Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, М. О. Смолянова, Формулы замены переменной для бесконечномерных распределений, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 2, 288–292

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1825>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:44:31

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ФОРМУЛЫ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Л. Аккарди, О. Г. Смолянов, М. О. Смолянова

Основными примерами объектов, к которым применимы излагаемые ниже результаты, являются счетноаддитивные гладкие меры [1], [2] на (бесконечномерных) локально выпуклых пространствах, так называемые меры Фейнмана [3], [4] и некоторые другие функциональные интегралы, а также несчетноаддитивные меры, в том числе те, которые порождаются лапласианами Леви [5], [6]. В заметке рассматривается общий метод получения формул, описывающих преобразования распределений (обобщенных мер) на локально выпуклых пространствах при (нелинейных) гладких преобразованиях этих пространств. С помощью этого метода получаются, в частности, (относящиеся к распределениям) аналоги известных формул Камерона–Мартина, Гирсанова–Маруямы и Реймера. Данный метод применялся для исследования преобразований гладких мер в работе [7] (см. также [8]) и для исследования преобразований меры Фейнмана – в работах [9] и [10].

Помимо описания общего метода, охватывающего все перечисленные частные случаи, заметка содержит также несколько конкретных новых формул; специально отметим, что, в отличие от всех перечисленных работ, мы не ограничиваемся случаем, когда рассматриваемое отображение локально выпуклого пространства может быть связано с тождественным отображением непрерывной кривой (в пространстве отображений). Такое расширение области применимости метода достигается за счет перехода от вещественных локально выпуклых пространств к их комплексификациям.

1. Обозначения и терминология. Предполагается, что все рассматриваемые топологические пространства являются separable; локально выпуклые пространства (ЛВП), если не оговорено противное, считаются вещественными. Если E – ЛВП, то символ E' обозначает векторное пространство всех непрерывных линейных функционалов на E , наделенное слабой топологией $\sigma(E', E)$. Если при этом $x \in E$, $g \in E'$, то $(g, x) = (x, g) = g(x)$ и $\varphi_x(g) = \varphi_g(x) = e^{ig(x)}$. Если еще $S (= S(E))$ – некоторое ЛВП, состоящее из комплекснозначных функций на E (соответственно на E'), то преобразование Фурье (ПФ) элемента $\nu \in S$ – это функция на E' (соответственно на E), обозначаемая символом F_ν и определяемая равенством $F_\nu(\cdot) = (\nu, \varphi_g) = (\nu, \varphi_x)$. Всюду далее предполагается, что элемент ν однозначно восстанавливается по его ПФ.

2. Функции вещественного аргумента, принимающие значения в пространстве распределений. Пусть E – ЛВП и S – ЛВП, состоящее из не-

которых борелевских комплекснозначных функций на E , ограниченных на каждом компактном подмножестве пространства E , и содержащее все функции φ_g ($g \in E'$). Элементы пространства S' будут называться (S) -распределениями на E . Числовая функция f на E называется S -мультипликатором, если для каждой функции $\varphi \in S$ поточечное произведение $\varphi \cdot f$ принадлежит пространству S , причем отображение $\varphi \mapsto \varphi \cdot f$, $S \rightarrow S$ непрерывно; в этом случае для каждого $\nu \in S'$ естественно определяется произведение $f \cdot \nu$.

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$, $\alpha < \beta$ и $f - S'$ -значная функция на (α, β) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция f называется *дифференцируемой по Фомину в точке* $t_0 \in (\alpha, \beta)$, если она дифференцируема в этой точке, причем существует S -мультипликатор $\beta_f(t_0)$, называемый логарифмической производной функции f в точке t_0 , такой, что $f'(t_0) = \beta_f(t_0) \cdot f(t_0)$.

Следующая теорема позволяет восстанавливать функцию f по ее логарифмической производной и одному из значений.

ТЕОРЕМА 1 (ср. [2]). Пусть f всюду дифференцируема по Фомину, причем выполнены следующие условия:

- (1) S' содержит множество $\mathcal{M}_C(E)$ всех счетноаддитивных числовых борелевских мер на E , обладающих компактными носителями, причем множество $\mathcal{M}_C(E)$ плотно в S' ;
- (2) $\forall x \in E$ функция $\beta_f(\cdot)(x)$ непрерывна;
- (3) $\forall t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$ функция $\exp \int_{t_1}^{t_2} \beta_f(\tau)(\cdot) d\tau$ представляет собой S -мультипликатор;
- (4) $\forall \psi \in S$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ функция $(\alpha, \beta) \rightarrow S$, $t \mapsto (\exp \int_{t_0}^t \beta_f(\tau) d\tau) \psi$ дифференцируема.

