Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Устинов, О пространствах почтисуществования, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 2, 278–287

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1824>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:44:52

О ПРОСТРАНСТВАХ ПОЧТИСУЩЕСТВОВАНИЯ

Г. М. Устинов

Пусть Q – компакт, L – замкнутое подпространство в $C(Q)$. В заметке изучаются аппроксимационные свойства подпространств $L \subset C(Q)$, $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$. Говорят, что L есть *подпространство существования*, если $\forall x \in C(Q)$ множество

$$P_L x = \{y \in L : \|x - y\| = \inf(\|x - z\| : z \in L) = \rho(x, L)\}$$

не пусто. Известно сравнительно немного примеров бесконечномерных подпространств существования L , $\operatorname{codim} L = +\infty$. Введем следующее определение. Подпространство L назовем *подпространством почтисуществования*, если $P_L x \neq \emptyset$ для всех x из некоторого всюду плотного в $C(Q)$ множества. На основе полученных в работе результатов о “почти аппроксимации” заданного элемента предлагается конструкция подпространства почтисуществования (теорема 1). Из результатов заметки следует, в частности, что если Q счетен, то в $C(Q)$ любое подпространство L , $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$, аппроксимируется подпространствами почтисуществования. Не известно, верен ли аналогичный факт для пространства $C(Q)$, где компакт Q не обязательно счетен.

Если Z – подпространство в $C(Q)$, то $V_Z = \{z \in Z : \|z\| \leq 1\}$, $Z^\perp = \{\varphi \in C^*(Q) : \varphi|_Z = 0\}$ – аннулятор Z . Если L, E – подпространства в $C(Q)$, то

$$d(L, E) = \max \left(\sup_{x \in V_L} \rho(x, V_E), \sup_{y \in V_E} \rho(y, V_L) \right).$$

Функционал $\varphi \in C^*(Q)$ отождествляется с регулярной мерой μ_φ ограниченной вариации, определенной на элементах σ -алгебры Σ борелевских подмножеств Q : $\varphi(f) = \int_Q f d\mu_\varphi$, $f \in C(Q)$; $\operatorname{Var} \mu_\varphi$ – вариация меры μ_φ ,

Работа выполнена по программе фонда “Фундаментальные проблемы математики и механики”, тема № 1.1.64.

$\text{supp } \mu_\varphi$ – носитель меры μ_φ , мера μ_φ дискретна, если она порождается функционалом вида $\varphi(f) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f(t_i)$, где $t_i \in Q$, $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| < +\infty$. Если $(\varphi_i)_{i=1}^n$ – конечный набор элементов, то $[(\varphi_i)_{i=1}^n]$ – линейное подпространство, порожденное элементами φ_i .

ЛЕММА 1. Пусть $x \notin L$, $\psi \in L^\perp$, $\|\psi\| = 1$, $\psi(x) = \sup\{\varphi(x) : \varphi \in L^\perp, \|\varphi\| = 1\}$, $\text{supp } \mu_\psi$ конечен. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists y: \|x - y\| < \varepsilon, P_L y \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in C(Q)$, то

$$\psi(f) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(t_i), \quad \sum_{i=1}^k |\alpha_i| = 1.$$

Пусть $d = \rho(x, L)$ и $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d$, $x_n \in L$. Тогда из последовательности x_n можно выделить такую подпоследовательность x_{n_j} , чтобы $\forall i \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}(t_i) = q_i$. Легко видеть, что $|q_i - x(t_i)| \leq d$ и, так как $\sum_{i=1}^k \alpha_i (-q_i + x(t_i)) = d$, то $q_i = x(t_i) - d \text{sign } \alpha_i$. Пусть $\|x_{n_j} - x\| < d + \varepsilon/3$, $|x_{n_j}(t_i) - q_i| < \varepsilon/3$, $i = 1, 2, \dots, k$ при $n_j \geq n_0$. Рассмотрим многозначное отображение $\tau: Q \rightarrow 2^R$,

$$\tau(t) = \begin{cases} \{r : |x_{n_0}(t) - r| \leq d\} \cap \{r : |x(t) - r| \leq \varepsilon\} \\ \text{при } t \neq t_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \\ x_{n_0}(t_i) + d \text{sign } \alpha_i \quad \text{при } t = t_i, \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{cases}$$

При каждом $t \in Q$ множество $\tau(t)$ замкнуто, выпукло, не пусто и нетрудно убедиться в том, что отображение τ полунепрерывно снизу, т.е. если G – открыто в R , то открыто в Q множество $\tilde{G} = \{t: \tau(t) \cap G \neq \emptyset\}$. Следовательно, по теореме Майкла [1, с. 364, теорема 3.2''] τ допускает непрерывную селекцию $y(t)$. Тогда $\|x_{n_0} - y\| = d$ и потому $\rho(y, L) \leq d$. С другой стороны,

$$\rho(y, L) = \sup\{\varphi(y) : \varphi \in L^\perp, \|\varphi\| = 1\} \geq \psi(y) = \psi(y - x_{n_0}) = d.$$

