Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Куляба, О. М. Пенкин, Принцип максимума для параболических неравенств на стратифицированных множествах, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 2, 244–257

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm183>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 17:13:24

УДК 517.956.4

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

В. В. Куляба, О. М. Пенкин

В данной работе рассматривается оператор теплопроводности с эллиптической частью дивергентного типа на стратифицированном множестве (множестве, состоящем из многообразий различной размерности). Доказан аналог леммы о нормальной производной, слабый и сильный принцип максимума для параболических неравенств на этом множестве.

Библиография: 14 названий.

Введение. Предположим, что имеется прямоугольный сосуд, перегороденный двумя параллельными проницаемыми пленками, находящимися на близком расстоянии друг от друга (см. рис. 1).

Рис. 1. Стратифицированная жидкость

Будем считать, что этот сосуд наполнен жидкостью (назовем ее *жидкостью фона*), находящейся в тепловом равновесии. Пленки разбивают эту жидкость на три части (камеры): две трехмерные (σ_{31} , σ_{32}) и одну “почти” двумерную (σ_{21}).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00417, и Министерства образования РФ (КЦ СПбГУ), грант № Е00-1.0-154.

Если впрыснуть в жидкость фона небольшое количество особой жидкости, то в трехмерных камерах мы будем иметь обычный трехмерный процесс диффузии, описываемый уравнением

$$\Delta_3 u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

на $\sigma_{31} \cup \sigma_{32}$, где Δ_3 – лапласиан по координатам x^1, x^2, x^3 .

Внутри же “двумерной” камеры процесс диффузии в перпендикулярном направлении встречает сопротивление пленок. Тем самым, эта диффузия складывается как бы из двух частей. Одна из них – это классическая двумерная диффузия в плоскости между пленками, вторая – обмен молекулами через пленки с трехмерными камерами. Подробный анализ этой ситуации (в контексте теплопроводности такой анализ проделан, например, в [1]) приводит на σ_{21} к уравнению

$$\Delta_2 u + \sum_{\sigma_{3i}} \frac{\partial u}{\partial \nu_i} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

где Δ_2 – лапласиан по координатам x^1, x^2 . Здесь $\partial u / \partial \nu_i$ с точностью до знака совпадает с дифференцированием по x^3 .

Обобщая этот простой пример, рассмотрим связанное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, составленное из открытых многогранников (стратов) σ_{ki} различных размерностей k , примыкающих друг к другу по типу клеточного комплекса. Это, в частности, предполагает, что граница страта σ_{ki} , т.е. множество $\bar{\sigma}_{ki} \setminus \sigma_{ki}$, состоит из стратов меньшей размерности. На каждом страте σ_{k-1i} рассмотрим уравнение

$$\left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) (X, t) = \left(\Delta_{k-1} u + \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}} \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) (X, t) = 0, \quad (1)$$

где запись вида $\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}$ означает, что σ_{kj} примыкает к $\sigma_{k-1,i}$ (или, иначе, $\sigma_{k-1,i} \subset \partial \sigma_{kj}$). Страту $\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}$ в сумме (1) отвечает производная по нормали к $\sigma_{k-1,i}$ в точке X , направленной внутрь σ_{kj} .

Оператор

$$\Delta u = \Delta_{k-1} u + \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}} \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad (2)$$

фигурирующий в (1), является аналогом классического оператора Лапласа, подробно обсуждаемого в п. 3; здесь Δ_{k-1} – классический $(k-1)$ -мерный оператор Лапласа на $\sigma_{k-1,i}$.

Для постановки краевой задачи для уравнения (1) множество Ω разобьем на две части: Ω_0 и $\partial \Omega_0$. В качестве Ω_0 можно взять любое связанное, открытое (в топологии Ω) подмножество Ω , составленное из стратов, замыкание которого совпадает с Ω . Предполагается, что множество $\partial \Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_0$ непусто. Тогда можно рассмотреть, например, такую краевую задачу:

$$\left(\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) (X, t) = 0, \quad (3)$$

$$u(X, 0) = \varphi(X), \quad (4)$$

$$u(X, t)|_{X \in \partial \Omega_0} = \psi(X, t). \quad (5)$$

Уравнения на множествах Ω с описанным типом геометрии интенсивно изучаются с начала 80-х годов. В частности, задача диффузии в системе каналов, соединенных в виде геометрического графа, изучалась Люмером [2], [3]. Уравнение Пуассона с фигурирующим в (1) лапласианом на геометрическом графе изучалось Покорным [4], а также Никезом [5], [6].