Тогда для всех $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta)$ $f(t_2) = (\exp \int_{t_1}^{t_2} \beta_f(\tau) d\tau) f(t_1)$.

Доказательство использует элементарную теорию двойственности ЛВП. Сначала проверяется, что функция в правой части последнего равенства является решением задачи Коши $g'(t) = \beta_f(t)g(t)$, $g(t_0) = f(t_0)$, а затем с помощью теоремы Гольмгрена доказывается, что решение этой задачи единственно.

3. Дифференцируемые распределения на ЛВП. Отображение $\Phi: E \rightarrow E$ будет называться S -допустимым, если для каждого $\psi \in S$ композиция $\psi \circ \Phi$ снова принадлежит S , причем отображение $\psi \mapsto \psi \circ \Phi$, $S \rightarrow S$ непрерывно; в этом случае для каждого S -распределения ν его образ $\nu\Phi^{-1}$ при отображении Φ (корректно) определяется равенством $(\nu\Phi^{-1}, \psi) = (\nu, \psi \circ \Phi)$ (согласующимся с формулой замены переменных в интеграле). Пусть теперь P - отображение пространства $\mathbb{R}^1 \times E$ в E такое, что для каждого $t \in \mathbb{R}^1$ частичное отображение $P(t, \cdot)$ является S -допустимым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. S -распределение ν называется *дифференцируемым по Фомину вдоль P* , если функция $f_\nu^P: \mathbb{R}^1 \rightarrow S'$, определяемая равенством $f_\nu^P(t) = \nu P^{-1}(t, \cdot)$, дифференцируема по Фомину при $t = 0$; в этом случае логарифмическая производная функции f_ν^P при $t = 0$ называется логарифмической производной распределения ν вдоль P и обозначается символом $\beta_\nu^P(\cdot)$.

Если $h \in E$ и для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^1 \times E$ $P_h(t, x) = x + th$, то распределение ν называется дифференцируемым по Фомину вдоль вектора h , если оно дифференцируемо вдоль P_h ; логарифмической производной распределения вдоль вектора h называется его логарифмическая производная вдоль P_h ; она обозначается символом $\beta_\nu(h, \cdot)$.

Векторное подпространство ЛВП E называется гильбертовым подпространством пространства E , если оно снабжено структурой гильбертова пространства, отнесенностью которой его каноническое вложение в E непрерывно.

Пусть H – гильбертово подпространство ЛВП E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Распределение $\nu \in S$ называется дифференцируемым по Фомину вдоль H , если ν дифференцируемо по Фомину вдоль каждого вектора $h \in H$, причем отображение (называемое логарифмическим градиентом ν вдоль H) $H \ni h \mapsto \beta_\nu(h, \cdot) \cdot \varphi$ линейно и непрерывно для каждого $\varphi \in S$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть S -распределение ν дифференцируемо по Фомину вдоль H , причем для каждого t из некоторой окрестности V точки t_0 отображение (“векторное поле”) $k: E \rightarrow E$, определяемое равенством $(P^{-1})'(t, x) = k(P^{-1}(t, x))$ обладает следующими свойствами:

- (1) $k(E) \subset H$ и для каждого $x \in E$ производная отображения k вдоль H (обозначаемая символом $k'(x)$) представляет собой ядерный оператор, причем функция $E \ni x \mapsto k'(x)$ является S -мультипликатором;
- (2) для всякого ортонормированного базиса (e_n) пространства H и всякого $n \in \mathbb{N}$ сумма $\sum_1^n (k'(\cdot)e_j, e_j)$ является S -мультипликатором, причем для каждого $\varphi \in S$ $\sum_1^\infty (k'(\cdot)e_j, e_j)\varphi = \text{tr } k'(\cdot) \cdot \varphi$ в S ;
- (3) для всякого ортонормированного базиса (e_n) в H все частичные суммы ряда $\sum \beta_\nu(e_n, \cdot)(e_n, h(\cdot))$ являются S -мультипликаторами, причем для каждого $\varphi \in S$ $\sum \beta_\nu(e_n, \cdot)(e_n, h(\cdot))\varphi = \beta_\nu(h(\cdot), \cdot)\varphi$.

