из (1) и из [2, предложение 11.20]. (3) следует из (2) и (1).)

2.3. ЛЕММА. Для модуля E_A над кольцом A равносильны условия:

- (1) E – плоский модуль;
- (2) для любого конечнопорожденного левого идеала M кольца A канонический групповой гомоморфизм $E \otimes M \rightarrow EM$ является изоморфизмом;
- (3) канонический групповой гомоморфизм $E \otimes M \rightarrow EM$ является изоморфизмом для любого левого идеала M кольца A ;
- (4) если $E \cong F/G$, где F – свободный модуль, то для любого элемента $g \in G$ найдется такой гомоморфизм $h: F \rightarrow G$, что $h(g) = g$;
- (5) если $E \cong F/G$, где F – свободный модуль, то для любого конечного множества g_i элементов модуля G найдется такой гомоморфизм $h: F \rightarrow G$, что $h(g_i) = g_i$ для всех g_i ;
- (6) каждый конечнопорожденный подмодуль модуля E содержится в некотором плоском подмодуле модуля E ;
- (7) $EB \cap EC = E(B \cap C)$ для любых левых идеалов B, C кольца A , причем для любого элемента $a \in A$ естественный групповой гомоморфизм $E \otimes Aa \rightarrow Ea$ является изоморфизмом;
- (8) $EB \cap EC = E(B \cap C)$ для любых конечнопорожденных левых идеалов B, C кольца A , причем для любого элемента $a \in A$ естественный групповой гомоморфизм $E \otimes Aa \rightarrow Ea$ является изоморфизмом;

(9) E_A – модуль без кручения по Хаттори и $EB \cap EC = E(B \cap C)$ для любых конечнопорожденных левых идеалов B, C кольца A ;

(10) каждый циклический подмодуль модуля M содержится в некотором плоском подмодуле модуля M , причем $MB \cap MC = M(B \cap C)$ для любых конечнопорожденных левых идеалов B, C кольца A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (1), (2), (3), (4), (5) доказана в [2, предложения 11.20 и 11.27], импликация (6) $\implies$ (1) доказана в [7, следствие 10.4.6], а импликации (1) $\implies$ (6) и (7) $\implies$ (8) очевидны. Импликация (3) $\implies$ (7) следует из 2.1 (1). Эквивалентность условий (8) и (9) следует из 2.2. Импликация (10) $\implies$ (9) следует из 2.2 (3). Импликация (1) $\implies$ (10) следует из эквивалентности условий (1) и (3). Докажем импликацию (8) $\implies$ (2). Индукцией по натуральному числу t докажем, что для любого левого идеала M кольца A , порожденного t элементами, канонический групповой гомоморфизм $f_M: E \otimes M \rightarrow EM$ является изоморфизмом. При $t = 1$ утверждение верно по условию (8). Допустим, что утверждение верно при $t < k$ и докажем его для $t = k$. Представим левый идеал M в виде $M = B + C$, где $B - (k - 1)$ -порожденный левый идеал, C – главный левый идеал. Пусть $f_B: E \otimes B \rightarrow EB$, $f_C: E \otimes C \rightarrow EC$, $w: E \otimes A \rightarrow EA$, $h_B: E \otimes B \rightarrow E \otimes M$, $h_C: E \otimes C \rightarrow E \otimes M$, $g: E \otimes M \rightarrow E \otimes A$ – канонические групповые гомоморфизмы. Пусть $x = \sum e_i \otimes (b_i - c_i) = \sum e_i \otimes b_i - \sum e_i \otimes c_i \in \text{Ker}(f_M)$, $b_i \in B$, $c_i \in C$, $z \equiv \sum e_i c_i \in EB$ и пусть y – такой элемент из $E \otimes B$, что $\sum e_i \otimes b_i = h_B(y)$. Так как $0 = f_M(x) = \sum e_i (b_i - c_i)$, то $z = \sum e_i c_i \in EB \cap EC$. По условию $EB \cap EC = E(B \cap C)$. Тогда $z = \sum u_j d_j$, где $u_j \in E$, $d_j \in B \cap C$. Пусть v – такой элемент из $E \otimes B$, что $\sum u_j \otimes d_j = h_B(v)$. Тогда $0 = f_M(\sum u_j \otimes d_j - \sum e_i \otimes b_i) = wg(h_B(v - y)) = f_B(v - y)$, откуда $v = y$, поскольку по предположению индукции f_B – мономорфизм. Тогда $\sum e_i \otimes b_i = h_B(y) = h_B(v) = \sum u_j \otimes d_j$. Аналогично доказывается равенство $\sum e_i \otimes c_i = \sum u_j \otimes d_j$. Поэтому $x = \sum e_i \otimes b_i - \sum e_i \otimes c_i = 0$. Тогда f – изоморфизм.