Следует заметить, что для разрешимости задачи (3)–(5) требуется добавить некоторые геометрические ограничения. В данной работе мы не останавливаемся на вопросе о разрешимости задачи (3)–(5) (она здесь предполагается), но отметим, что результаты, приводимые далее, можно считать содержательными лишь в предположении, что любые два страта σ_{ki}, σ_{mj} можно соединить связной цепочкой $\sigma_{k_1 i_1}, \sigma_{k_2 i_2}, \dots, \sigma_{k_p i_p}$, в которой $\sigma_{k_1 i_1} = \sigma_{ki}, \sigma_{k_p i_p} = \sigma_{mj}$, а любые соседние страты примыкают друг к другу, принадлежат Ω_0 (кроме, возможно, самих σ_{ki}, σ_{mj}) и их размерности отличаются на единицу. Наличие такой цепочки обеспечивает возможность перехода особых молекул из σ_{ki} в σ_{mj} . Для обеспечения лишь слабой разрешимости задачи (3)–(5) это требование можно ослабить; достаточно предположить возможность соединения произвольного страта σ_{ki} с каким-либо граничным стратом цепочкой указанного типа (см. [7]).

Роль подобного рода условий в задачах диффузии на множествах со сложной геометрией (вплоть до фрактальной), по-видимому, впервые была отмечена Жиковым (см., например, его работы [8], [9]).

1. Уточним постановку задачи (3)–(5). Через $C_\sigma^m(\Omega_0)$ обозначим множество функций $u: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих непрерывные частные производные до m -го порядка в каждом страте σ_{kj} (в страте σ_{kj} функцию u можно представить как функцию k переменных, введя, например, ортогональную систему координат $(x^1, \dots, x^k)$ на σ_{kj}). При этом предполагается, что первые производные допускают продолжение по непрерывности в страты $\sigma_{k-1,i} \prec \sigma_{kj}$, не входящие в границу $\partial\Omega_0$. Аналогично определяется множество $C_\sigma^m(\Omega)$, только теперь предполагается, что упомянутые продолжения первых производных существуют и в случае $\sigma_{k-1,i} \subset \partial\Omega_0$. Обозначим далее через $C(\Omega_0)$ (соответственно $C(\Omega)$) множество непрерывных на Ω_0 (соответственно Ω) функций. Положим также $C^m(\Omega_0) = C_\sigma^m(\Omega_0) \cap C(\Omega)$ и аналогично определим $C^m(\Omega)$. Для функций переменных (X, t) принадлежность классу (A, B) означает принадлежность A по переменной $X \subset \Omega$ при фиксированной второй переменной и множеству B по переменной t при фиксированном X . В частности, под решением задачи (3)–(5) понимается непрерывная на $\Omega \times (0; T]$ функция класса $(C^2(\Omega_0), C^1(0; T])$, удовлетворяющая соотношениям (3)–(5).

Для дальнейшего будет удобно представить оператор

$$\Delta = \Delta_{k-1} + \sum_{\sigma_{ki} \succ \sigma_{k-1,j}} \frac{\partial}{\partial \nu}$$

в дивергентном виде. Будем векторное поле $\vec{F}$ на Ω_0 называть *касательным* к Ω_0 , если для каждого $\sigma_{ki} \subset \Omega_0$ и $X \in \sigma_{ki}$ вектор $\vec{F}(X)$ касается σ_{ki} . Если $X \in \sigma_{k-1,i}$, то дивергенция касательного векторного поля $\vec{F}$ в точке X определяется следующим образом:

$$\nabla \vec{F}(X) = (\nabla_{k-1} \vec{F})(X) + \sum_{\sigma_{ki} \succ \sigma_{k-1,j}} \vec{\nu} \cdot \vec{F}|_{\overline{\sigma_{ki}}}(X), \quad (6)$$

где ∇_{k-1} – обычная $(k-1)$ -мерная дивергенция на $\sigma_{k-1,i}$, а $\vec{F}|_{\overline{\sigma_{ki}}}(X)$ означает продолжение по непрерывности в точку X сужения $\vec{F}$ на σ_{kj} . Название “дивергенция” для оператора ∇ оправдывается тем, что $\nabla \vec{F}$ можно интерпретировать как плотность потока векторного поля по специальной “стратифицированной” мере μ , значение которой на множестве $\omega \in \Omega$ определяется формулой

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{ki} \subset \Omega} \mu_k(\omega \cap \sigma_{ki}), \quad (7)$$

где μ_k – мера Лебега на σ_{ki} . При $k=0$ мера μ_k является атомарной. Интеграл Лебега по такой мере от функции $u: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ сводится к сумме интегралов Лебега по стратам $\sigma_{ki} \subset \Omega$.

Если $u: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит $C^2(\Omega_0)$ (и даже $C_\sigma^2(\Omega_0)$), то оператор Δ можно представить в виде $\Delta u = \nabla(\nabla u)$. Внутренний символ ∇ означает взятие градиента скалярной функции u , а внешний ∇ – дивергенции поля градиента. Мы здесь следуем традиции по-разному трактовать ∇ в зависимости от ситуации; $\nabla \vec{F}$ – дивергенция, ∇u – градиент.