Тогда функция f_ν^P дифференцируема в точке t_0 и

$$\begin{aligned} \beta_{f_\nu^P}(t_0) &= \beta_\nu\left((P^{-1})'_1(t_0, \cdot), P^{-1}(t_0, \cdot)\right) \\ &\quad + \text{tr}\left((P^{-1})''_{1,2}(t_0, \cdot) \circ ((P^{-1})'_2(t_0, \cdot))^{-1}\right). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\nu \in S'$ и для каждого $t \in [0, 1]$ выполнены условия теоремы 2. Пусть, далее, для всех $t \in [0, 1]$ функции $\beta_\nu((P^{-1})'_1(t, \cdot), P^{-1}(t, \cdot))$ и $\text{tr}((P^{-1})''_{1,2}(t, \cdot)(P^{-1})'_2(t, \cdot))$ являются мультипликаторами и удовлетворяют условиям, наложенным в теореме 1 на функцию β_f , а функция $\exp(\text{tr} \ln(P^{-1})'_2(t, \cdot))$ корректно определена и принимает значения в пространстве S -мультипликаторов. Тогда если для каждого $\varphi \in S$ функция $t \mapsto (\text{tr} \ln(P^{-1})''_{1,2}(t, \cdot))\varphi$ непрерывна, а пространство S удовлетворяет условию (1) теоремы 1, то

$$\begin{aligned} \nu P^{-1}(t, \cdot) &= (\det P'_2(t, \cdot))^{-1} \exp\left(-\int_0^1 \beta_\nu\left((P'_2(\tau, P^{-1}(\tau, \cdot)))^{-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \circ P'_1(\tau, P^{-1}(\tau, \cdot)), P^{-1}(\tau, \cdot)\right) d\tau\right) \cdot \nu. \end{aligned}$$

В доказательствах теорем 2 и 3 используются вычисления, аналогичные [7].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В силу последней теоремы $\exp(\cdots)$ не зависит от значений функции P при $t \in (0, 1)$. Если β'_ν существует, то это является следствием $\beta'_\nu(x)(h_1)(h_2) = \beta'_\nu(x)(h_2)(h_1)$, что, в свою очередь, является следствием симметричности второй производной. Таким образом, если определить функцию σ_ν равенством $\sigma_\nu(x) = \int_{[0, x]} \beta_\nu(\cdot, s) ds$, где символ $\int_{[0, x]}$ обозначает интеграл вдоль “достаточно хорошего” пути, соединяющего точки 0 и x , и положить затем $\Lambda(x_2, x_1) = \sigma_\nu(x_2) - \sigma_\nu(x_1)$, то будет справедливо соотношение

$$\exp(\cdots) = \exp \Lambda(P^{-1}(x, 1), x) = \exp(\sigma_\nu(P^{-1}(x, 1) - \sigma_\nu(x))).$$

Таким образом, множитель, связывающий распределения νP^{-1} и ν , равен произведению $(\det(\cdots))^{-1}$ и отношения функций $\exp(\sigma_\nu(P^{-1}(\cdot, 1)))$ и $\exp \sigma_\nu(\cdot)$, что делает естественным использование для второй из них названия “обобщенная плотность” (распределения ν). Следует подчеркнуть, что обобщенная плотность определена только для $x \in H$, хотя функция $\exp(\sigma_\nu(\cdots) - \sigma_\nu(\cdots))$ определена всюду.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Путь, соединяющий точки 0 и x , может лежать не только в исходном пространстве, но и – при соответствующих дополнительных предположениях – в его комплексификации, что позволяет, в частности, использовать описанный метод для получения нового доказательства основного результата работы [11].

