Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. И. Сонин, Полупрimitивные и полусовершенные кольца лорановских рядов, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 2, 300–303

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1829>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 09:58:43

ПОЛУПРИМИТИВНЫЕ И ПОЛУСОВЕРШЕННЫЕ КОЛЬЦА ЛОРАНОВСКИХ РЯДОВ

К. И. Сонин

Введение и формулировки основных результатов. *Кольца косых лорановских рядов* (или, в более общем случае, *кольца рядов Мальцева–Неймана*) впервые появились в работах, связанных с вложением групповых алгебр в тела (см., например, [1]) и свойствами тел. В этой же связи в [2] рассматривался случай простого артинова кольца коэффициентов. В [3] кольцевые свойства нётеровых колец рядов Лорана использовались для исследования глобальной размерности и размерности Крулля нётеровых PI-колец. В [4] (для колец рядов Мальцева–Неймана) изучались свойства первичных идеалов, был доказан критерий простоты (доказательство критерия бирегулярности находится в печати), в [5] – регулярность в смысле фон Неймана. В данной работе рассматриваются полупрimitивность и полусовершенство колец рядов Лорана, приводятся некоторые достаточные условия примитивности. Основными результатами являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если R – φ -первичное правое кольцо Голди, то кольцо косых рядов Лорана $R((x, \varphi))$ полупрimitивно.*

ТЕОРЕМА 3. *Если кольцо R полусовершенно, то и кольцо $R((x, \varphi))$ полусовершенно.*

Все кольца предполагаются ассоциативными и обладающими ненулевой единицей.

Определения, обозначения и элементарные свойства. *Кольцо косых рядов Лорана $R((x, \varphi))$* над кольцом R с автоморфизмом φ определяется (например, в [6, с. 19]) как кольцо, образованное формальными степенными рядами вида

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i x^i, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad a_i \in R,$$

x – независимая переменная, с обычным сложением и умножением, заданным формулой

$$\left(\sum_{i=t}^{\infty} a_i x^i \right) \left(\sum_{j=r}^{\infty} b_j x^j \right) = \sum_{k=t+r}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i \varphi^i(b_j) \right) x^k.$$

На протяжении всей работы T будет обозначать кольцо $R((x, \varphi))$. Если I – подмножество кольца R , то через $\bar{I}$ обозначается подмножество кольца T , состоящее из всех рядов, коэффициенты которых лежат в I . Если J – подмножество кольца T , то через $\lambda(J)$ обозначается множество всех элементов кольца R , являющихся коэффициентами при младших степенях элементов J . Радикал Джекобсона кольца R обозначается $J(R)$. Через $\mathbb{Z}$ обозначается множество целых чисел.

Кольцо R называется *правым кольцом Голди*, если оно не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых правых идеалов и удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторов; *полусовершенным*, если $R/J(R)$ – полупростое артиново и идемпотенты поднимаются по модулю $J(R)$; *полупрimaryным*, если $R/J(R)$ – полупростое артиново и $J(R)$ нильпотентен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть φ – автоморфизм кольца R . Правый (левый, двусторонний) идеал I называется *правым (левым, двусторонним) φ -идеалом*, если $\varphi(I) \subseteq I$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кольцо R называется *φ -первичным*, если для любых φ -идеалов I, J кольца R из $IJ = 0$ следует, что $I = 0$ или $J = 0$; *φ -примитивным*, если в нем найдется максимальный правый идеал, не содержащий ненулевых φ -идеалов.

Для доказательства теорем нам понадобятся некоторые элементарные свойства лорановских рядов. Утверждения следующей леммы либо хорошо известны, либо проверяются непосредственно.

ЛЕММА 1. (1) Если $f = \sum_{i=t}^{\infty} f_i x^i$ и f_t обратим справа (слева), то f обратим справа (слева) в кольце $R((x, \varphi))$.

(2) Если I – собственный (правый) φ -идеал кольца R , то $\bar{I}$ – собственный (правый) идеал кольца T .

(3) Если I – φ -идеал кольца R , $K = R/I$, то $T/\bar{I} \cong K((x, \varphi))$.

(4) Если I – (правый) идеал T , то $\lambda(I)$ – (правый) φ -идеал R .