2. В этом пункте доказывается слабый принцип максимума для решений неравенства

$$Lu = \Delta u - qu - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0 \quad (8)$$

в классе непрерывных функций из $(C^2(\Omega_0), C^1(0, \infty))$. В дальнейшем запись вида $u \in (C^2(\Omega_0), C^1(0, \infty))$ всегда предполагает еще и непрерывность u на $\Omega_0 \times [0, \infty)$. На других пространствах это соглашение не распространяется. Здесь под $C^1(0, \infty)$ понимается объединение множеств $C^1(0, T]$ по всем $T > 0$. Предполагается, что $q \in (C_\sigma(\Omega_0), C[0, \infty))$. Тем самым, допускаются разрывы q по переменной X . Более того, эти разрывы имеют физическую природу; нетрудно понять, что коэффициент q имеет различную физическую размерность на стратах различной геометрической размерности. Решения неравенства (8) будем называть *субпараболическими функциями*. Слабый принцип максимума (в отличие от сильного, см. далее) для субпараболических функций имеет формулировку, совпадающую с классической (когда Δ – обычный лапласиан в области).

Как обычно, назовем множество вида $\Omega_0 \times (0; T] = \Omega_0(T)$ *параболической областью*. Параболической границей этого множества будет $\partial\Omega_0(T) = (\partial\Omega_0 \times (0; T]) \cup \Omega$, т.е. объединение боковой границы $\partial\Omega_0 \times (0; T]$ и “дна” $\Omega \times \{0\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u \in (C^2(\Omega_0), C^1(0; T])$ – субпараболическая функция и выполнено $q(X, t) \geq 0$ на $\Omega_0 \times (0; T]$. Тогда

$$u(P) \leq \max_{Q \in \partial\Omega_0(T)} u^+(Q) = m \quad (9)$$

для любого $P = (X, t) \in \Omega_0(T)$. Здесь $u^+(Q) = \max\{0, u(Q)\}$.

Как обычно, основная тяжесть в доказательстве перекладывается на “эллиптический” слабый принцип максимума, а именно на следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q \in C_\sigma(\Omega_0)$ неотрицательна. Тогда для решения неравенства $\Delta u - qu \geq 0$, $u \in C^2(\Omega_0) \cap C(\Omega)$, имеет место оценка

$$u(Y) \leq \max_{X \in \partial\Omega_0} u^+(X) = m \quad (10)$$

для любого $Y \in \Omega_0$.

Когда размерность стратов в Ω не превосходит двух, это утверждение доказано в [10]. К сожалению, приведенное в [10] доказательство сугубо “двумерно”. Поэтому мы приведем здесь схематическое доказательство, пригодное в общем случае. Оно опирается на следующий факт.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $u \in C_\sigma^2(\Omega)$, $v \in C^1(\Omega)$. Тогда

$$\int_{\Omega_0} v \Delta u \, d\mu = - \int_{\Omega_0} \nabla v \nabla u \, d\mu - \int_{\partial\Omega_0} v (\nabla u)_\nu \, d\mu. \quad (11)$$

Здесь $(\nabla u)_\nu$ в точке $X \in \sigma_{k-1,i}$ равно сумме

$$(\nabla u)_\nu(X) = \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}} \vec{\nu}(\nabla u)_{ki}(X),$$

распространенной только на страты $\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}$, не принадлежащие $\partial\Omega_0$; в случае $\sigma_{k-1,i} \subset \Omega_0$ (но не $\partial\Omega_0$) эта сумма совпадает с неклассической частью лапласиана Δ , определенного формулой (2).

Формула (11) является аналогом классической формулы Грина для рассматриваемого нами случая. Доказательство имеется в [10]. Эта формула пригодна и в случае, когда $v \in \dot{H}_\mu^1(\Omega)$. Пространство $\dot{H}_\mu^1(\Omega)$ получается пополнением $C_0^1(\Omega)$, функций из $C^1(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности $\partial\Omega_0$, по норме, определяемой скалярным произведением в $C_0^1(\Omega)$:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u(X) \nabla v(X) \, d\mu.$$

В случае $v \in \dot{H}_\mu^1(\Omega)$ (11) приобретает вид

$$\int_{\Omega_0} v \Delta u \, d\mu = - \int_{\Omega_0} \nabla v \nabla u \, d\mu,$$

где, конечно, ∇v – слабый градиент.

В качестве следствия получаем, что если $u \in C^2(\Omega)$ и $\Delta u \geq 0$ (т.е. u субэллиптическая), а $v \in C_0^1(\Omega)$ неотрицательна, то

$$\int_{\Omega_0} \nabla v \nabla u \, d\mu \leq 0. \quad (12)$$

Теперь все готово для доказательства теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала рассмотрим случай $q \equiv 0$. Предположим, вопреки утверждаемому, что в некоторой точке $Y \in \Omega_0$ имеем $u(Y) > t$. Возьмем произвольное $c \in [t; u(Y)]$ и обозначим через Ω' замыкание одной из компонент связности множества $\{X \in \Omega_0 : u(X) > c\}$.

