Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Троицкая, О спектре кориолисова оператора в осесимметричных областях с ребрами, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 2, 304–310

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1830>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:11:06

О СПЕКТРЕ КОРИОЛИСОВА ОПЕРАТОРА В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ С РЕБРАМИ

С. Д. Троицкая

Пусть G – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, H – гильбертово пространство вектор-функций $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3)$, $u_i \in L_2(G)$, $i = 1, 2, 3$, со скалярным произведением

$$(\vec{U}, \vec{V}) = \int_G (u_1 \bar{v}_1 + u_2 \bar{v}_2 + u_3 \bar{v}_3) dx dy dz.$$

В H рассмотрим подпространство S , являющееся замыканием линейного многообразия соленоидальных векторов $\{\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \mid \varphi_i \in C_0^\infty(G), i = 1, 2, 3, \nabla \cdot \vec{\varphi} = 0\}$ и обозначим через P оператор ортогонального проектирования на S . Определим линейный оператор $B: S \rightarrow S$ формулой $B\vec{U} = P(\vec{U} \times \vec{k})$, где $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Очевидно, что B ограничен и косоэрмитов. В литературе он часто называется гироскопическим или кориолисовым оператором, поскольку уравнение

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = B\vec{U}, \quad \vec{U}(0) = \vec{U}_0 \in S \quad (1)$$

описывает малые колебания идеальной несжимаемой жидкости, целиком заполняющей контейнер G и вращающейся вокруг вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью $\omega = 1/2$. Изучению этой задачи была посвящена известная работа С. Л. Соболева [1]. Общая теорема о расположении спектра кориолисова оператора (закрывающаяся в том, что $\sigma(iB) = [-1, 1]$ для произвольной области G) доказана Дж. В. Ральстоном [2]. Следует отметить, что при этом качественная структура спектра оператора B уже зависит от конфигурации области. В свою очередь, свойства решений задачи Коши (1) (такие, например, как почти периодичность по временной переменной t) тесно связаны именно со структурой спектра этого оператора. Изучению вопроса о почти периодичности решений модельной задачи, соответствующей задаче (1) в случае двух пространственных переменных посвящены работы многих авторов (см. обзоры [3], [4]). Трехмерная задача изучена в значительно меньшей степени. Полностью структура спектра кориолисова оператора исследована только для двух контейнеров – прямого кругового цилиндра и эллипсоида вращения (см. [5]). В обоих этих случаях оператор iB обладает полной системой собственных функций, а множество его собственных значений всюду плотно на отрезке $[-1, 1]$, поэтому все решения соответствующей начально-краевой задачи почти периодичны по времени. В [6] доказано существование некоторой тороидальной области, в которой решения уравнения (1) могут быть не почти периодическими.

Ниже рассматриваются области, обладающие осевой симметрией относительно оси вращения. Несложно доказать, что в этом случае пространство S может быть разложено в бесконечную сумму ортогональных друг другу подпространств (будем обозначать их S_k), инвариантных относительно оператора B . В настоящей работе доказано, что спектр каждого из операторов $iB_k := iB|_{S_k}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, являющихся сужениями оператора iB на подпространства S_k , также совпадает со всем отрезком $[-1, 1]$. На основании этого факта с помощью методов работы автора [7] (см. также [8], [9]) доказано, что для некоторых осесимметричных областей с

ребрами (в частности, например, для конуса) спектр оператора iB_0 является непрерывным на определенных подинтервалах отрезка $[-1, 1]$. Это означает, что собственные функции исходного оператора B (если они существуют) не образуют базиса в S , и поэтому задача (1) в таких областях обязательно имеет не почти периодические по времени решения.

Далее везде будем предполагать, что G – симметричная относительно оси Oz область, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью ∂G и удовлетворяющая условию конуса.