Следовательно, $\rho(y, L) = d$ и $x_{n_0} \in P_L y$. Итак, $P_L y \neq \emptyset$, $\|y - x\| < \varepsilon$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $x \notin L$, $z_i \in L$, $i = 1, 2, \dots, k$, $\varphi_j \in L^\perp$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\psi \in L^\perp \setminus [\varphi_j]$, $\|\psi\| = 1$, $\psi(x) = \sup\{\varphi(x) : \varphi \in L^\perp, \|\varphi\| = 1\}$, $\text{supp } \mu_\psi$ бесконечен. Тогда $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$ найдутся функционал $\tilde{\psi}_1 \in C^*(Q)$, $\|\tilde{\psi}_1\| = 1$, подпространство E , элемент $\tilde{x}$, линейный оператор $T: L \rightarrow E$ такие, что $\|\psi - \tilde{\psi}_1\| < \varepsilon$, $\tilde{\psi}_1(z_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$, $E \subset \tilde{\psi}_1^{-1}(0) \cap \bigcap_{j=1}^n \varphi_j^{-1}(0)$, $\|x - \tilde{x}\| < \delta$, $P_E \tilde{x} \neq \emptyset$, $T(L) = E$, $\|Tx - x\| < \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in L$, $Tz_i = z_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для борелевского множества $e \in \Sigma$ полагаем $m(e) = \text{Var } \mu_\psi(e)$, и в пространстве $L^2(m)$ рассмотрим подпространство $Z = [z_i]$. Пусть $z = \dim Z$ и $(f_j)_{j=1}^r$ — такой базис Z , что $(f_j, f_s) = 0$ при $j \neq s$, $\|f_j\|_C = 1$. Полагаем $p_j = \|f_j\|_{L^2(m)}$, $g_j(t) = p_j^{-1} f_j(t)$,

$$D = \left(\sum_{j=1}^r p_j^2 \right)^{1/2}, \quad B = \sup_{t \in Q} \left\{ \sum_{j=1}^r (p_j^{-1} f_j(t))^2 \right\}^{1/2}$$

и если $e \in \Sigma$, то $f_j^e = f_j \chi_e$, χ_e — характеристическая функция множества e .

Определим линейное отображение $T_e: Z \rightarrow L^2(m)$, $T_e(f_j) = f_j^e$, $j = 1, 2, \dots, r$. Так как $\dim Z < +\infty$, то найдется такое число $b > 0$, что $\forall e \in \Sigma$, $m(e) < b$, оператор T_e будет взаимно однозначным и, более того,

$$\eta = D \left(\sum_{j=1}^r \|f_j - f_j^e\|^2 \right)^{1/2} < \frac{1}{2}.$$

Пусть $Y = [\varphi_j]$, $Y_1 = Y \oplus [\psi]$ и $P: Y_1 \rightarrow [\psi]$ — линейный проектор, $P^{-1}(0) = Y$. Заметим, что найдется такое число $0 < \tau < 1$, что если $u \in C^*(Q)$, $\|u - \psi\| < \tau$, $Y_u = Y \oplus [u]$, $P_u: Y_u \rightarrow [u]$ — линейный проектор, $P_u^{-1}(0) = Y$, то $\|P_u\| < \|P\| + 1$. Пусть $d = \rho(x, L)$ и

$$\sigma = \min \left\{ b, \tau, \varepsilon [4(1+DB)(\|P\|+1)]^{-1}, \delta [4(\|P\|+1)(\|x\|+d)(1+4DB)]^{-1} \right\}.$$

Уточним теперь выбор множества $e \in \Sigma$. Пусть $x_n \in L$ и $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d$.

Из последовательности $(x_n) \subset L^2(m)$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $x_{n_j} \xrightarrow{w} x' \in L^2(m)$. Известно, что некоторая последовательность y_k выпуклых комбинаций элементов x_{n_j} сходится к x' по норме $L^2(m)$. Следовательно, y_k сходится к x' по мере m , а потому [2, с. 161, лемма 2] некоторая подпоследовательность y_{k_i} сходится почти равномерно. Значит, можно найти такое множество $e' \in \Sigma$, $m(e') < \sigma/2$, что на множестве $Q \setminus e'$ последовательность y_{k_i} сходится равномерно. Пусть далее $\mu_\psi = \mu_\psi^+ - \mu_\psi^-$ — разложение μ_ψ на положительную и отрицательную составляющие. В силу регулярности μ_ψ^+ , μ_ψ^- найдем такие замкнутые непересекающиеся множества $F^+ \subset \text{supp } \mu_\psi^+ \cap (Q \setminus e')$, $F^- \subset \text{supp } \mu_\psi^- \cap (Q \setminus e')$, чтобы $m((Q \setminus e') \setminus (F^+ \cup F^-)) < \sigma/2$. Полагаем $e_0 = Q \setminus (F^+ \cup F^-)$. Тогда соотношением