Равенством

$$v(x) = \begin{cases} u(X) - c, & x \in \Omega', \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega', \end{cases}$$

определяется непрерывная на Ω , неотрицательная финитная функция. Несложно убедиться (см., например, [11]), что $v \in \dot{H}_\mu^1(\Omega)$. Поэтому должно выполняться неравенство (12), противоречащее тому, что

$$\int_{\Omega_0} \nabla v \nabla u \, d\mu = \int_{\Omega'} (\nabla u)^2 \, d\mu > 0.$$

Полученное противоречие доказывает (10).

Если теперь $q \not\equiv 0$, то вместо (12) получается

$$\int_{\Omega_0} (\nabla v \nabla u + qvu) \, d\mu \leq 0.$$

Определяя v как и выше, получим

$$\int_{\Omega'} [(\nabla u)^2 + qu(u - c)] \, d\mu \leq 0,$$

что снова ведет к противоречию, поскольку на Ω' имеем $u \geq c \geq 0$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1 проводится теперь довольно стандартно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что

$$M = \max_{P \in \Omega_0(T)} u^+(P) > t$$

и точка $P_0 = (X_0, t_0)$ такова, что $u^+(P_0) = M$. Так как $u^+(P_0) > 0$, имеем $u^+(P_0) = u(P_0) = M$. Положим $\varepsilon = a/T$, $a < M - t$, и введем вспомогательную функцию $v(X, t) = u(X, t) - \varepsilon t$. Она удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} Lv &= Lu + q(X, t)\varepsilon t + \varepsilon \geq \varepsilon > 0, \\ \max_{\Omega_0(T)} v &= \max_{\Omega_0(T)} (u - \varepsilon t) \geq M - a > t, \quad \max_{\partial\Omega_0(T)} v = \max_{\partial\Omega_0(T)} (u - \varepsilon t) \leq M. \end{aligned} \quad (13)$$

А значит, она достигает своего максимального значения в некоторой точке $P_0 = (X_0, t_0) \in \Omega_0(T)$. Покажем, что $Lv(P_0) \leq 0$.

Во-первых, в точке максимума должно быть

$$\frac{\partial v}{\partial t}(X_0, t_0) \geq 0.$$

Мы написали здесь неравенство по той причине, что точка (X_0, t_0) не обязана быть внутренней точкой множества $\Omega_0(T)$ в геометрическом смысле; она внутренняя лишь в “параболическом” смысле, что не исключает равенства $t_0 = T$.

Во-вторых, в силу теоремы 2 можно утверждать, что $(\Delta v - qv)(X_0, t_0) \leq 0$, так как в противном случае при фиксированном t_0 в некоторой окрестности точки X выполнялось бы неравенство $Lv(X, t_0) > 0$, т.е. по X функция была бы субэллиптической. В той же окрестности, если взять ее достаточно малой, выполнялось бы неравенство $v(X_0, t_0) \geq v(X, t_0)$ со строгим знаком на границе окрестности, а это противоречило бы теореме 2.

В итоге имеем

$$Lv = \left(\Delta v - qv - \frac{\partial v}{\partial t} \right)(X_0, t_0) \leq 0.$$

Но это противоречит (13).

Теорема доказана.

Из теоремы 1 стандартным образом следует единственность решения задачи (3)–(5) в классе $(C^2(\Omega_0), C^1(0; T])$.

3. Результаты предыдущего пункта допускают обобщение на случай произвольного стратифицированного множества, подчиненного некоторым требованиям. Постановка задачи на стратифицированном множестве в эллиптическом случае подробно описана, например, в [12]. Поэтому мы позволим себе не углубляться в детали.

Связное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, составленное из конечного числа гладких подмногообразий σ_{ki} (стратов) в $\mathbb{R}^n$, называется *стратифицированным*, если

- 1) граница $\partial\sigma_{ki}$ каждого страта состоит из стратов меньшей размерности;
- 2) если $X \in \sigma_{ki}$, а Y стремится к X вдоль некоторой непрерывной кривой, лежащей в $\sigma_{k+1,j} \succ \sigma_{ki}$, то касательная плоскость $T_Y(\sigma_{k+1,j})$ имеет предельное положение $\lim_{Y \rightarrow X} T_Y(\sigma_{k+1,j})$, содержащее $T_X(\sigma_{ki})$; это означает, что примыкание страта σ_{ki} к $\sigma_{k+1,j}$ локально (вблизи X) устроено как примыкание k -мерной плоскости к $(k+1)$ -мерной полуплоскости.

Далее Ω разбивается на две части Ω_0 и $\partial\Omega_0$ как и выше; на Ω_0 задаются дифференциальные соотношения, а на $\partial\Omega_0$ – краевые условия.