2.4. Для кольца A равносильны условия: (1) все главные правые идеалы являются плоскими (правыми модулями над A); (2) все главные левые идеалы являются плоскими (левыми модулями над A); (3) для любых таких элементов $m, n \in A$, что $mn = 0$, найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $ma = 0$, $bn = 0$. (Так как (3) симметрично, то достаточно доказать эквивалентность (1) и (3). Пусть $m \in A$. Так как $tA \cong A_A/r(m)$ и $\text{Hom}(A_A, r(m))$ можно отождествить с $r(m)$, то из 2.3 (см. условие (4)) следует, что $\{tA - \text{плоский модуль}\} \iff \{\text{для любого элемента } n \in r(m) \text{ найдется такой элемент } a \in r(m), \text{ что } n = an\} \iff \{\text{если } mn = 0, \text{ то найдутся такие элементы } a, b \in A, \text{ что } a + b = 1, ma = 0, bn = 0\}$. Поэтому (1) и (3) равносильны.)

2.5. (1) Все подмодули модуля M_A являются плоскими $\iff$

все циклические подмодули модуля M являются плоскими, причем $NB \cap NC = N(B \cap C)$ для каждого конечнопорожденного подмодуля N модуля M и любых конечнопорожденных левых идеалов B, C кольца A .
 (2) Все подмодули плоских правых модулей и плоских левых модулей над кольцом A являются плоскими $\iff$ все конечнопорожденные правые идеалы кольца A являются плоскими $\iff$ все конечнопорожденные левые идеалы кольца A являются плоскими $\iff$ для любого конечнопорожденного правого идеала E и любого конечнопорожденного левого идеала M кольца A естественный групповой гомоморфизм $E \otimes M \rightarrow EM$ является изоморфизмом $\iff$ все правые идеалы и все левые идеалы кольца A являются плоскими. ((1) следует из 2.3. В (2) первая и вторая эквивалентности доказаны в [8, 39.12], третья эквивалентность следует из 2.3, а четвертая вытекает из предыдущих.)

2.6. Пусть все главные левые идеалы кольца A являются плоскими, E – правый идеал кольца A . Равносильны условия: (1) E_A – плоский модуль; (2) $EB \cap EC = E(B \cap C)$ для любых конечнопорожденных левых идеалов B, C кольца A ; (3) $E_M B_M \cap E_M C_M = E_M(B_M \cap C_M)$ для любых конечнопорожденных левых идеалов B, C кольца A и каждого максимального идеала M некоторого подкольца R центра кольца A . Эквивалентность (1), (2) следует из 2.3 (см. условия (3) и (7)), а эквивалентность условий (2), (3) следует из 1.10.

2.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для редуцированного кольца A равносильны условия:

- (1) все главные правые идеалы кольца A являются плоскими;
- (2) для любых таких элементов $m, n \in A$, что $(m) \cap (n) = 0$, найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $(m) \cap (a) = 0$, $(b) \cap (n) = 0$;
- (3) для любых таких элементов $m, n \in A$, что $(m) \cap (n) = 0$, найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $ma = 0$, $nb = 0$;
- (4) $mA \oplus nA = (m + n)A$ для любых таких элементов $m, n \in A$, что $(m) \cap (n) = 0$;
- (5) для любых таких элементов $m, n \in A$, что $(m) \cap (n) = 0$, 2-порожденный правый идеал $mA \oplus nA$ является главным правым идеалом;
- (6) $(m + n)A = (m + n)A \cap mA \oplus (m + n)A \cap nA$ для любых таких элементов $m, n \in A$, что $(m) \cap (n) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (1), (2), (3) следует из лемм 1.5 (1) и 2.4. Импликации (4) $\implies$ (5) и (4) $\implies$ (6) очевидны.

(3) $\implies$ (4). Достаточно доказать включения $m \in (m + n)A$, $n \in (m + n)A$. По условию (3) найдутся такие элементы $a, b \in A$, что

$a + b = 1$, $ma = 0$, $nb = 0$. Тогда $(m + n)b = mb = ma + mb = m$, $(m + n)a = na = na + nb = n$.

(5) $\Rightarrow$ (3). По условию найдутся такие элементы $f, g, u, v \in A$, что $m = (mf + ng)u$, $n = (mf + ng)v$. Так как $(m) \cap (n) = 0$, то $m = mfu$, $0 = mfv = n(1 - gv) = nb$, где $b \equiv 1 - gv$. Пусть $a \equiv 1 - b = gv \in A$. Так как $v \in r(mf)$, то по лемме 1.5 (1) $ugv \in r(mf)$ и $ma = mfua = mfugv = 0$.

(6) $\Rightarrow$ (4). Если $N \equiv (m + n)A$, $N_1 \equiv mA \oplus nA$, $h_m: N_1 \rightarrow mA$ и $h_n: N_1 \rightarrow nA$ – естественные проекции, то из условия (6) следует, что $N = h_m(N) \oplus h_n(N)$. Поэтому $m = h_m(m + n) \in N$, $n = h_n(m + n) \in N$, $N = N_1$.