4. Примеры. Гауссовской α -мерой ($\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) с корреляционным функционалом $b: E' \times E' \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется S -распределение ν с ПФ $\exp(\frac{\alpha}{2}b(\cdot, \cdot))$ (если оно существует). Если функционал неотрицательно определен и $\alpha > 0$, то ν можно отождествить с обычной гауссовской E' -цилиндрической мерой (не обязательно счетноаддитивной); если $\alpha = i$, то ν – “мера Фейнмана”. Отметим, что если $b(x_1, x_2) = (Bx_1, x_2)$, где B – линейное отображение E' в E , то $\beta_\nu(h, x) = \alpha(B^{-1}h, x)$. С помощью этого замечания и теоремы 3 могут быть получены формулы Камерона–Мартина, Гирсанова–Маруамы и Реймера для меры Фейнмана и несчетноаддитивных гауссовских мер.

Одним из важных примеров несчетноаддитивных гауссовских мер является так называемая мера Леви–Гаусса, возникающая при исследовании лапласиана Леви. Пусть E – сепарабельное ЛВП, $\|\cdot\|$ – непрерывная гильбертова норма на E , $E \subset H \subset E'$ – соответствующее оснащенное гильбертово пространство и $b = (e_n)$ – ортонормированный базис в H , содержащийся в E . Предполагается, что ряд $\sum c_n e_n$ сходится в E' для каждой последовательности $(c_n) \in \ell_\infty$, и через S_b обозначается линейная оболочка в E' множества всех векторов $\sum e^{i\lambda n} e_n$, наделенная скалярным произведением Леви, определяемым так:

$$\left(\sum c_n e_n, \sum d_n e_n \right)_{PL} = \lim \left(n^{-1} \sum_1^n c_j d_j \right).$$

Пространство S_b связано естественной двойственностью с пространством E ; кроме того, оно двойственно самому себе, а также прямой сумме $K = E \oplus S_b$, реализуемой как векторное подпространство алгебраического сопряженного к S_b . Мера Леви–Гаусса ν_L , соответствующая базису b , – это гауссовская (S_b – цилиндрическая) мера на E (или на K) с корреляционным функционалом $(\cdot, \cdot)_{PL}$. Для каждого линейного оператора A в H , область определения которого содержит E , след и определитель Леви задаются равенствами: $\text{tr}_{PL} A = \lim n^{-1} \sum_1^n (Ae_j, e_j)$;

$\det_{PL} A = \lim (\det |(Ae_j, e_k)|_{j,k=1,2,\dots,n})^{1/n}$. Отметим, что пространство $S(K)$, для которого меры Леви–Гаусса и Фейнмана существуют (как распределения), описано в [9], [10]. Таким образом, к этим мерам применимы теоремы 2 и 3. В частности, формула, описывающая преобразование меры Леви–Гаусса, имеет вид

$$\nu_L P(t, \cdot) = \det_{PL} P_2'(t, \cdot) \exp \left(-\frac{1}{2} (F(t, \cdot), F(t, \cdot))_{PL} - (\cdot, \cdot)_{PL} \right) \cdot \nu_L;$$

кроме того,

$$\beta_{\nu_L}^{P^{-1}}(t)(x) = - \left(P_1'(t, x), P(t, x)_{PL} + \text{tr}_{PL}(P_{1,2}''(t, x) \circ ((P_2'(t, x))^{-1})) \right).$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
04.01.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smolyanov O. G., Weizsäcker H. V. // J. Funct. Anal. 1993. V. 118. № 2. P. 455–476.
2. Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В. // Тр. ММО. 1971. Т. 24. С. 133–174.
3. Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. М.: Наука, 1990.
4. Albeverio S., Hoegh-Krohn R. Mathematical theory of Feynman path integrals. Berlin: Springer, 1976.
5. Аккарди Л., Розелли П., Смолянов О. Г. // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 5. С. 144–149.
6. Hida T., Obata N., Saito K. // Nagoya Math. J. 1992. V. 128. P. 65–93.
7. Smolyanov O. G., Weizsäcker H. V. // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1995. V. 321. P. 103–108.
8. Daletskii Yu. L., Fomin S. V. Measures and differential equations on infinite-dimensional spaces. Kluwer: Kluwer Acad. Publ., 1992.
9. Смолянов О. Г., Смолянова М. О. // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 3. С. 154–156.
10. Смолянов О. Г., Смолянова М. О. // Докл. РАН. 1994. Т. 336. № 1. С. 29–32.
11. Elworthy D., Truman A. // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1984. V. 41. № 2. P. 115–142.