Оператор

$$\Delta u = \Delta_{k-1} u + \sum_{\sigma_{ki} \succ \sigma_{k-1,i}} \vec{\nu} \cdot \nabla u|_{kj}$$

можно выразить через риманову метрику (g_{ij}) , индуцированную на каждом страте его вложением в $\mathbb{R}^n$. Именно, если задать на $\sigma_{k-1,j}$ локальные координаты $x^1, x^2, \dots, x^{k-1}$ и дополнить их для каждого страта $\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}$ еще одной координатой x^k , обращаясь в нуль на $\sigma_{k-1,i}$ и положительной в σ_{kj} , то на множестве, составленном из $\sigma_{k-1,i}$ и всех $\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}$, оказывается введенным некоторый суррогат локальных координат, как это показано на рис. 2.

В этих координатах имеем

$$(\Delta u)(X) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \right)(X) + \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}} \frac{g^{k\alpha}}{\sqrt{g^{kk}}} \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \Big|_{\vec{kj}}(X), \quad (14)$$

Рис. 2. Стратифицированные координаты

где предполагается суммирование по повторяющимся “греческим” индексам. Первая часть оператора Δ есть классический $(k - 1)$ -мерный оператор Лапласа–Бельтрами Δ_{k-1} ; индексы суммирования изменяются от 1 до $k - 1$. Вторая часть – сумма произведений $\vec{\nu} \cdot \nabla u$, где $\vec{\nu}$ – нормаль к $T_X(\sigma_{k-1,i})$, направленная в $T_X(\sigma_{kj})$; в этой части индекс α изменяется от 1 до k .

И в данном случае оператор Δ можно записать в виде $\nabla(\nabla u)$, если определить дивергенцию $\nabla \vec{F}$ формулой

$$(\nabla \vec{F})(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} (\sqrt{g} g^{\alpha\beta} F_\beta)(x) + \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}} \frac{1}{\sqrt{g^{kk}}} g^{k\alpha} F_\alpha \Big|_{\frac{k}{j}}(x), \quad (15)$$

где F_α – ковариантные компоненты вектора $\vec{F}$.

Хотя рассмотрения предыдущего пункта относились к частному случаю (плоские страты), при переносе на произвольные стратифицированные множества изменения не требуются. Однако, замыкания стратов нужно считать ориентируемыми, поскольку в доказательствах мы пользовались формулой Грина; ее доказательство (см. [10]) существенно опирается на ориентируемость. Это не означает, что приведенные нами результаты не верны в неориентируемом случае. К примеру (см. следующий пункт), по крайней мере, в двумерном случае верен сильный принцип максимума (а потому и слабый) и его доказательство не требует ориентируемости Ω .

Отметим также, что вместо Δ можно рассмотреть оператор $\nabla(p\nabla)$. При положительном $p \in (C^1_\sigma(\Omega_0), C(0, T))$ доказательства предыдущего пункта вновь не требуют изменений. И, наконец, вместо параболической области вида $\Omega_0 \times (0, T]$ можно рассмотреть случай, когда само стратифицированное множество меняет форму с течением времени t . Но здесь требуется, чтобы Ω_0 не меняло топологии, т.е. сохранялось количество стратов, их взаимное расположение и размерности.

4. В этом пункте мы остановимся на сильном принципе максимума. Для простоты изложения мы вновь вернемся к случаю, когда Ω составлено из многогранников.

Формулировка сильного принципа для субпараболических функций на стратифицированных множествах отличается от классической. Дело в том, что используя особенности геометрии стратифицированного множества легко найти решение уравнения

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

постоянное на некоторых стратах, но не на всем Ω . К примеру, в ситуации рис. 2 положим при любом t

$$u(X, t) = \begin{cases} 0, & X \in \bar{\sigma}_{21}, \\ kx^2, & X \in \bar{\sigma}_{22}, \\ -kx^2, & X \in \bar{\sigma}_{23}. \end{cases}$$

Тогда

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

но страт σ_{21} целиком состоит из точек локальных максимумов. Правда, все эти максимумы тривиальны; для каждой такой точки найдется окрестность, в которой функция u постоянна.

Будем называть $P = (X, t)$ *точкой нетривиального максимума* функции u , если, во-первых, P – точка максимума, а, во-вторых, u не является константой ни в какой окрестности этой точки.

ТЕОРЕМА 4 (сильный принцип максимума). *Субпараболическая функция $u \in (C^2(\Omega_0), C^1(0; T])$ при $q \geq 0$ не может иметь в $\Omega_0(T)$ точек локального нетривиального неотрицательного максимума.*

Для доказательства нам потребуется аналог леммы о нормальной производной. В точке $X \in \sigma_{k-1,i} \subset \partial\Omega_0$ аналогом нормальной производной по пространственной переменной следует считать, как это следует из формулы Грина, выражение $(\nabla u)_\nu(X, t)$.

ЛЕММА 1. *Пусть $u \in (C^2(\Omega_0), C^1(0; T])$ – субпараболическая в $\Omega_0(T)$ функция и $q \geq 0$. Пусть точка $P_0 = (X_0, t_0)$, принадлежащая боковой поверхности $\partial\Omega_0 \times [0; T]$, является точкой нетривиального неотрицательного максимума. Тогда $(\nabla u)_\nu \times (X_0, t_0) < 0$, если это выражение существует.*

Доказательство этой леммы отчасти повторяет аналогичное утверждение для субэллиптических функций (см. [13]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Для простоты ограничимся случаем, когда Ω_0 – двумерное множество. Так как пространственная координата X_0 точки максимума $P_0 = (X_0, t_0)$ может принадлежать стратам разной размерности, рассмотрим каждую возможность по отдельности.