(5) Если элемент a является коэффициентом некоторого ряда из идеала I кольца T , то $\varphi^i(a)$ является коэффициентом какого-то ряда из I для любого $i \in \mathbb{Z}$.

(6) Если $f = \sum_{i=t}^{\infty} f_i x^i \in J(T)$, то f_t – делитель нуля в R .

СЛЕДСТВИЕ. Если любой элемент кольца R коэффициентов есть сумма идемпотента и обратимого элемента, то и любой элемент кольца рядов Лорана $R((x, \varphi))$ представляется в виде суммы идемпотента и обратимого элемента.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного ряда $f = \sum_{i=t}^{\infty} f_i x^i$ следует, что $f_t = e + u$, где e – идемпотент, а u – обратимый элемент в кольце R . Теперь ряд $ux^{-t} + \sum_{i=t+1}^{\infty} f_i x^i$ обратим в T по лемме 1(1), и, следовательно, $f = e + ux^{-t} + \sum_{i=t+1}^{\infty} f_i x^i$ – сумма идемпотента и обратимого элемента.

ЛЕММА 2. $J(T)$ лежит в $\overline{J(R)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если I – максимальный правый идеал R , то $\bar{I}$ – максимальный правый идеал в T . Для этого достаточно показать, что $\forall r \in T \exists h \in \bar{I}, g \in T$ такие, что $h + rg = 1$. Заметим, что без ограничения общности можно рассматривать только те $r = \sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i$, для которых $r_0 \neq 0$. Из максимальной I следует, что $\exists a \in I, b \in R$ такие, что $a + r_0 b = 1$, а тогда

$$a + rb = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} r_i \varphi^i(b) x^i.$$

Теперь существование f , такого что $(a + rb)f = 1$, следует из леммы 1(1), и, значит, $h + rg = 1$, где $h = af \in \bar{I}, g = bf \in T$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $J(R)$ нильпотентен, то и $J(T)$ нильпотентен; в этом случае $J(T) = \bar{J(R)}$, в частности, если $J(R) = 0$, то и $J(T) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(J(R))^n = 0$, тогда для любого ряда f из $\overline{J(R)}$, любого ряда $g \in T$ выполняется $(fg)^n = 0$ и, следовательно, элемент $1 + fg$ обратим. Таким образом, $\overline{J(R)} \subseteq J(T)$, а обратное включение получается из леммы 2.

Заметим, что обратное, вообще говоря, неверно: из $J(T) = 0$ не следует $J(R) = 0$, например, если R является кольцом формальных степенных рядов над полем ($\varphi \equiv 1$). В этом случае $J(T) = 0$ по лемме 1 (6).

Полупрimitивные и примитивные кольца рядов Лорана. Теорема 1 для колец лорановских рядов является аналогом теоремы 2 в [7] для колец многочленов Лорана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала покажем, что в наших условиях кольцо R полупервично. Действительно, пусть I – нильпотентный идеал в R , тогда $\varphi^n(I)$ нильпотентен для любого $n \in \mathbb{Z}$. Нильпотентные идеалы кольца лежат в первичном радикале, следовательно, идеал $N = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(I)$ лежит в первичном радикале, который в правом кольце Голди всегда нильпотентен. Таким образом, поскольку идеал N нильпотентен и $\varphi(N) = N$, из φ -первичности кольца R следует $N = 0$, и, следовательно, $I = 0$, т.е. R полупервично. Предположим теперь, что утверждение теоремы не выполняется, т.е. $J = J(T) \neq 0$. Тогда $\lambda(J) \neq 0$, и мы покажем, что $\lambda(J)$ существенен как правый идеал в R . Если нет, то найдется M – правый идеал кольца R такой, что $\lambda(J) \cap M = 0$, и, следовательно, $M\lambda(J) = 0$. Тогда с учетом леммы 1 (5) получаем $M_T J = 0$, где M_T – идеал, порожденный в T элементами M . В [4, теорема 1.4] доказано, что T первично тогда и только тогда, когда R φ -первично. Следовательно, $M_T = 0$ (раз мы предположили $J \neq 0$) и $M = 0$, т.е. $\lambda(J)$ – существенный правый идеал в R . По теореме Голди (см., например, [6, предложение 5.9]) в полупервичном правом кольце Голди каждый существенный правый идеал (в нашем случае $\lambda(J)$) содержит необратимый неделилитель нуля, что противоречит лемме 1 (6).