$$\psi_0(f) = \int_{Q \setminus e_0} f d\mu_\psi, \quad f \in C(Q),$$

определен функционал $\psi_0 \in C^*(Q)$, $\|\psi - \psi_0\| < \sigma$. Для $e \in \Sigma$ полагаем $m_0(e) = \text{Var } \mu_\psi(e \cap (Q \setminus e_0))$ и пусть $\tilde{f}_j = f_j^{e_0}$, $\tilde{T} = T_{e_0}$, Z_0 – подпространство в $L^2(m_0)$, порожденное функциями z_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Сужение $\tilde{\psi}_0$ на Z_0 функционала ψ_0 по теореме Рисса можно представить как некоторый элемент $h \in Z_0$, $h(t) = \sum_{j=1}^r c_j \tilde{f}_j(t)$, $\tilde{\psi}_0(\tilde{f}_j) = \int_{Q \setminus e_0} \tilde{f}_j(t) h(t) dm_0$, $\|h\| = \|\tilde{\psi}_0\|$. Оценим $\|\tilde{\psi}_0\| = \sup\{\tilde{\psi}_0(f) : f \in Z_0, \|f\| = 1\}$. Пусть числа b_j таковы, что $\sum_{j=1}^r b_j^2 = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{T} \left(\sum_{j=1}^r b_j g_j \right) \right\| &\geq \left\| \sum_{j=1}^r b_j g_j \right\| - \left\| \sum b_j (g_j - p_j^{-1} \tilde{f}_j) \right\| \\ &= 1 - \left\| \sum \frac{b_j}{p_j} (f_j - \tilde{f}_j) \right\| \\ &\geq 1 - \left(\sum \left(\frac{b_j}{p_j} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum \|f_j - \tilde{f}_j\|^2 \right)^{1/2} > 1 - \eta. \end{aligned}$$

Следовательно, если $f = \sum_{j=1}^r \alpha_j \tilde{f}_j$, $\|f\|_{L^2(m_0)} = 1$, то

$$\left(\sum_{j=1}^r (\alpha_j p_j)^2 \right)^{1/2} < 1/(1 - \eta).$$

Так как $|\tilde{\psi}_0(f_j)| = |q_j| < \sigma$, то, учитывая (1), имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_0(f)| &= \left| \tilde{\psi}_0 \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j \tilde{f}_j \right) \right| = \left| \sum_{j=1}^r (\alpha_j p_j) \tilde{\psi}_0 \left(\frac{\tilde{f}_j}{p_j} \right) \right| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^r (\alpha_j p_j)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^r \left(\frac{q_j}{p_j} \right)^2 \right)^{1/2} < \frac{\sigma}{1 - \eta} D < 2\sigma D. \end{aligned}$$

Значит, $\|\tilde{\psi}_0\| < 2\sigma D$. Оценим теперь $\text{ess sup } |h(t)|$. Поскольку $\|h\| = \|\tilde{\psi}_0\|$, то для $t \in Q \setminus e_0$ получаем оценку

$$\begin{aligned} |h(t)| &= \left| \sum_{j=1}^r c_j \tilde{f}_j(t) \right| = \left| \sum_{j=1}^r c_j p_j \frac{\tilde{f}_j(t)}{p_j} \right| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^r (c_j p_j)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^r \left(\frac{\tilde{f}_j(t)}{p_j} \right)^2 \right)^{1/2} < \frac{\|\tilde{\psi}_0\|}{1 - \eta} B \\ &< 2\|\tilde{\psi}_0\| B < 4\sigma B D < 1. \end{aligned}$$

Определим теперь меру μ_1 :

$$\begin{aligned}\mu_1(e) &= \mu_\psi(e \cap (Q \setminus e_0)) - \int_{e \cap (Q \setminus e_0)} h(t) dm_0 \\ &= \int_{e \cap (Q \setminus e_0) \cap F^+} (1 - h(t)) d\mu_\psi \\ &\quad + \int_{e \cap (Q \setminus e_0) \cap F^-} (h(t) - 1) d\mu_\psi, \quad e \in \Sigma.\end{aligned}$$