(i) Пространственная координата X_0 точки максимума $P_0 = (X_0, t_0)$ принадлежит страту $\sigma_{1i} \subset \partial\Omega_0$. В этом случае на каждом из стратов $\sigma_{2j} \succ \sigma_{1i}$ оператор $L - \partial/\partial t$ является обычным оператором теплопроводности, а в силу нетривиальности максимума существует хотя бы один страт σ_{2k} , на котором $u \not\equiv u(X_0, t_0)$. Тогда в соответствии с

классической леммой о нормальной производной (см., например, [14]) по крайней мере одна из производных

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\overline{Z}}(X_0, t_0)$$

меньше нуля. В остальных стратах $\sigma_{2k} \succ \sigma_{1i}$ нормальные производные, очевидно, неположительны. А потому нормальная производная $(\nabla u)_\nu(X_0, t_0)$, будучи равна сумме рассматриваемых только что нормальных производных, строго меньше нуля.

(ii) Пусть теперь пространственная координата X_0 точки максимума принадлежит страту $\sigma_{0i} \subset \partial\Omega_0$ ($\{X_0\} = \sigma_{0i}$). В этом случае возможны следующие три варианта поведения функции на одномерных стратах σ_{1j} , примыкающих к σ_{0i} .

1) Функция u тождественно равна $u(X_0, t_0)$ на всех одномерных стратах, примыкающих к σ_{0i} , но на одном из них – страте σ_{1j} – она достигает своего локального нетривиального максимума в какой-нибудь точке (Z, t_0) ; ясно, что $u(Z, t_0) = u(X_0, t_0)$. А значит, существует двумерный страт σ_{2k} , примыкающий к σ_{1j} , такой, что сужение функции u на $\overline{\sigma_{2k}}$ достигает своего нетривиального максимума в точке (Z, t_0) , лежащей на его границе. Мы, фактически, оказались в ситуации, рассмотренной в предыдущем пункте (i). А потому производная функции u по внутренней нормали в страт σ_{2k} в точке (Z, t_0) отрицательна, а вместе с ней отрицательна и нормальная производная $(\nabla u)_\nu(Z, t_0)$. На страте σ_{1j} оператор $Lu - \partial u / \partial t$ имеет следующий вид:

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\sigma_{2k}} \frac{\partial u}{\partial \nu} - qu - \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Здесь классическая часть оператора Лапласа отсутствует, так как u является константой на страте σ_{1j} . Функция u субпараболическая, т.е.

$$\sum_{\sigma_{2k}} \frac{\partial u}{\partial \nu} - qu - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0,$$

а значит, в точке максимума выполнено неравенство

$$(\nabla u)_\nu(Z, t_0) \geq qu + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Из неотрицательности $q(Z, t_0)$, $u(Z, t_0)$ и $\frac{\partial u}{\partial t}(Z, t_0)$ в точке максимума следует, что

$$(\nabla u)_\nu(Z, t_0) \geq qu + \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0.$$

Но это противоречит тому, что $(\nabla u)_\nu(Z, t_0) < 0$. Полученное противоречие показывает невозможность этого варианта.

2) Теперь предположим, как и в пункте 1), что функция u на каждом страте $\sigma_{1j} \succ \sigma_{0i}$ постоянна, а значит, все страты σ_{1j} сплошь состоят из точек максимума, но все они тривиальны. В силу того, что (X_0, t_0) – точка нетривиального максимума, существует двумерный страт σ_{2k} , примыкающий к σ_{0i} , на котором $u(X, t_0) \not\equiv u(X_0, t_0)$. В силу классического сильного принципа максимума это также невозможно.

3) Среди одномерных стратов, примыкающих к σ_{0i} , существует страт σ_{1j} такой, что в некоторой точке Y этого страта $u(Y, t_0)$ строго меньше $u(X_0, t_0)$ (т.е. $u(Y, t_0) < u(X_0, t_0)$). Отдельно на каждой паре $(\sigma_{1j}, \sigma_{2k})$, $\sigma_{2k} \succ \sigma_{1j}$, введем локальные координаты x^1, x^2 следующим образом: координату x^1 направим вдоль страта σ_{1j} , а координату x^2 – внутрь σ_{2k} . На страте σ_{1j} будем считать координату x^1 точки Y равной δ . Для каждой пары $(\sigma_{1j}, \sigma_{2k})$, $\sigma_{2k} \succ \sigma_{1j}$, построим конус

$$K_{2k} = \{x : 0 \leq x^1 \leq \delta, 0 \leq x^2 \leq \lambda x^1\}.$$

На множестве $K = \bigcup_{\sigma_{2k} \succ \sigma_{1j}} K_{2k}$ построим цилиндрическую область $C = \bigcup_{\sigma_{2k} \succ \sigma_{1j}} C_{2k}$, где

$$C_{2k} = \{x : 0 \leq x^1 \leq \delta, 0 \leq x^2 \leq \lambda x^1\} \times [t_0 - \tau, t_0];$$