2.8. Если A – дистрибутивное справа кольцо, то A антисингулярно справа $\iff A$ – редуцированное кольцо и все его главные правые идеалы плоские. (2.8 вытекает из 2.7 и 1.22 (3).)

2.9. Все подмодули плоских модулей над редуцированным правым кольцом Безу являются плоскими. (2.9 вытекает из 2.7 и 2.5 (2).)

2.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для кольца A равносильны условия:

(1) все подмодули плоских (правых или левых) модулей над кольцом A являются плоскими;

(2) $EB \cap EC = E(B \cap C)$ для любого конечнопорожденного правого идеала E и для любых конечнопорожденных левых идеалов B, C кольца A , причем для любых таких элементов $m, n \in A$, что $mn = 0$ найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $ma = 0$, $bn = 0$;

(3) $E_M B_M \cap E_M C_M = E_M (B_M \cap C_M)$ для любых конечнопорожденных левых идеалов B, C кольца A и каждого максимального идеала M некоторого унитарного подкольца R центра кольца A , и все главные правые идеалы кольца A являются плоскими.

2.10 следует из 2.5 (2), 2.6 и того, что по 2.4 можно без ограничения общности считать, что все главные левые идеалы кольца A являются плоскими.

2.11. Пусть все главные правые идеалы кольца A являются плоскими, R – некоторое унитарное подкольцо в $C(A)$. Тогда: (1) если E – правый идеал кольца A и E_M – плоский правый модуль над кольцом A_M для любого $M \in \text{max}(R)$, то E_A – плоский модуль; (2) если для любого $M \in \text{max}(R)$ все подмодули плоских модулей над кольцом A_M являются плоскими, то все подмодули плоских модулей над кольцом A являются плоскими; (3) если для любого $M \in \text{max}(R)$ кольцо A_M является полунаследственным справа или слева, то все подмодули плоских модулей над кольцом A являются плоскими; (4) если для любого $M \in \text{max}(R)$ кольцо A_M является

редуцированным правым или левым кольцом Безу, то все подмодули плоских модулей над кольцом A являются плоскими. (В 2.11 пункт (1) вытекает из 2.3 и 2.6, (2) – из 2.3 и 2.10, (3) – из (2) и 2.5 (2), (4) – из (2) и 2.9.)

2.12. Пусть A – унитарное подкольцо классически полупростого кольца B . Тогда: (1) каждый конечнопорожденный плоский (правый или левый) модуль над A является проективным; (2) если все конечнопорожденные правые идеалы кольца A являются плоскими, то A – полунаследственное кольцо. (Так как все модули над классически полупростым кольцом проективны, то (1) вытекает из следующего известного утверждения [9, предложение 11.6 гл. 1]: если M – конечнопорожденный плоский правый модуль над унитарным подкольцом A кольца B и $M \otimes_A B$ является проективным правым модулем над кольцом B , то M_A – проективный модуль. Так как по 2.5 в условиях пункта (2) и правые идеалы, и левые идеалы кольца A являются плоскими, то (2) следует из (1).)

2.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть дистрибутивное справа или слева полупервичное кольцо A является конечнопорожденным модулем над своим центральным унитарным подкольцом R . Тогда:

(1) A – дистрибутивное редуцированное кольцо, над которым все подмодули плоских правых модулей и плоских левых модулей являются плоскими;

(2) каждое первичное факторкольцо кольца A является полунаследственным порядком в теле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1). По предложению 1.14 A – дистрибутивное кольцо и для любого $M \in \text{тах}(R)$ кольцо частных A_M является полунаследственным редуцированным кольцом. По 1.10 (5) A – редуцированное кольцо. По 2.8 все главные правые идеалы кольца A являются плоскими. Так как все кольца A_M являются полунаследственными, то по 2.11 (3) и 2.5 все подмодули плоских модулей над кольцом A являются плоскими. Докажем (2). Пусть B – первичное факторкольцо кольца A . По 1.8 (1) B – порядок в простом артиновом кольце Q . По (1), примененному к B , B – дистрибутивное редуцированное кольцо, у которого все правые идеалы кольца A являются плоскими. По 2.12 B – полунаследственное кольцо. Так как Q – простое артиново классическое кольцо частных редуцированного кольца, то Q – тело.

2.14. Пусть A – локальное кольцо, у которого все главные правые идеалы являются плоскими, m и n – такие элементы кольца A , что $mn = 0$. По 2.4 найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $a + b = 1$, $ma = 0$, $bn = 0$. Из локальности кольца A следует, что хотя бы один из элементов a, b обратим. Поэтому хотя бы один из элементов m, n равен нулю. Тогда A – область.