Тогда $\text{supp } \mu_1^+ \subset F^+$, $\text{supp } \mu_1^- \subset F^-$ и определяемый мерой μ_1 функционал $\psi_1 \in C^*(Q)$. Имеем

$$\begin{aligned}\|\psi - \psi_1\| &< \sigma + 4\sigma BD = \sigma(1 + 4BD) \\ &\leq \min\left(\varepsilon[4(\|P\| + 1)]^{-1}, \delta[4(\|P\| + 1)(\|x\| + d)]^{-1}\right).\end{aligned}$$

Обратимся к построению подпространства E . Пусть $L' = \psi_1^{-1}(0) \cap L$. Если $L' = L$, то полагаем $E = L$. Допустим, что $L' \neq L$ и возьмем $x_0 \in L$, $\|x_0\| = 1$, для которого $\rho(x_0, L') > 3/4$. Тогда $\varphi_j(x_0) = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, и $0 < |\psi_1(x_0)| < \|\psi - \psi_1\| < \varepsilon[4(\|P\| + 1)]^{-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\rho\left(x_0, \psi_1^{-1}(0) \cap \bigcap_{j=1}^n \varphi_j^{-1}(0)\right) &= \sup\{\varphi(x_0) : \varphi \in Y \oplus [\psi_1], \|\varphi\| = 1\} \\ &\leq |\psi_1(x_0)|(\|P\| + 1),\end{aligned}$$

а потому можно найти элемент x' : $\|x'\| < |\psi_1(x_0)|(\|P\| + 1)$ такой, чтобы $x_1 = x_0 + x' \in \psi_1^{-1}(0) \cap \bigcap_{j=1}^n \varphi_j^{-1}(0)$. Полагаем $E = L' \oplus [x_1]$, и легко видеть, что $z_i \in E$, $i = 1, 2, \dots, k$, $\varphi_j \in E^\perp$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\psi_1 \in E^\perp$. Для любого $x \in L$, $\|x\| = 1$, $x = \lambda x_0 + y$, $y \in L'$, определим $Tx = \lambda x_1 + y$. Тогда

$$\|Tx - x\| < |\lambda| \cdot \|x_0 - x_1\| < \varepsilon[4(\|P\| + 1)]^{-1} \cdot |\psi_1(x_0)|(\|P\| + 1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, осталось построить элемент x_ε .

Последовательность y_{k_i} сходится почти равномерно, а, значит, m -почти всюду к функции $v(t)$. При этом $|v(t) - x(t)| \leq d$ m -почти всюду и, поскольку $\mu_\psi(-v + x) = d$, то $v(t) = x(t) - d$ μ_ψ -почти всюду на $\text{supp } \mu_\psi^+$ и $v(t) = x(t) + d$ μ_ψ -почти всюду на $\text{supp } \mu_\psi^-$. Найдется такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\|y_{k_i} - x\| < d + \frac{\delta}{4}, \quad \sup_{t \in Q \setminus e_0} |y_{k_i}(t) - v(t)| < \frac{\delta}{4}, \quad |\psi_1(y_{k_i} - v)| < \frac{\delta}{4(\|P\| + 1)}$$

при $k \geq k_0$. При этом $|\psi_1(v)| < |(\psi - \psi_1)(v)| + |\psi(v)| < \delta/(4(\|P\| + 1))$, а, значит, $|\psi_1(y_{k_0})| < \delta/(2(\|P\| + 1))$. Возможны случаи: 1) $y_{k_0} \in L'$, 2) $y_{k_0} \notin L'$. Во втором случае $y_{k_0} = y'_{k_0} + \lambda_0 x_0$, $y'_{k_0} \in L'$, а потому $\lambda_0 = \psi_1(y_{k_0})|\psi_1(x_0)|^{-1}$. Полагаем $\bar{y}_{k_0} = y'_{k_0} + \lambda_0 x_1$. Тогда

$$\|y_{k_0} - \bar{y}_{k_0}\| = |\lambda_0| \cdot \|x'\| < \frac{|\psi_1(y_{k_0})|}{|\psi_1(x_0)|} |\psi_1(x_0)| (\|P\| + 1) < \frac{\delta}{2}.$$

Полагаем $\tilde{y}(t) = y_{k_0}(t)$, если $y_{k_0} \in L'$, и $\tilde{y}(t) = \bar{y}_{k_0}(t)$, если $y_{k_0} \notin L'$. Определим многозначное отображение $\tau: Q \rightarrow 2^R$, полагая:

$$\tau(t) = \begin{cases} \{r : |\tilde{y}(t) - r| \leq d\} \cap \{r : |x(t) - r| \leq \delta\} & \text{при } t \notin F^+ \cup F^-, \\ \tilde{y}(t) + d & \text{при } t \in F^+, \\ \tilde{y}(t) - d & \text{при } t \in F^-. \end{cases}$$

