Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Воскресенская, Модулярные формы и регулярные представления групп порядка 24, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 2, 292–294

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1826>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:54:14

МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ И РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ПОРЯДКА 24

Г. В. Воскресенская

Изучение связей между конечными группами и модулярными формами является одной из интересных тем современных математических исследований. Рассматриваются различные способы сопоставления элементам группы модулярных форм. Один из них состоит в следующем: пусть G – конечная группа, g – ее элемент, Φ – некоторое унимодулярное представление группы G в пространстве V , степень которого кратна 24, $P_g(x) = \prod_k (x^{a_k} - 1)^{t_k}$ – характеристический многочлен оператора $\Phi(g)$; рассмотрим η -функцию Дедекинда

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi iz},$$

z лежит в верхней комплексной полуплоскости. Тогда элементу $g \in G$ сопоставляется функция $\eta_g(z) = \prod_k \eta^{t_k}(a_k z)$, которая называется функцией, ассоциированной с элементом g . Функция $\eta_g(z)$ является параболической формой с характером, веса $k(g) = \frac{1}{2} \sum_k t_k$, некоторого уровня $N(g)$, вычисляемого по известной формуле [1].

Интересной проблемой является нахождение конечных групп, со всеми элементами которых ассоциированы модулярные формы, собственные относительно всех операторов Гекке.

В статье [2] доказано, что существует ровно 30 параболических форм вида $\prod_k \eta^{t_k}(a_k z)$, где $a_k, t_k \in \mathbb{N}$, собственных относительно всех операторов Гекке. Они характеризуются условием $\sum_k a_k t_k = 24$, $\forall k \ a_k \mid a_{k+1}$. Приведен их полный список. Две из этих параболических форм имеют полуцелый вес. Авторы называют эти 30 функций мультипликативными η -произведениями (название объясняется мультипликативностью коэффициентов разложений по степеням q). Мы далее также используем это название для краткости и удобства.

С другой стороны, автором настоящей статьи доказано [3], что эти 30 функций и только они являются параболическими формами, собственными относительно всех операторов Гекке и не имеющими нулей на верхней комплексной полуплоскости вне параболических вершин.

Дж. Мейсон в статье [4] показал, что для группы Матье M_{24} и ее представления на решетке Лича все параболические формы, ассоциированные с элементами $g \in M_{24}$, являются мультипликативными η -произведениями.

Автором этой статьи были найдены все конечные подгруппы $SL(5, \mathbb{C})$, с элементами которых с помощью присоединенного представления можно ассоциировать мультипликативные η -произведения [6]. В следующей теореме приводится еще один пример таких групп.

ТЕОРЕМА. Пусть G — любая группа порядка 24, Φ — ее регулярное представление, $P_g(x) = \prod_k (x^{a_k} - 1)^{t_k}$ — характеристический многочлен оператора $\Phi(g)$ для элемента $g \in G$. Тогда функция $\eta_g(z) = \prod_k \eta^{t_k}(a_k z)$ является собственной относительно всех операторов Гекке и не имеющей нулей вне параболических вершин (т.е. мультипликативным η -произведением).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, список таких функций известен. В книге [6] приведены порождающие элементы и определяющие соотношения для всех неабелевых групп 24 порядка. Используя их, можно выписать для исследуемых групп все классы сопряженных элементов, все подгруппы и все фактор-группы. Затем, используя известные представления абелевых групп, групп D_n , S_4 , Q_8 и соотношения ортогональности для характеров представлений, составляются таблицы неприводимых представлений и находятся их собственные значения. Так как регулярное представление есть прямая сумма, в которую входят неприводимые представления с кратностью, равной их степени, то на основе этих таблиц можно выписать собственные значения регулярных представлений. Вычисления эти носят технический характер и слишком объемны, поэтому мы приведем лишь результат-списки параболических форм, соответствующих элементам групп порядка 24. Заметим, что при этом оказалось, что во всех группах всем элементам одинакового порядка соответствуют одни и те же функции и из 30 мультипликативных η -произведений появляются только 8, и две из них $\eta(24z)$ и $\eta^3(8z)$ имеют полуцелый вес.

Итак, имеем:

- 1) группа $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, функции $\eta(24z)$, $\eta^2(12z)$, $\eta^3(8z)$, $\eta^4(6z)$, $\eta^6(4z)$, $\eta^8(3z)$,

- $\eta^{12}(2z), \eta^{24}(z);$
- 2) группа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, функции $\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z);$
- 3) группа $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, функции $\eta^4(6z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z);$
- 4) группа S_4 , функции $\eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z);$
- 5) группа $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times D_4$, функции $\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z);$
- 6) группа $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times Q_8$, функции $\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z);$
- 7) группа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times D_6$, функции $\eta^4(6z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z);$
- 8) группа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times A_4$, функции $\eta^4(6z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z);$
- 9) группа D_{12} , функции $\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z);$
- 10) группа $\langle R, S : R^4 = S^6 = (RS)^2 = (R^{-1}S)^2 \rangle$, функции $\eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z);$
- 11) группа $\langle R, S : R^3 = S^3 = (RS)^2 \rangle$, функции $\eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z);$
- 12) группа $\langle R, S : RSR^{-1} = S^2, R^8 = E, S^3 = E \rangle$, функции $\eta^2(12z), \eta^3(8z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z);$
- 13) группа $\langle R, S : S^6 = R^2 = (SR)^2 \rangle$, функции $\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z);$
- 14) группа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \langle R, S : S^6 = R^4 = E, R^{-1}SR = S^{-1} \rangle$, функции $\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z);$
- 15) группа $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times S_3$, функции $\eta^2(12z), \eta^4(6z), \eta^6(4z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z), \eta^{24}(z).$

Самарский государственный университет

Поступило
22.01.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mason G. // Math. Ann. 1989. V. 283. P. 381–409. 2. Dummit D., Kisilevsky H., McKay J. // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 89–98. 3. Воскресенская Г. В. Конечные подгруппы в $SL(5, \mathbb{C})$ и модулярные формы // Деп. ВИНТИ. № 610–В93. 4. Mason G. // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 223–244. 5. Воскресенская Г. В. // Функцион. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 2. С. 71–73. 6. Кокстер Г. С. М., Мозер У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980.