2.15. Пусть A – цепное первичное кольцо, не являющееся областью (пример такого кольца содержится в [11]). По 2.14 не все главные правые идеалы кольца A являются плоскими.

2.16. Пусть M_A – модуль над дистрибутивным инвариантным кольцом A . M – плоский модуль $\iff$ каждый циклический подмодуль модуля M содержится в некотором плоском подмодуле модуля $M \iff M$ – модуль без кручения по Хаттори. (Следует из 1.6 и 2.3.)

2.17. ЛЕММА. Пусть a_1, a_2, b_1, b_2 – такие элементы кольца A , что $a_1b_1 = a_2b_2$ и $a_1 + a_2 \equiv B$ – плоский правый идеал. Тогда найдутся такие элементы $f_{ij} \in A$, $1 \leq i, j \leq 2$, что $a_1f_{11} = a_2f_{21}$, $(1 - f_{11})b_1 = f_{12}b_2$, $a_1f_{12} = a_2f_{22}$, $(1 - f_{22})b_2 = f_{21}b_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D_A – свободный модуль ранга 2 с базисом $\{d_1, d_2\}$, $d \equiv d_1b_1 + d_2b_2 \in D$, $g: D_A \rightarrow B_A$ – такой эпиморфизм, что $g(d_1y_1 + d_2y_2) = a_1y_1 - a_2y_2$ для всех $y_1, y_2 \in A$; $N \equiv \text{Ker}(g)$. Так как $d \in N$ и B – плоский модуль, то по 2.3 найдется такой гомоморфизм $f: D \rightarrow N$, что $f(d) = d$. Пусть f_{ij} , где $1 \leq i, j \leq 2$, – такие элементы кольца A , что $f(d_1) = d_1f_{11} + d_2f_{21} \in N$, $f(d_2) = d_1f_{12} + d_2f_{22} \in N$. Тогда $0 = g(f(d_1)) = g(f(d_2))$, $a_1f_{11} = a_2f_{21}$, $a_1f_{12} = a_2f_{22}$, $d = f(d) = f(d_1 + d_2b_2) = d_1(f_{11}b_1 + f_{12}b_2) + d_2(f_{21}b_1 + f_{22}b_2)$, $b_1 = f_{11}b_1 + f_{12}b_2$, $b_2 = f_{21}b_1 + f_{22}b_2$, $(1 - f_{11})b_1 = f_{12}b_2$, $(1 - f_{22})b_2 = f_{21}b_1$.

2.18. Модули частных. Пусть T – множество правых знаменателей в кольце A , $f: A \rightarrow A_T \equiv Q$ – канонический кольцевой гомоморфизм, N_A – модуль над A . Модулем частных модуля N относительно множества T называется правый Q -модуль $N \otimes_A Q$, обозначаемый через N_T . Через g_T обозначается A -модульный гомоморфизм $g_T \equiv g: N \rightarrow N_T$, при котором $g(n) = n \otimes 1$. Если $T = A \setminus M$, где M – правый идеал кольца A , то вместо N_T, g_T будем писать N_M, g_M . Пусть $\sim$ – такое отношение на декартовом произведении $M \times T$, при котором $(x, s) \sim (y, t) \iff \exists c, d \in A: xc = yd, sc = td \in T$. Непосредственно проверяется, что $\sim$ – отношение эквивалентности. Через h обозначается естественное сюръективное отображение $N \times T \rightarrow (N \times T)/\sim \equiv N(T)$, через v – отображение из N в $N(T)$, при котором $v(n) = h(n, 1)$. Зададим на $N(T)$ операции сложения, умножения на элементы из Q так: $h((x, s)) + h((y, t)) = h((xc + yd, u))$, где $u = sc = td \in T$, $h((x, c)) \cdot f(b)f(t)^{-1} = h((xc, tu))$, где $b \in A$, $t \in T$, $sc = bu$, $u \in T$. Непосредственно проверяется, что $N(T)$ – правый Q -модуль, v – A -модульный гомоморфизм, а отображение $w: N_T \rightarrow N(T)$, при котором $w(n \otimes x) = h((n, 1))x$, является Q -модульным гомоморфизмом, причем $v = g_T w$. Поэтому мы будем отождествлять N_T и $N(T)$.