Пусть $\widetilde{W}_2^1 := W_2^1(G) \ominus \{1\}$ – подпространство пространства С. Л. Соболева $W_2^1(G)$, ортогональное константам. Пусть (r, φ, t) – цилиндрическая система координат, связанная с (x, y, z) : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = t$, и пусть D – область в плоскости $\varphi = 0$, которая заметает G при вращении вокруг оси Ot . Через $H_{(r)}(P)$ и $\widetilde{W}_{(r)}^1(P)$ обозначим пространства, в которые при этой замене координат перейдут соответственно H и $\widetilde{W}_2^1$. Это гильбертовы пространства классов измеримых функций, заданных на цилиндре $P = D \times (0, 2\pi)$, со скалярными произведениями

$$(\vec{U}(r, \varphi, t), \vec{V}(r, \varphi, t))_{H_{(r)}(P)} := \iiint_P \sum_{i=1}^3 u_i(r, \varphi, t) \overline{v_i(r, \varphi, t)} r dr d\varphi dt, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & (h(r, \varphi, t), g(r, \varphi, t))_{\widetilde{W}_{(r)}^1(P)} \\ &:= \iiint_P \left\{ h\overline{g} + \frac{\partial h}{\partial r} \overline{\frac{\partial g}{\partial r}} + \frac{\partial h}{\partial t} \overline{\frac{\partial g}{\partial t}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \overline{\frac{\partial g}{\partial \varphi}} \right\} r dr d\varphi dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначим через $L_{(r)}(D)$ и $W_{(k,r)}^1(D)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, гильбертовы пространства классов измеримых на D функций с нормами

$$\begin{aligned} \|f(r, t)\|_{L_{(r)}(D)}^2 &= \iint_D |f(r, t)|^2 r dr dt, \\ \|g(r, t)\|_{W_{(k,r)}^1(D)}^2 &= \iint_D \left\{ |g(r, t)|^2 + \left| \frac{\partial g}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial g}{\partial t} \right|^2 + \frac{k^2}{r^2} |g(r, t)|^2 \right\} r dr dt \end{aligned}$$

соответственно.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы представления*

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{(r)}^1(P) &= \bigoplus_{k \neq 0, k=-\infty}^{+\infty} W_{(k,r)}^1(D) e^{ik\varphi} \bigoplus \{W_{(0,r)}^1(D) \ominus \{1\}\}, \\ H_{(r)}(P) &= \bigoplus_{k=-\infty}^{+\infty} H_{(k,r)}, \end{aligned}$$

где элементы пространств $H_{(k,r)}$ имеют вид

$$H_{(k,r)} := \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(r, t) \\ f_2(r, t) \\ f_3(r, t) \end{pmatrix} e^{ik\varphi} : f_i(r, t) \in L_{(r)}(D), i = 1, 2, 3 \right\},$$

и суммы ортогональны относительно скалярных произведений (3) и (2) соответственно.

Обозначим через $S_{(r)}$ пространство, в которое перейдет S при цилиндрической замене координат, через P_k – операторы ортогонального (в смысле (2)) проектирования $H_{(r)}$ на подпространства $H_{(k,r)}$, а через T_φ – ортогональную матрицу в предыдущем выражении.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы представления*

$$S_{(r)} = \bigoplus_{k=-\infty}^{+\infty} S_{(k,r)},$$

$$S_{(k,r)} = \left\{ \vec{U}_k \in H_{(k,r)} : (T_\varphi^{-1} \vec{U}, \nabla_c(p_k(r, t)e^{ik\varphi}))_{H_{(r)}(P)} = 0 \right. \\ \left. \forall p_k(r, t) \in W_{(k,r)}^1(D) \right\},$$

где

$$\nabla_c := \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial t} \right).$$

При этом $P_k P = P P_k$ для всех $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Очевидно, что для любого k оператор $P_{S_{(k,r)}}$ ортогонального проектирования $H_{(r)}$ на $S_{(k,r)}$ равен $P_{S_{(k,r)}} = P_k P$.

ТЕОРЕМА 3. *Пространства $S_{(k,r)}$ приводят оператор B . Для любого $\vec{U} \in S$ имеем $B P_k \vec{U} = P_k B \vec{U}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.*

Мы не приводим доказательств теорем 1–3, поскольку существование инвариантных относительно оператора B подпространств $S_{(k,r)}$ для осесимметричных областей G известно давно (см., например, [10], [11]). В теоремах 1–3 мы просто записали элементы этих пространств в удобной для дальнейших рассуждений форме.