здесь τ положительно и достаточно мало. Параболическая граница C состоит из следующих множеств:

$$\begin{aligned}\partial C_1 &= \{x : 0 \leq x^1 \leq \delta, x^2 = \lambda x^1\} \times [t_0 - \tau, t_0], \\ \partial C_2 &= \{x : x^1 = \delta, 0 \leq x^2 \leq \lambda y^1\} \times [t_0 - \tau, t_0], \\ \partial C_3 &= \{x : 0 \leq x^1 \leq \delta, 0 \leq x^2 \leq \lambda x^1\} \times [t = t_0 - \tau].\end{aligned}$$

В силу непрерывности функции u существует положительное λ такое, что $u|_{\partial C_2} < u(P_0)$. А значит, существует и положительное η такое, что $u|_{\partial C_2} < u(P_0) - \eta$.

На множестве C существует функция φ (сама эта функция будет представлена ниже), обладающая следующими свойствами:

- a) $L\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - q\varphi > 0$;
- b) $\varphi(X_0, t_0) = A > 0$;
- c) $\varphi|_{\partial C_1} \leq A$;
- d) $\varphi|_{\partial C_3} \leq A$;
- e) $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_{\overline{1j}} > 0$.

Рассмотрим функцию

$$v = u + \varepsilon \varphi - u(X_0, t_0), \quad \varepsilon > 0.$$

Очевидно, что функция v является субпараболической. Эта функция так же, как и u , достигает своего максимума в точке (X_0, t_0) . Действительно, на параболической границе множества C значения функции v не превосходят εA :

$$\begin{aligned}v|_{\partial C_1} &= u|_{\partial C_1} + \varepsilon \varphi|_{\partial C_1} - u(X_0, t_0) \leq u(X_0, t_0) + \varepsilon A - u(X_0, t_0) = \varepsilon A, \\ v|_{\partial C_2} &= u|_{\partial C_2} + \varepsilon \varphi|_{\partial C_2} - u(X_0, t_0) < u(X_0, t_0) - \eta + \varepsilon \varphi|_{\partial C_2} - u(X_0, t_0) \\ &= \varepsilon \varphi|_{\partial C_2} - \eta < 0 < \varepsilon A\end{aligned}$$

при достаточно малом ε ;

$$v|_{\partial C_3} = u|_{\partial C_3} + \varepsilon \varphi|_{\partial C_3} - u(X_0, t_0) \leq u(X_0, t_0) + \varepsilon \varphi|_{\partial C_3} - u(X_0, t_0) = \varepsilon \varphi|_{\partial C_3} \leq \varepsilon A.$$

В самой точке (X_0, t_0) функция v равна A :

$$v(X_0, t_0) = u(X_0, t_0) + \varepsilon \varphi(X_0, t_0) - u(X_0, t_0) = \varepsilon \varphi(0, 0, t_0) = \varepsilon A.$$

В силу слабого принципа максимума $v \leq v(P_0)$ на C , а значит, P_0 – точка максимума функции v . Следовательно,

$$\left. \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|_{1j} (P_0) \leq 0,$$

или

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{1j} (P_0) + \varepsilon \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|_{1j} (P_0) \leq 0.$$

Так как

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|_{1\bar{j}} > 0,$$

то

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{1j} (P_0) \leq -\varepsilon \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|_{1j} (P_0) < 0;$$

следовательно,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{1j} (P_0) < 0$$

и

$$(\nabla u)_\nu(P_0) = \sum_{\sigma_{1j} \succ \sigma_{0i}} \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{1j} (P_0) < 0.$$

Лемма доказана.

Предъявим теперь фигурирующую в доказательстве леммы функцию φ . Построим ее на множестве C для каждого из C_{2k} следующим образом:

$$\varphi = \exp \theta \left(x_1 - \frac{x_2}{\lambda} \right) \exp \frac{\theta \delta}{\tau} (t - t_0 + \tau) - 1.$$

а) Эта функция является строго субпараболической, т.е. выполнено

$$L\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - q\varphi > 0.$$

Действительно, в точке $x \in \sigma_{2k}$

$$\begin{aligned} & \Delta \varphi(x, t) - q\varphi(x, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) \\ &= \exp \theta \left(x_1 - \frac{x_2}{\lambda} \right) \exp \frac{\theta \delta}{\tau} (t - t_0 + \tau) \left[\theta^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) - q - \frac{\theta \delta}{\tau} \right] - q > 0 \end{aligned}$$

при достаточно большом θ . В точке $x \in \sigma_{1k}$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x, t) - q\varphi(x, t) - \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x, t) \\ = e^{\theta x_1} e^{\frac{\theta\delta}{\tau}(t-t_0+\tau)} \left[\theta^2 - q - \frac{\theta\delta}{\tau} \right] \\ - \sum_{\sigma_{2k} \succ \sigma_{1j}} \frac{\theta}{\lambda} \exp\left(\theta \left(x_1 - \frac{x_2}{\lambda}\right)\right) \exp \frac{\theta\delta}{\tau}(t - t_0 + \tau) - q > 0, \end{aligned}$$

при достаточно большом θ .