2.19. ЛЕММА. Пусть Q – правое кольцо частных кольца A относительно множества правых знаменателей T , N_A – модуль над A , $f: A \rightarrow Q$, $g: N \rightarrow N_T$ – канонические гомоморфизмы. Тогда:

- (1) $\text{Ker}(g) = \{n \in N \mid \exists t \in T : nt = 0\}$, $N/\text{Ker}(g) \cong T$;
- (2) $(F + G)_T = F_T + G_T$, $(F \cap G)_T = F_T \cap G_T \quad \forall F, G \in \text{Lat}(N_A)$;
- (3) $H = (g^{-1}(H))_T \quad \forall H \in \text{Lat}((N_T))_Q$;
- (4) если t – кардинальное число и H – t -порожденный правый идеал кольца Q , то найдется такой t -порожденный правый идеал B кольца A , что $H = B_T$;
- (5) ${}_A Q$ – плоский модуль и $(F/G)_T \cong F_T/G_T \quad \forall F \in \text{Lat}(N)$, $G \in \text{Lat}(F)$;
- (6) если $n \in N$, $F \in \text{Lat}(N)$, $g(n) \in F_T$, то $nt \in F$ для некоторого $t \in T$;
- (7) если $(N_T)_Q$ – дистрибутивный модуль, то $(F \cap (G + H))_T = (F \cap G + F \cap H)_T \quad \forall F, G, H \in \text{Lat}(N_A)$;
- (8) если N_A – дистрибутивный модуль, то $(N_T)_Q$ – дистрибутивный модуль;
- (9) если N_A – дистрибутивный модуль и $T = A \setminus M$, где M – правый идеал кольца A , то $(N_T)_Q$ – цепной модуль;
- (10) если N_A – плоский (проективный) модуль, то $(N_T)_Q$ – плоский (проективный) модуль;
- (11) если t – кардинальное число и все t -порожденные правые идеалы кольца A являются плоскими A -модулями, то все t -порожденные правые идеалы кольца Q являются плоскими (проективными) Q -модулями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1), (2), (3), (4) проверяются с помощью 1.15 и 2.18. Докажем (5). Пусть $h: L \rightarrow M$ – мономорфизм правых модулей над A , $u: M \rightarrow M_T$ – канонический модульный гомоморфизм, $x \in L$, $u(h(x)) = 0$. По (1) найдется такой элемент $t \in T$, что $h(x)t = 0$. Тогда $xt \in \text{Ker}(h) = 0$. Поэтому $(xA)_T = 0$. Тогда ${}_A Q$ – плоский модуль. Оставшаяся часть пункта следует из того, что ${}_A Q$ – плоский модуль и того, что $(X_T)_B \cong (X \otimes_A Q)_Q$ для любого модуля X_A . (6) следует из (5) и (1). (7) следует из (2). (8) следует из (3) и (7). (9) следует из (8), 1.15 (12), 1.24 (2). (10) следует из [10, предложение 3 из § 5.3]. (11) следует из (10) и (4).

2.20. Пусть A – локализуемое справа кольцо, у которого все главные правые идеалы являются плоскими. Тогда A – редуцированное кольцо и A_M является локальной областью для любого $M \in \text{max}(A_A)$. (Пусть $M \in \text{max}(A_A)$, $Q \equiv A_M$. По 1.15 (12) и 2.19 (11) Q – локальное кольцо с плоскими главными правыми идеалами. По 2.14 Q – область. По 1.16 (4) A – редуцированное кольцо.)

2.21. ЛЕММА. Пусть все 2-порожденные правые идеалы кольца A являются плоскими. Тогда:

- (1) для любых таких элементов $u, v, w, z \in A$, что $uv = zw$, найдутся такие элементы $f, g, h \in A$, что $uf = zg$, $(1 - f)v = hw$;
- (2) для любых таких элементов $u, v, w \in A$, что $uv = vw$, найдутся такие элементы $f, g, h \in A$, что $uf = vg$, $(1 - f)v = hw$;
- (3) если кольцо A локально, B и C – главные правые идеалы кольца A и $B \cap C \neq 0$, то A – область и либо $B \subseteq C$, либо $C \subseteq B$;
- (4) если A – равномерное справа локальное кольцо, то A – цепная справа область;
- (5) если для любого $M \in \max(A_A)$ кольцо A_M существует и равномерно справа, то A – дистрибутивное справа редуцированное кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) следует из 2.17. (2) следует из (1) при $z = w$.

(3). По 2.14 A – область. Пусть $B = uA$, $C = zA$. Допустим, что $B \not\subseteq C$. Надо доказать включение $C \subseteq B$. По условию существуют такие $u, v \in A$, что $uv = zw \neq 0$. По (1) найдутся такие элементы $f, g, h \in A$, что $uf = zg$, $(1 - f)v = hw$. Элемент f не обратим, поскольку в противном случае $u \in C$, $B \subseteq C$. Так как A локально, то $1 - f \in U(A)$. Тогда $v = (1 - f)^{-1}hw$, $zw = uv = u(1 - f)^{-1}hw$. Сокращая на ненулевой элемент w области A , приходим к равенствам $z = u(1 - f)^{-1}h$, $C = zA \subseteq uA = B$. Получено противоречие.

(4), (5). (4) следует из (3). Докажем (5). По (4), 1.15 (12) и 2.19 (11) A_M – цепная справа область для любого $M \in \max(A_A)$. По 1.17 A – дистрибутивное справа редуцированное кольцо.