Определим операторы $B_k : S_{(k,r)} \rightarrow S_{(k,r)}$ как сужения оператора B на подпространства $S_{(k,r)}$: $B_k := B|_{S_{(k,r)}}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 4. $\sigma(iB_k) = [-1, 1]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Выберем два действительных числа $\bar{n}$ и $\bar{m}$ так, чтобы $\bar{m}/\sqrt{\bar{n}^2 + \bar{m}^2} = \lambda$. Ясно, что $\bar{n} \neq 0$, $\bar{m} \neq 0$. (Для определенности считаем $\bar{n} > 0$.) Пусть $\psi \in C_0^\infty(D)$: $\psi(r, t) \equiv 1$ внутри некоторого квадрата $K_0 \subset \text{supp } \psi$, $K_0 := \{(r, t) : r_0 < r < r_0 + a_0, t_0 < t < t_0 + a_0\}$, и пусть $\rho_l := \psi(\sqrt{x^2 + y^2}, z) e^{i(\bar{n}lx + \bar{m}lz)}$, $l = 1, 2, \dots$. Тогда из результатов работы [2] следует, что для последовательности вектор-функций

$$\vec{U}_l = \left(\frac{\bar{m}i}{\sqrt{\bar{n}^2 + \bar{m}^2}} \frac{\partial(\Delta \rho_l)}{\partial z}, \frac{\partial(\Delta \rho_l)}{\partial z}, \frac{-\bar{m}i}{\sqrt{\bar{n}^2 + \bar{m}^2}} \frac{\partial(\Delta \rho_l)}{\partial x} - \frac{\partial(\Delta \rho_l)}{\partial y} \right)$$

существует постоянная $C > 0$, не зависящая от номера l , такая, что справедлива оценка

$$\frac{\|iB\vec{U}_l - \lambda\vec{U}_l\|_H}{\|\vec{U}_l\|_H} < \frac{C}{l}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Докажем, что для любого $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ существуют номер $L(k) < \infty$ и постоянная $C_k > 0$, не зависящая от l , такие, что

$$\frac{\|iB_k(P_k \vec{U}_l) - \lambda P_k \vec{U}_l\|_{H(r)}}{\|P_k \vec{U}_l\|_{H(r)}} < \frac{C_k}{l} \quad \forall l \geq L(k). \quad (4)$$

Пусть

$$\vec{U}_l = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_\varphi \begin{pmatrix} f_{1,k}(r, t) \\ f_{2,k}(r, t) \\ f_{3,k}(r, t) \end{pmatrix} e^{ik\varphi}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|P_k \vec{U}_l\|_{H(r)}^2 &= 2\pi \iint_D \{|f_{1,k}|^2 + |f_{2,k}|^2 + |f_{3,k}|^2\} r dr dt \geq 2\pi \iint_D |f_{3,k}|^2 r dr dt \\ &= \iint_D \left| \int_0^{2\pi} \left(\vec{U}_l, T_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_3 e^{ik\varphi} d\varphi \right|^2 r dr dt \\ &\geq \iint_{K_0} \left| \int_0^{2\pi} \left(\vec{U}_l, T_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_3 e^{ik\varphi} d\varphi \right|^2 r dr dt \\ &= \overline{m}^2 \overline{n}^2 (\overline{m}^2 + \overline{n}^2) l^6 \iint_{K_0} \left| \int_0^{2\pi} e^{i(\overline{n}lr \cos \varphi + \overline{m}lt)} e^{ik\varphi} d\varphi \right|^2 r dr dt, \end{aligned}$$

где $(\cdot, \cdot)_3$ — эрмитово скалярное произведение в арифметическом пространстве $\mathbb{C}^3$, антилинейное по второму аргументу. Имеем (см. [12])

$$\begin{aligned} \iint_{K_0} \left| \int_0^{2\pi} e^{i(\overline{n}lr \cos \varphi + \overline{m}lt)} e^{ik\varphi} d\varphi \right|^2 r dr dt &= 4\pi^2 a_0 \int_{r_0}^{r_0+a_0} J_k^2(\overline{n}lr) r dr \\ &= \frac{8a_0\pi}{\overline{n}^2 l^2} \int_{r_0 \overline{n}l}^{(r_0+a_0)\overline{n}l} \left\{ \cos^2 \left(x - \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\} dx, \end{aligned}$$