Заметим, что поскольку полупрimitивное правое кольцо Голди не обязательно является первичным, условие φ -первичности кольца коэффициентов в теореме 1 не является необходимым. Так же R не обязательно должно быть правым кольцом Голди для того, чтобы T было полупрimitивным, например, если R – кольцо формальных степенных рядов над полем от бесконечного числа переменных, то $J(T) = 0$ по лемме 1 (6).

ТЕОРЕМА 2. Если кольцо R φ -прimitивно, то кольцо $T = R((x, \varphi))$ примитивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – максимальный правый идеал R , не содержащий нетривиальных φ -идеалов. Пусть I – произвольный ненулевой идеал T . Тогда $\lambda(I)$ – ненулевой φ -идеал в R по лемме 1 (4), и, следовательно $\lambda(I) + M = R$. Теперь $I + \overline{M} = T$ по лемме 1 (1), так как $1 \in \lambda(I + \overline{M})$. Таким образом, $\overline{M}$ не содержит ненулевых двусторонних идеалов, а из доказательства леммы 2 следует, что $\overline{M}$ – максимальный правый идеал T .

Полусовершенные кольца рядов Лорана. Для доказательства теоремы 3 нам будет полезна следующая характеристизация полусовершенных колец.

ЛЕММА 3 [8]. Кольцо R полусовершенно тогда и только тогда, когда R не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов и любой элемент кольца R есть сумма идемпотента и обратимого элемента.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Покажем, что в T нет бесконечного множества ортогональных идемпотентов. Доказывая “от противного”, предположим, что $\{e_i = \sum_{k=t(i)}^{\infty} e_k^{(i)} x^k \in T \mid i = 1, 2, \dots\}$ – такое множество. Обозначим $R/J(R)$ через K . В [5] было доказано, что над полупростым артиновым кольцом кольцо рядов Лорана будет полупростым артиновым, следовательно, $T/\overline{J(T)} \cong K((x, \varphi))$ – полупростое артиново. Таким образом, $\{e_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ содержится в $\overline{J(T)}$ (кроме, возможно, конечного числа, но это не имеет значения). Для любого $i = 1, 2, \dots$ из $e_i^2 = e_i$ следует

$$(e_0^{(i)})^2 + \underbrace{e_{-1}^{(i)} e_1^{(i)} + \dots}_{\in J(R)} = e_0^{(i)},$$

а из $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$

$$e_0^{(i)} e_0^{(j)} + \underbrace{e_{-1}^{(i)} e_1^{(j)} + \dots}_{\in J(R)} = 0.$$

Кольцо R полусовершенно, поэтому по [9, с. 120] счетное множество ортогональных идемпотентов (кольца K) $\{e_0^{(i)} \mid i = 1, 2, \dots\}$ может быть поднято по модулю $J(R)$ до множества ортогональных идемпотентов кольца R . Но в полусовершенном кольце R не может быть бесконечного множества ортогональных идемпотентов, следовательно, доказано, что в T нет бесконечного множества ортогональных идемпотентов. Теперь с учетом следствия леммы 1 осталось воспользоваться характеристикой леммы 3.

СЛЕДСТВИЕ. Если кольцо R полупримо, то кольцо T тоже полупримо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полупримальное кольцо всегда является полусовершенным (идемпотенты в кольце поднимаются по модулю любого ниль-идеала [9, с. 118]), а по следствию леммы 2 $J(T)$ нильпотентен.

Автор благодарит А. В. Михалёва за полезные советы и постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
08.02.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мальцев А. И. // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. С. 1499–1501.
2. Risman L. // J. Pure Appl. Algebra. 1978. V. 12. P. 181–199.
3. Goodearl K., Small L. // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 92. P. 175–177.
4. Musson I., Stafford K. // Comm. Algebra. 1993. V. 21. № 6. P. 2065–2075.
5. Сонин К. И. // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 2. С. 565–568.
6. Goodearl K., Warfield R. An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
7. Jordan C.R., Jordan D.A. // Comm. Algebra. 1976. V. 7. № 4. P. 647–656.
8. Camillo V., Hua-Ping Yu. // Comm. Algebra. 1994. V. 12. № 22. P. 4737–4749.
9. Ламбек И. Кольца и модули. М.: Мир, 1971.