2.22. ЛЕММА. Пусть A – инвариантное справа кольцо и либо все его элементы с нулевым квадратом центральны, либо для любого $a \in A$ найдется такое натуральное число $n = n(a)$, что $r(a^n) = r(a^{n+1})$, либо A – кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, либо A полупервично. Тогда:

- (1) если все главные правые идеалы кольца A являются плоскими, то A – локализуемое справа редуцированное кольцо и для любого $M \in \max(A_A)$ кольцо A_M является равномерной справа локальной областью;
- (2) если все 2-порожденные правые идеалы кольца A являются плоскими, то A – дистрибутивное справа редуцированное кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1). По A – локализуемое справа кольцо [3]. По (1) A – редуцированное кольцо. Пусть $M \in \max(A_A)$, $Q \equiv A_M$, H – ядро канонического гомоморфизма $f: A \rightarrow Q$. По (1) Q – локальная область. Тогда H – вполне первичный идеал. Тогда инвариантная справа область A/H равномерна справа. По 1.15 (10) Q равномерно справа.

(2). Следует из (1) и 2.21 (5).

2.23. Пусть M_A – модуль над дистрибутивным инвариантным кольцом A . Все подмодули модуля M являются плоскими $\iff$ все циклические подмодули модуля M являются плоскими. (Следует из 2.16.)

2.24. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для инвариантного полупервичного кольца A равносильны условия:

- (1) все подмодули плоских модулей над кольцом A являются плоскими;
- (2) все 2-порожденные правые идеалы кольца A являются плоскими;
- (3) A – дистрибутивное кольцо.

В 2.23 импликация (1) $\implies$ (2) очевидна, импликация (2) $\implies$ (3) следует из 2.22 (2), импликация (3) $\implies$ (1) следует из 2.23, 2.5 (2) и 2.7.

2.25. Пусть все эндоморфизмы главных правых идеалов кольца A продолжаются до эндоморфизмов модуля A_A . Тогда: (1) если $a \in A$ и $r(a)$ – идеал кольца A (это так, например, когда a – регулярный справа элемент кольца A), то Aa – идеал кольца A ; (2) если в кольце A правые аннуляторы всех элементов являются идеалами (это так, например, когда A – либо редуцированное, либо инвариантное справа кольцо), то кольцо A инвариантно слева. (Доказывать надо только (1), поскольку (2) следует из (1). Пусть $b \in A$. Так как $r(a)$ – идеал, то $r(a) \subseteq r(ab)$, и существует такой эпиморфизм $f: aA \rightarrow abA$, что $f(a) = ab$. Тогда $f \in \text{End}(aA)$. По условию найдется такой элемент $t \in A$, что $ta = f(a) = ab$. Поэтому Aa – идеал кольца A .)

2.26. Пусть все идемпотентные эндоморфизмы всех 2-порожденных подмодулей модуля M_A продолжаются до эндоморфизмов модуля M , F – вполне инвариантный подмодуль модуля M , G_1 и G_2 – такие подмодули модуля M , что $G_1 \cap G_2 = 0$. Тогда $F \cap (G_1 + G_2) = F \cap G_1 + F \cap G_2$, причем для любых элементов $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$ найдутся такие эндоморфизмы d_1, d_2 модуля M , что $d_1(g_1) = d_2(g_2) = 0$, $d_1(g_2) = g_2$, $d_2(g_1) = g_1$. (Пусть $H \equiv g_1A \oplus g_2A$, $h_i: H \rightarrow g_iA$ – естественные проекции. Эндоморфизмы h_i продолжаются до эндоморфизмов $d_i \in \text{End}(M)$. Тогда $d_1(g_1) = d_2(g_2) = 0$, $d_1(g_2) = g_2$, $d_2(g_1) = g_1$. Если $f = g_1 + g_2 \in F \cap (G_1 + G_2)$, то $g_1 = d_2(g_1 + g_2) = d_2(f)$, $g_2 = d_1(f)$. Тогда $d_i(f) \in F$, поскольку F – вполне инвариантный подмодуль модуля M . Поэтому $f = d_2(f) + d_1(f) \in F \cap G_1 + F \cap G_2$, $F \cap (G_1 + G_2) \subseteq F \cap G_1 + F \cap G_2 \subseteq F \cap (G_1 + G_2)$.)

2.27. Пусть все идемпотентные эндоморфизмы всех 2-порожденных правых идеалов кольца A продолжаются до эндоморфизмов модуля A_A , F – идеал кольца A , G_1 и G_2 – такие правые идеалы кольца A , что

$G_1 \cap G_2 = 0$. Тогда: (1) $F \cap (G_1 + G_2) = F \cap G_1 + F \cap G_2$, причем для любых элементов $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ найдутся такие элементы $d_1, d_2 \in A$, что $d_1 g_1 = d_2 g_2 = 0, d_1 g_2 = g_2, d_2(g_1) = g_1$; (2) если элемент $a \in A$ регулярен слева, то aA – существенный правый идеал.