где $J_k(z)$ — функция Бесселя. Пусть номер $L'_0(k) > 0$ такой, что $O(1/x) < 1/10$ для всех $x \geq r_0 \overline{n} L'_0(k)$; тогда для $l \geq L'_0(k)$ последнее выражение не меньше, чем

$$\frac{8a_0\pi}{\overline{n}^2 l^2} \left(\frac{2}{5} a_0 \overline{n} l - \frac{1}{2} \right).$$

Отсюда следует, что для любого $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ существуют номер $L_0(k) < \infty$ и постоянная $C_0(k) > 0$, не зависящая от l , такие, что

$$\|P_k \vec{U}_l\|_{H(r)}^2 \geq C_0(k) l^5 \quad \forall l \geq L_1(k).$$

С другой стороны, если $\{K_1, \dots, K_N\}$ — некоторое конечное покрытие $\text{supp } \psi$ квадратами $K_i := \{(r, t) : r_i < r < r_i + a_i, t_i < t < t_i + a_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, то (см. [2])

$$\begin{aligned} \|iB_k(P_k \vec{U}_l) - \lambda P_k \vec{U}_l\|_{H(r)}^2 &= \|P_k(iB \vec{U}_l - \lambda \vec{U}_l)\|_{H(r)}^2 \\ &\leq (\overline{n}^2 + \overline{m}^2)^2 l^4 \sum_{i=1}^N C_i(k) \iint_{K_i} \left| \int_0^{2\pi} e^{i(\overline{n}lr \cos \varphi + \overline{m}lt)} e^{ik\varphi} d\varphi \right|^2 r dr dt \leq C'(k) l^3, \end{aligned}$$

откуда следует справедливость оценки (4).

Воспользовавшись результатами работы [1], несложно показать, что если некоторое число $\lambda \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ является собственным значением оператора B_k , то задача I_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$\frac{\partial^2 p_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial r} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 p_k}{\partial t^2} - \frac{k^2 p_k}{r^2} = 0 \quad (D), \quad (5)$$

$$\frac{\partial p_k}{\partial r} \cos(\vec{n}, r) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial p_k}{\partial t} \cos(\vec{n}, t) - \frac{k p_k \cos(\vec{n}, r)}{\lambda r} \Big|_{\partial D \setminus \gamma} = 0, \quad (6)$$

где $\gamma = G \cap \{r = 0\}$, $a^2 = \lambda^2 / (1 - \lambda^2)$, при $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ обязательно имеет ненулевое решение $p_k(r, t)$ в пространстве $W_{(k, r)}^1(D)$, а при $k = 0$ – в пространстве $W_{(0, r)}^1(D) \ominus \{1\}$. Производные в (5) следует понимать в смысле теории распределений, а граничные условия (6) выполненными почти всюду по линейной мере на ∂D (см. [7]).

ТЕОРЕМА 5. Пусть

$$D = \{(r, t) : 0 \leq c < r < d, 0 < \varphi_1(r) < t < \varphi_2(r)\},$$

где $\varphi_1(r), \varphi_2(r)$ – гладкие функции, заданные на $[c, d]$, и либо

$$\varphi_1(c) = \varphi_2(c) \quad (c \neq 0), \quad \lim_{r \rightarrow c+0} \varphi_1'(r) \neq \lim_{r \rightarrow c+0} \varphi_2'(r),$$

либо

$$\varphi_1(d) = \varphi_2(d), \quad \lim_{r \rightarrow d-0} \varphi_1'(r) \neq \lim_{r \rightarrow d-0} \varphi_2'(r), \quad (7)$$

и пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – осесимметричная область, которую заметает D при вращении вокруг оси Ot . Если

$$M := \max_{c \leq r \leq d} \{|\varphi_i'(r)|, i = 1, 2\} < \infty,$$

то для области G на интервалах $\lambda \in (-1/\sqrt{1+M^2}, 0) \cup (0, 1/\sqrt{1+M^2})$ спектр оператора B_0 является чисто непрерывным, т.е. на этих интервалах отсутствуют собственные значения оператора B_0 . (Кривые φ_i , ограничивающие область D , могут быть кусочно гладкими, тогда в качестве константы M нужно взять наибольшую из абсолютных величин производных слева и справа функций $t = \varphi_i(r)$ на отрезке $[c, d]$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что при λ , принадлежащих указанным интервалам, задача I_0 имеет только тривиальные решения в пространстве $W_{(0, r)}^1(D) \ominus \{1\}$. Для определенности будем считать, что кривые φ_i пересекаются в точке d , т.е. выполнено условие (7). Замена переменных

$$x = r - at + a\varphi_1(d) - d, \quad y = -r - at + a\varphi_1(d) + d$$

приводит уравнение (5) при $k = 0$ к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 p_0}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2(x - y + 2d)} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{1}{2(x - y + 2d)} \cdot \frac{\partial p_0}{\partial y} = 0 \quad (D_0), \quad (8)$$