б) Выполнено $\varphi(0, 0, t_0) = e^{\theta\delta} - 1 = A > 0$.

с) Выполнено $\varphi|_{\partial C_1} = \exp \frac{\theta\delta}{\tau}(t - t_0 + \tau) - 1 \leq e^{\theta\delta} - 1 = A$.

д) Выполнено $\varphi|_{\partial C_3} = e^{\theta(x_1 - x_2/\lambda)} - 1 \leq e^{\theta\delta} - 1 = A$.

е) Во введенной системе координат $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big|_{1j}(P_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}(0, 0, t_0) = \theta e^{\theta\delta} > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. В двумерных стратах не может быть точек локального нетривиального неотрицательного максимума в силу классического сильного принципа максимума. Если же такой максимум достигается в точке P_0 , лежащей внутри одномерного страта, то в силу его нетривиальности существует страт $\sigma_{2k} \succ \sigma_{1j}$, на котором $u \neq u(P_0)$. Страт σ_{1j} является граничным для страта σ_{2k} , а значит, в силу леммы о нормальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{2k}(P_0) < 0,$$

а вместе с ней и $(\nabla u)_\nu(P_0) < 0$.

Следовательно, и значение оператора

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + (\nabla u)_\nu - qu - \frac{\partial u}{\partial t}$$

в точке P_0 на страте σ_{1j} также отрицательно, что противоречит субпараболичности функции u .

Если же локальный нетривиальный максимум достигается в точке P_0 , лежащей на нульмерном страте σ_{0i} , то существует примыкающий к нему страт σ_{1j} , на котором $u \neq u(P_0)$ и для которого страт σ_{0i} является граничным. В этом случае в силу леммы о нормальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{2k}(P_0) < 0,$$

а значит, отрицательна и нормальная производная $(\nabla u)_\nu(P_0) < 0$. Значение оператора

$$Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = (\nabla u)_\nu - qu - \frac{\partial u}{\partial t}$$

на страте σ_{0i} в точке P_0 также будет отрицательно (напомним, что в нульмерных стратах классическая часть оператора Лапласа на стратифицированном множестве равна нулю). Но это противоречит субпараболичности функции u .

Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность рецензенту, замечания которого способствовали более ясному изложению результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Куляба В. В. Задача теплопроводности, приводящая к параболическому оператору на стратифицированном множестве // Сб. трудов молодых ученых матем. факультета Воронежского гос. ун-та. Воронеж, 2001. С. 109–112.
- [2] Lumer G. Espaces ramifiés et diffusions sur les réseaux topologiques // C. R. Acad. Sc. Paris. Sér. A. 1980. V. 291. P. 627–630.
- [3] Lumer G. Connecting of local operators and evolution equations on networks // Lecture Notes in Math. V. 787. New York: Springer-Verlag, 1980. P. 219–234.
- [4] Покорный Ю. В. О краевых задачах на графах // Численные методы и оптимизация. Материалы IV симпозиума АН ЭССР. Таллин, 1988. С. 158–161.
- [5] Nicaise S. Spectre des reseaux topologiques finis // Bull. Sc. Math. Ser. 2. 1987. V. 111. P. 401–413.
- [6] Nicaise S. Le laplacien sur les réseaux deux-dimensionnels polygonaux topologiques // J. Math. Pures Appl. 1988. V. 67. P. 93–113.
- [7] Gavrilov A., Nicaise S., Penkin O. Poincaré's inequality on stratified sets and applications. Rapport de recherche no. 01.2 (Février 2001): Université de Valenciennes, 2001.
- [8] Жиков В. В. Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 8. С. 3–40.
- [9] Жиков В. В. Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 7. С. 31–72.
- [10] Пенкин О. М., Покорный Ю. В. О несовместных неравенствах для эллиптических операторов на стратифицированных множествах // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 8. С. 1107–1113.
- [11] Гилбарг Д., Трудингер М. Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
- [12] Penkin O. About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions // Partial Differential Equations on Multistructures / ed. F. Ali Mehmeti, J. von Belov, S. Nicaise. Marcel: Dekker, 2001. P. 183–191.
- [13] Гаврилов А. А., Пенкин О. М. Аналог леммы о нормальной производной для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 2. С. 226–232.
- [14] Rubinstein I., Rubinstein L. Partial Differential Equations in Classical Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.

Воронежский государственный университет
E-mail: kvvit@aport2000.ru, penkin@comch.ru

Поступило
09.10.2000
Исправленный вариант
15.02.2002