(1) следует из 2.26. (2). Пусть $b \in A, aA \cap bA = 0$. По (1) найдется такой элемент $d \in A$, что $da = 0, db = b$. Тогда $d \in \ell(a) = 0, b = db = 0$.

2.28. Пусть каждый эндоморфизм любого 2-порожденного правого идеала произвольного факторкольца B кольца A продолжается до эндоморфизма модуля B_B . Тогда: (1) A – арифметическое кольцо; (2) если в кольце A правые аннуляторы всех элементов являются идеалами (это так, например, если A – редуцированное кольцо), то A – инвариантное слева дистрибутивное слева кольцо; (3) если A инвариантно справа, то A – инвариантное дистрибутивное кольцо. (Пусть F, G, H – такие идеалы кольца A , что $F \subseteq G + H, M \equiv F \cap G + F \cap H, h: A \rightarrow A/(G \cap H)$ – естественный эпиморфизм. По 2.27 (1), примененной к $h(A)$, $h(F) = h(F) \cap h(G) + h(F) \cap h(H)$. Тогда, используя модулярный закон, получаем, что $F + G \cap H = M + G \cap H, F = F \cap (M + G) \cap H = M + F \cap G \cap H = M$ и (1) доказано. (2) следует из (1) и 2.25 (2). (3) следует из (2).)

2.30. Пусть A_1 и A_2 – идеалы кольца A, x_1 и x_2 – такие элементы кольца A , что $x_1 - x_2 \in A_1 + A_2$. Тогда найдется такой элемент $a \in A$, что $a - x_1 \in A_1, a - x_2 \in A_2$. (Пусть $x_1 - x_2 = a_1 - a_2$, где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a \equiv x_1 - a_1 = x_2 - a_2$. Тогда $a - x_1 = -a_1 \in A_1, a - x_2 = -a_2 \in A_2, a$ – искомый элемент.)

2.31. ЛЕММА. *Равносильны условия:*

- (1) A – арифметическое кольцо;
- (2) для любых идеалов $A_1, \dots, A_n$ кольца A и любых таких элементов $x_1, \dots, x_n \in A$, что $x_i - x_j \in A_i + A_j$ для всех i, j , найдется такой элемент $x \in A$, что $x - x_i \in A_i$ при $i = 1, \dots, n$;
- (3) для любых идеалов A_1, A_2, A_3 кольца A и любого элемента $d \in (A_1 + A_2) \cap (A_1 + A_3)$, найдется такой элемент $x \in A_1$, что $x - d \in A_2 \cap A_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (2) $\implies$ (3) следует из того, что (2) превращается в (3) при $n = 3, x_1 = 0, x_2 = x_3 = d$.

(1) $\implies$ (2). При $n = 2$ утверждение следует из 2.30. Пусть утверждение верно для $n - 1$. Найдется такой элемент $b \in A$, что $b - x_i \in A_i$ для $i = 1, \dots, n - 1$. Кроме того, $x_i - x_n \in A_i + A_n$ при $i = 1, \dots, n - 1, b - x_n = (b - x_i) + (x_i - x_n) \in \bigcap_{i=1}^{n-1} (A_i + A_n)$. Так как A – арифметическое кольцо, то $b - x_n \in A_n + \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i, b - x_n = a_n - d$, где $a_n \in A_n$,

$d \in \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i$. Пусть $a \equiv b + d$. Тогда $a - x_n = an \in A_n$. Кроме того, $a - x_i = b - x_i + d \in A_i$ при $i = 1, \dots, n-1$. Поэтому a – искомый элемент.

(3) $\Rightarrow$ (1). Достаточно доказать, что если M, B, C – идеалы кольца A , $d \in (M+B) \cap (M+C)$, то $d \in M + (B \cap C)$. Пусть $d = m_1 + b = m_2 + c$, где $m_1, m_2 \in M, b \in B, c \in C$. По условию найдется такой элемент $x \in M$, что $x - d \in B \cap C$. Пусть $y \equiv d - x \in B \cap C$. Тогда $d = x + y \in M + B \cap C$.

2.32. Целозамкнутые модули и кольца. Модуль M называется *целозамкнутым*, если все эндоморфизмы его конечнопорожденных подмодулей продолжаются до эндоморфизмов модуля M . Правая целозамкнутость кольца A равносильна тому, что для любого правого идеала B кольца A и каждого эндоморфизма $f \in \text{End}(B_A)$ найдется такой элемент $a \in A$, что $f(b) = ab$ для всех $b \in B$. Коммутативная область A целозамкнута как модуль над собой в смысле данного определения тогда и только тогда, когда A целозамкнута в классическом смысле в своем поле частных.