Можно убедиться в том, что выполнены все условия теоремы Майкла [1, с. 364, теорема 3.2], а потому $\tau(t)$ допускает непрерывную селекцию $\tilde{x}(t)$. Пусть $\tilde{\psi}_1 = \psi_1/\|\psi_1\|$, тогда $\tilde{\psi}_1(\tilde{x} - \tilde{y}) = \|\tilde{x} - \tilde{y}\| = d$. Следовательно, $\rho(\tilde{x}, E) \leq d$. Поскольку $\tilde{\psi}_1 \in E^\perp$ и $\|\psi_1\| = 1$, то $\rho(\tilde{x}, E) \geq \tilde{\psi}_1(\tilde{x} - \tilde{y}) = d$. Значит, $\rho(\tilde{x}, E) = d$ и $\tilde{y} \in P_E \tilde{x}$. Лемма доказана.

Анализ доказательства леммы 2 показывает, что справедливо следующее замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в условиях леммы 2 функционал ψ имеет вид

$$\psi(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f(t_i), \quad t_i \in Q, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| = 1,$$

то в качестве ψ_1 можно взять функционал вида $\psi_1(f) = \sum_{i=1}^n \beta_i f(t_i)$ при некоторых числах $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Q — метризуемый компакт, $L \subset C(Q)$, $\dim L = \text{codim } L = +\infty$ и $L^\perp$ состоит из дискретных мер. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется подпространство почтисуществования E , $d(E, L) < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность элементов $(x_i)_{i=1}^\infty$ всюду плотна в $C(Q)$ и возьмем две последовательности чисел

$$\varepsilon_i > 0, \quad \delta_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \delta_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Пусть $n_1 = \min\{i : x_i \in L\}$ и

$$\psi_1 \in L^\perp, \quad \|\psi_1\| = 1, \quad \psi_1(x_{n_1}) = \sup\{\varphi(x_{n_1}) : \varphi \in L^\perp, \|\varphi\| = 1\}.$$

Если $\text{supp } \mu_{\psi_1}$ конечен, то по лемме 1 найдем $\tilde{x}_1, z_1$: $\|x_{n_1} - \tilde{x}_1\| < \delta_1$, $z_1 \in L$, $\psi_1(\tilde{x}_1 - z_1) = \|\tilde{x}_1 - z_1\| = \rho(\tilde{x}_1, L)$. Полагаем $L_1 = L$, $\tilde{\psi}_1 = \psi_1$, $T_1 = I$. Если же $\text{supp } \mu_{\psi_1}$ бесконечен, то, согласно лемме 2 и замечанию 1, найдем функционал $\tilde{\psi}_1$, подпространство L_1 , элементы $\tilde{x}_1, z_1$, оператор $T_1: L \rightarrow L_1$ такие, что $\text{supp } \mu_{\tilde{\psi}_1}$ конечен,

$$\begin{aligned} x_i \in L_1, \quad i = 1, 2, \dots, n_1 - 1, \quad \tilde{\psi}_1 \in L_1^\perp, \quad \|x_{n_1} - \tilde{x}_1\| < \delta_1, \\ z_1 \in L_1, \quad \tilde{\psi}_1(\tilde{x}_1 - z_1) = \|\tilde{x}_1 - z_1\| = \rho(\tilde{x}_1, L_1), \\ T_1 x_i = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_1 - 1, \quad \|T_1 x - x\| < \varepsilon_1 \|x\| \quad \forall x \in L. \end{aligned}$$

Как следует из доказательства леммы 2 $(L_1)^\perp \subset L^\perp \oplus [\tilde{\psi}_1]$, а потому $(L_1)^\perp$ состоит из дискретных мер.

Допустим, что для всех j , $j = 1, 2, \dots, k - 1$, уже определены индексы n_j , функционалы $\tilde{\psi}_j$, элементы $\tilde{x}_j, z_j$, подпространства L_j со свойствами:

- а) $n_j = \min\{i : i > n_{j-1}, x_i \in L_{j-1}\}$, ($n_0 = 0$);
- б) $\|\tilde{\psi}_j\| = 1$, $\text{supp } \mu_{\tilde{\psi}_j}$ конечен, $\tilde{\psi}_j \in L_s^\perp$, $j = 1, 2, \dots, s - 1$; $s = 1, 2, \dots, k - 1$ ($L_0 = L$);
- в) $\|\tilde{x}_j - x_{n_j}\| < \delta_j$, $z_j \in L_j$, $\|\tilde{x}_j - z_j\| = \tilde{\psi}_j(\tilde{x}_j - z_j) = \rho(\tilde{x}_j, L_j)$, $z_j \in L_s$, $j = 1, 2, \dots, s$, $s = 1, 2, \dots, k - 1$, $x_j \in L_s$, $n_{s-1} < i < n_s$, $s = 1, 2, \dots, j$;
- г) существует линейный оператор $T_j: L_{j-1} \rightarrow L_j$, $T_j(L_{j-1}) = L_j$, $\|T_j x - x\| < \varepsilon_j \|x\| \quad \forall x \in L_{j-1}$, $T_j z_i = z_i$, $i = 1, 2, \dots, j - 1$, $T_j x_i = x_i$, $n_{s-1} < i < n_s$, $s = 1, 2, \dots, j$;
- д) $(L_j)^\perp$ состоит из дискретных мер.

Покажем, что можно определить $n_k, \tilde{\psi}_k, \tilde{x}_k, z_k, L_k, T_k$ так, чтобы свойства а)–д) выполнялись при $j = 1, 2, \dots, k$.

Полагаем $n_k = \min\{i : i > n_{k-1}, x_i \notin L_{k-1}\}$. Пусть $\psi \in L_{k-1}^\perp$, $\|\psi\| = 1$, $\psi(x_{n_k}) = \sup\{\varphi(x_{n_k}) : \varphi \in L_{k-1}^\perp, \|\varphi\| = 1\}$. Если $\text{supp } \mu_\psi$ конечен, то по лемме 1 найдем элементы $\tilde{x}_k, z_k$: $\|\tilde{x}_k - x_{n_k}\| < \delta_k$, $z_k \in L_{k-1}$, для которых $\psi(\tilde{x}_k - z_k) = \|\tilde{x}_k - z_k\| = \rho(\tilde{x}_k, L_{k-1})$. Полагаем $\tilde{\psi}_k = \psi$, $L_k = L_{k-1}$, $T_k = I$. Очевидно, что свойства а)–д) выполняются. Допустим, что $\text{supp } \mu_\psi$ бесконечен. Поскольку, согласно б) $\text{supp } \mu_{\tilde{\psi}_j}$ конечен, $j = 1, 2, \dots, k - 1$, то $\psi \notin [(\tilde{\psi}_j)_{j=1}^{k-1}]$. Кроме того, по д) $(L_{k-1})^\perp$ состоит из дискретных мер, а потому по лемме 2 и замечанию 1, примененных к L_{k-1} , $x = x_{n_k}$, $\varepsilon = \varepsilon_k$, $\delta = \delta_k$, найдем функционал $\tilde{\psi}_k$, подпространство L_k и элементы $\tilde{x}_k, z_k$, оператор $T_k: L_{k-1} \rightarrow L_k$ такие, что: $\text{supp } \mu_{\tilde{\psi}_k}$ конечен,

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_j \in L_k^\perp, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad \|x_{n_k} - \tilde{x}_k\| < \delta_k, \\ z_j \in L_k, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad \|\tilde{x}_k - z_k\| = \tilde{\psi}_k(\tilde{x}_k - z_k) = \rho(\tilde{x}_k, L_k), \end{aligned}$$

$$x_i \in L_k, \quad n_{s-1} < i < n_s, \quad s = 1, 2, \dots, k,$$

$$\|T_k x - x\| < \varepsilon_k \|x\| \quad \forall x \in L_{k-1},$$

$$T_k(L_{k-1}) = L_k, \quad T_k x_i = x_i, \quad n_{s-1} < i < n_s, \quad s = 1, 2, \dots, k,$$

$$T_k z_j = z_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Заметим также, что $(L_k)^\perp \subset (L_{k-1})^\perp \oplus [\tilde{\psi}_k]$, а потому $(L_k)^\perp$ состоит из дискретных мер.

Итак, при $j = k$ определены индекс n_k , функционал $\tilde{\psi}_k$, элементы $\tilde{x}_k$, z_k , подпространство L_k , оператор T_k так, чтобы свойства а)–д) выполнялись при $j = 1, 2, \dots, k$. Следовательно, индуктивно определена бесконечная последовательность подпространств $L_1, L_2, \dots, L_k, \dots$, функционалов $\tilde{\psi}_k$, элементов $\tilde{x}_k, z_k$, операторов T_k так, чтобы свойства а)–д) выполнялись при любом k . Определим теперь операторы $\tilde{T}_k: L \rightarrow C(Q)$, полагая $\tilde{T}_k x = T_k T_{k-1} \dots T_2 T_1 x$. Тогда

$$\|\tilde{T}_k\| \leq \|T_k\| \cdot \|T_{k-1}\| \dots \|T_2\| \cdot \|T_1\| < \prod_{i=1}^k (1 + \varepsilon_i)$$