где D_0 – область в плоскости Oxy , в которую при этом перейдет D , а граничные условия (6) к виду

$$\left\{ \frac{\partial p_0}{\partial x} dx - \frac{\partial p_0}{\partial y} dy \right\} \Big|_{\partial D_0 \setminus \gamma_0} = 0, \quad (9)$$

где $\gamma_0 = \partial D_0 \cap \{y = x + 2d\}$. Заметим, что область D_0 ограничена двумя гладкими кривыми, задаваемыми функциями $y = y_i(x)$, $x \in I_i := (c - a\varphi_i(c) + a\varphi_i(d) - d, 0)$, $i = 1, 2$, и отрезком прямой $y = x + 2d$. Поскольку $0 < \lambda^2 < 1/(1 + M^2)$, то $y'_i(x) < 0 \ \forall x \in I_i$, $i = 1, 2$. Кроме того,

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad 0 < \lim_{x \rightarrow -0} |y'_2(x)| < \lim_{x \rightarrow -0} |y'_1(x)|.$$

На кривых $y_i(x)$ граничные условия (9) принимают вид

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} - l'_i(x) \frac{\partial p_0}{\partial y} \Big|_{y=y_i(x)} = 0, \quad x \in I_i, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

В работе [7] (теоремы 2.1 и 3.2) для некоторого гиперболического уравнения доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ его решениями в пространстве $W_2^1(D_0 \cap \{y < x + 2d - \varepsilon\})$, удовлетворяющими условиям (10), могут быть лишь константы. Наше уравнение (8) отличается от упомянутого лишь знаками коэффициентов, при этом несложно проследить, что те же рассуждения, с помощью которых были доказаны эти теоремы, с незначительными изменениями проходят и в нашем случае. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует, что при $0 < \lambda^2 < 1/(1 + M^2)$ решениями задачи I_0 в пространстве $W_{(0,r)}^1(D)$ могут быть только константы. Отбрасывая их, получаем утверждение теоремы.

Таким образом, в областях G , удовлетворяющих условиям теоремы 5, начально-краевая задача (1) обязательно имеет не почти периодические решения, поскольку собственные векторы оператора B (если такие существуют) не образуют базиса в S . Из доказательства теоремы видно, что аналогичный вывод справедлив и для областей, описанных в теореме 3.4 и замечаниях 2.9, 2.10, 3.5 работы [7].

Московский государственный институт
стали и сплавов

Поступило
16.01.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С. Л. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1954. Т. 18. № 1. С. 3–50.
2. Ralston J. V. // J. Math. Anal. Appl. 1973. V. 44. № 2. P. 366–383.
3. Алксандрян Р. А., Березанский Ю. М., Ильин В. А., Костюченко А. Г. // Тр. симпозиума, посвященного 60-летию акад. С. Л. Соболева. М.: Наука, 1970. С. 3–35.
4. Зеленьяк Т. И., Капитонов Б. В., Сказка В. В., Фокин М. В. О проблеме С. Л. Соболева в теории малых колебаний вращающейся жидкости. Препринт ВЦ СО АН СССР № 471. Новосибирск, 1983.
5. Barcilon V. // Mathe-matika. 1968. V. 15. P. 93–102.
6. Ляшенко А. А. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278. № 4. С. 803–806.
7. Троицкая С. Д. // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 97–124.
8. Троицкая С. Д. // Избр. вопр. алгебры, геометрии и дискретной матем. М.: Изд-во МГУ, 1992. С. 138–147.
9. Троицкая С. Д. // УМН. 1992. Т. 47. № 5. С. 191–192.
10. Соболев С. Л. // Журн. прикл. мех. и техн. физ. 1960. № 3. С. 20–55.
11. Гринспэн Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
12. М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.) Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.