2.33. ЛЕММА. Для кольца A равносильны условия:

- (1) A – дистрибутивное инвариантное кольцо;
- (2) A – инвариантное кольцо, все факторкольца которого являются целозамкнутыми кольцами;
- (3) все факторкольца кольца A являются целозамкнутыми кольцами, причем в кольце A правые аннуляторы и левые аннуляторы всех элементов являются идеалами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий (2), (3) и импликация (2) $\Rightarrow$ (1) следуют из 2.28. Докажем импликацию (1) $\Rightarrow$ (2). Так как условие (1) симметрично и наследуется факторкольцами, то достаточно доказать целозамкнутость модуля ${}_A A$. Пусть $\sum_{i=1}^n Am_i \equiv M \subseteq A$. Так как ${}_A M$ – конечнопорожденный дистрибутивный модуль над инвариантным кольцом A , то по 2.29 $f(Am_i) \subseteq Am_i \ \forall i$. Поэтому найдутся такие элементы $x_1, \dots, x_n \in A$, что $f(m_i) = m_i x_i \in m_i A = Am_i$. Тогда $0 = (Am_i \cap Am_j)(x_i - x_j)$ для всех i, j . Так как $Am_i \cap m_i A \cap m_j A$, то $x_i - x_j \equiv d_{ij} \in r(m_i A \cap m_j A)$. По 4.2 найдутся такие элементы $a_{ij}, b_{ij} \in A$, что $1 = a_{ij} + b_{ij}$, $m_i A a_{ij} + m_j A b_{ij} \subseteq m_i A \cap m_j A$. Тогда $a_{ij} d_{ij} \in r(m_i A) \equiv A_i$, $b_{ij} \in r(m_j A) \equiv A_j$, $x_i - x_j = a_{ij} d_{ij} + b_{ij} d_{ij} \in A_i + A_j$. По 2.31 найдется такой элемент $x \in A$, что $x - x_i \in A_i$ для всех i . Тогда правилом $g(y) = yx$ при $y \in A$ корректно задается эндоморфизм $g \in \text{End}({}_A A)$, являющийся продолжением f .

2.34. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для редуцированного кольца A равносильны условия:

- (1) все факторкольца кольца A являются целозамкнутыми кольцами;
- (2) A – инвариантное кольцо, над которым все подмодули плоских модулей являются плоскими.

Так как в редуцированном кольце все правые аннуляторы и все левые аннуляторы являются по 1.11 идеалами, то 2.34 следует из того, что и (1), и (2) равносильны в случае редуцированного кольца A тому, что A – инвариантное дистрибутивное кольцо (см. 2.33 и 2.24).

2.35. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для кольца A равносильны условия:*

- (1) A – дистрибутивное справа полупервичное кольцо, у которого каждое факторкольцо по минимальному первичному идеалу является нетеровым справа конечномерным слева кольцом;
- (2) A – дистрибутивное слева полупервичное кольцо, у которого каждое факторкольцо по минимальному первичному идеалу является нетеровым слева конечномерным справа кольцом;
- (3) A – инвариантное редуцированное кольцо, над которым все подмодули плоских модулей являются плоскими, причем все первичные факторкольца кольца A являются инвариантными наследственными нетеровыми областями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как условие (3) симметрично, то доказывать надо только эквивалентность условий (1) и (3). Импликация (3) $\implies$ (1) следует из предложения 2.24. Докажем импликацию (1) $\implies$ (3). По лемме 1.17 (6) A – инвариантное редуцированное кольцо, у которого каждое первичное факторкольцо B является инвариантной дистрибутивной нетеровой областью, обладающей телом частных. Теперь применяем к кольцу A 2.24, а к кольцу B – 2.24 и 2.12.

Московский энергетический институт
E-mail: askar@exodus.mirea.ac.ru

Поступило
16.05.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jensen C. U. A remark on arithmetical rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. № 6. P. 951–954.
- [2] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. М.: Мир, 1977.
- [3] Туганбаев А. А. Дистрибутивные справа и слева кольца // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 4. С. 604–627.
- [4] Rowen L. H. Ring theory. Student edition. Boston: Academic Press, 1991.
- [5] Басс Х. Алгебраическая K -теория. М.: Мир, 1973.
- [6] Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
- [7] Каш Ф. Модули и кольца. М.: Мир, 1981.
- [8] Wisbauer R. Foundations of module and ring theory. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.
- [9] Stenström B. Rings of quotients: an introduction to methods of ring theory. Berlin: Springer Verlag, 1975.
- [10] Ламбек И. Кольца и модули. М.: Мир, 1971.
- [11] Dubrovin N. I. The rational closure of group rings of left-ordered groups. Gerhard Mercator Universität Duisburg Gesamthochschule, 1994.