и нетрудно убедиться в том, что $\|\tilde{T}_k - \tilde{T}_n\|_{k, n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$. Следовательно, найдется оператор $T: L \rightarrow C(Q)$ такой, что $\|\tilde{T}_k - T\|_{k \rightarrow \infty} \rightarrow 0$. Легко также получить оценку $\|\tilde{T}_k^{-1}\| \leq (\prod_{i=1}^k (1 - \varepsilon_i))^{-1}$, а потому $\sup_k \|\tilde{T}_k^{-1}\| < +\infty$. Отсюда следует, что T – обратимый оператор. Пусть $T(L) = E$. Нетрудно проверить, что для $x \in L$, $\|x\| = 1$, имеем $\|x - \tilde{T}_k x\| < 2 \sum_{i=1}^k \varepsilon_i < \varepsilon/2$, а потому $\|x - Tx\| \leq \varepsilon/2$. Из последней оценки следует, что $d(L, E) < \varepsilon$. Проверим, что E – подпространство почтисуществования. Пусть $y_i = x_i$, если $n_{k-1} < i < n_k$, $y_{n_k} = z_k$, $k = 1, 2, \dots$. Полагаем $\tilde{y}_i = T_1^{-1} T_2^{-1} \times \dots \times T_{k-1}^{-1} T_k^{-1} y_i$, если $n_{k-1} < i \leq n_k$. Тогда $\tilde{T}_k \tilde{y}_i = y_i$ при $k \geq i$, а потому $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}_k \tilde{y}_i = y_i \in E$, $i = 1, 2, \dots$. Имеем $\rho(\tilde{x}_k, E) \leq \|\tilde{x}_k - z_k\| = \tilde{\psi}_k(\tilde{x}_k - z_k)$. С другой стороны, $L_k \subset \tilde{\psi}_j^{-1}(0)$ при $k \geq j$, а потому $E \subset \tilde{\psi}_j^{-1}(0)$. Значит, $\rho(\tilde{x}_k, E) = \sup\{\varphi(\tilde{x}_k) : \varphi \in E^\perp, \|\varphi\| = 1\} \geq \tilde{\psi}_k(\tilde{x}_k)$. Окончательно имеем $\rho(\tilde{x}_k, E) = \|\tilde{x}_k - z_k\|$, а потому $z_k \in P_E \tilde{x}_k$. Так как $x_i \in E$ при $i \neq n_k$, $k = 1, 2, \dots$, то E – подпространство почтисуществования, ибо $(\tilde{x}_k)_{k=1}^\infty \cup (x_i)_{i \neq n_k}$ – всюду плотная в $C(Q)$ последовательность элементов. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если Q счетен, то для любого подпространства $L \subset C(Q)$, $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется подпространство почтисуществования E , $d(E, L) < \varepsilon$.

Заметим, что не каждое подпространство $L \subset C(Q)$, $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$ является подпространством почтисуществования, ибо в любом

пространстве $C(Q)$ можно построить такое подпространство L , $\dim L = \text{codim } L = +\infty$, что $\{x \in C(Q) : P_L x \neq \emptyset\} = \emptyset$ (антипроксиминальное подпространство) (см. [3, с. 53, теорема 8]).

ПРИМЕР. Пусть $Q \subset R^2$, $Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ и $v_0 = (0, 1)$, $v_n = (1/n, 1)$, $u_{ni} = (x_{ni}, y_{ni})$, $x_{ni} = i/(2n)$, $y_{ni} = 1/(2n)$, $i = 1, 2, \dots, 2n$, $n = 1, 2, \dots$. Определим функционалы $\varphi_n \in C^*(Q)$ соотношением

$$\varphi_n(f) = \frac{1}{3}f(v_n) - \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n f(u_{ni}) + \frac{1}{3n} \sum_{i=n+1}^{2n} f(u_{ni}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\varphi_0(f) = \frac{1}{3}f(v_0) - \frac{1}{3} \int_{[0;1/2]} f d\mu + \frac{1}{3} \int_{[1/2;1]} f d\mu,$$

где μ – мера Лебега на $[0; 1]$. Можно убедиться в том, что w^* – замкнутое подпространство, порожденное функционалами φ_n , $n = 1, 2, \dots$, совпадает с замкнутым по норме подпространством Y , порожденным функционалами φ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Пусть $L = Y^\perp$ и проверим, что L – подпространство почтисуществования. Заметим, что Y изометрично ℓ^1 , а потому $\forall f \in C(Q)$ найдется φ_{i_0} , $i = 0, 1, 2, \dots$, такое, что

$$\varphi_{i_0}(f) = \sup\{\psi(f) : \psi \in Y, \|\psi\| = 1\} = \rho(f, L).$$

Пусть теперь $f_0 \in C(Q)$ такова, что $\|f_0\| = f_0(v_0) = 1$, $0 \leq f_0(t) < 1$ при $t \neq v_0$ и $f_0(t) = 0$, если $\rho(t, v_0) \geq 1/4$. Тогда $\sup\{\psi(f_0) : \psi \in Y, \|\psi\| = 1\} = \varphi_0(f_0)$ и так как φ_0 не достигает своей нормы, то f_0 не имеет в L ближайшего элемента. Значит, L – не подпространство существования. Пусть для $f \in C(Q)$ имеем $\rho(f, L) = \varphi_0(f)$ и возьмем $\varepsilon > 0$. Поскольку $\varphi_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_0(f)$, то $\varphi_n(f) > \varphi_0(f) - \varepsilon/4$ при $n \geq n_0$. Очевидно, что можно найти такое открытое множество V , что $\text{supp } \mu_{\varphi_{n_0}} \subset V$, $\text{supp } \mu_{\varphi_n} \cap V = \emptyset$ при $n \neq n_0$ и построить такую функцию $\tilde{f} \in C(Q)$, чтобы $\|\tilde{f} - f\| < \varepsilon/2$, $\tilde{f}|_{Q \setminus V} = f$, $\varphi_{n_0}(\tilde{f}) > \varphi_0(f)$. Применим теперь лемму 1 и найдем $\tilde{\tilde{f}} \in C(Q)$: $\|\tilde{\tilde{f}} - \tilde{f}\| < \varepsilon/2$, $P_L \tilde{\tilde{f}} \neq \emptyset$. Для этой функции имеем $\|\tilde{\tilde{f}} - f\| < \varepsilon$, $P_L \tilde{\tilde{f}} \neq \emptyset$. Пусть $f \in C(Q)$ и $\rho(f, L) = \varphi_n(f)$, $n > 0$. Тогда, применяя лемму 1, можно найти $\tilde{f} \in C(Q)$, $\|f - \tilde{f}\| < \varepsilon$, $P_L \tilde{f} \neq \emptyset$. Итак, L – подпространство почтисуществования.

Напомним, что подпространство существования $L \subset C(Q)$ называется чебышевским, если $\forall x \in C(Q)$ множество $P_L x$ одноточечно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Q – метризуемый компакт, $L \subset C(Q)$, $L^\perp$ – рефлексивен, $\dim L^\perp = +\infty$, тогда L – не чебышевское подпространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – множество экстремальных точек единичного шара $C(Q)$. Легко показать, что $A = \{f \in C(Q) : |f(q)| = 1 \forall q \in Q\}$. Если $f \in A$, то

$$\omega_\delta(f) = \sup\{|f(q_1) - f(q_2)| : \rho(q_1, q_2) \leq \delta\} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$$

и $\exists \delta_0 = \delta_0(f)$ такое, что $\omega_{\delta_0}(f) \leq 1/2$. Пусть $A_n = \{f \in A : \delta_0(f) \geq 1/n\}$, $n = 1, 2, \dots$, тогда $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть $(t_i^n)_{i=1}^{k_n}$ есть конечная $1/n$ -сеть компакта Q . Легко проверить, что если $f \in A_n$, то f однозначно определяется своими значениями в точках $(t_i^n)_{i=1}^{k_n}$. Следовательно, A_n – конечное множество и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ не более чем счетно.

Пространство $E = C(Q)/L$ рефлексивно, а потому по теореме 1 [4], множество экстремальных точек единичного шара E несчетно. Если предположить, что L – чебышевское подпространство, то по теореме 5 [5] должно быть несчетным множество A . Полученное противоречие доказывает предложение 1.

Хорошо известно, что класс подпространств L , для которых $L^\perp$ рефлексивен, $\dim L^\perp = +\infty$, достаточно обширен, если Q содержит совершенное подмножество.

Уральский государственный технический университет

Поступило

06.10.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Michael E. Continuous selections. I // Ann. Math. 1956. V. 63. №2. P. 361–382.
- [2] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 1. М., 1962.
- [3] Устинов Г. М. О подпространствах единственности в пространствах абстрактных непрерывных функций. Препринт УрО ИММ АН СССР. Свердловск, 1987.
- [4] Lindenstrauss J., Phelps R. R. Extreme point properties of convex bodies in reflexive Banach spaces // Isr. J. Math. 1968. V. 6. №1. P. 39–48.
- [5] Гаркави Л. Л. О наилучшем приближении элементами бесконечномерных подпространств одного класса // Матем. сб. 1963. Т. 62. №1. С. 104–120.