Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Филиновский, Интегральные оценки решений волнового уравнения в областях с бесконечной границей, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 2, 310–312

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1831>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:55:44

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТЯХ С БЕСКОНЕЧНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. В. Филиновский

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — неограниченная область, замыкание которой не содержит начало координат, с гладкой границей Γ . Для произвольных чисел $m = 1, 2, \dots, n-1$ и $0 \leq \alpha \leq 1$ определим функцию

$$\varphi(x) = \alpha(x_1^2 + \dots + x_m^2) + x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Ω называется областью класса D_φ , если

$$(\nu_x, \nabla \varphi(x)) \leq 0, \quad x \in \Gamma,$$

где ν_x — единичный вектор внешней по отношению к Ω нормали к Γ .

Ω называется областью класса G_φ , если $\Omega \in D_\varphi$ и существует такая постоянная $C_1 > 0$, что

$$x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq C_1 |x|^{2\alpha}, \quad x \in \Omega. \quad (1)$$

При $\alpha = 1$ неравенство (1) выполняется с $C_1 = 1$ для произвольной $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и класс G_φ содержит все области, граница которых звездна относительно начала координат. Из (1) следует, что граница области $\Omega \in G_\varphi$, $\alpha < 1$, бесконечна.

Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = g(x), \quad (3)$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad t > 0. \quad (4)$$

Начальную функцию будем предполагать вещественнозначной, гладкой в $\overline{\Omega}$ и согласованной с граничным условием (4).

Для решения задачи (2)–(4) справедлив закон сохранения энергии

$$E_\Omega(t) = \int_\Omega (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx = E_\Omega(0), \quad t > 0.$$

В случае $\Omega \in G_\varphi$, $\alpha = 1$ энергия $E_\Omega(t)$ при $t \rightarrow \infty$ рассеивается на бесконечность [1], [2], т.е. для любого компакта $\Omega' \subset \overline{\Omega}$

$$E_{\Omega'}(t) = \int_{\Omega'} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

В областях $\Omega \in G_\varphi$ с $\alpha = 1$ изучено и распределение энергии по Ω при больших значениях t . Так для $n \geq 3$ в [1] установлена оценка

$$E_{\Omega_R}(t) \leq \frac{C}{(t-R)^2}, \quad t > R > 0, \quad \Omega_R = \Omega \cap \{r < R\}, \quad r = |x|,$$

а в [2] для $n \geq 2$ доказана сходимость интеграла

$$\int_0^\infty (1+t)^{1-\delta} dt \int_\Omega ((u_r + u_t)^2 + |\nabla u|^2 - u_r^2) dx \leq C, \quad \delta > 0.$$

В настоящей работе исследуется распределение энергии $E_\Omega(t)$ в областях $\Omega \in G_\varphi$ при $\alpha < 1$.

Предположим, что

$$\int_\Omega r^{2\alpha+1} \left(g^2 + |\nabla g|^2 + \sum_{j,l=1}^n \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_l} \right)^2 \right) dx < \infty.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 9$,

$$1 \leq m \leq 2n + 3 - \sqrt{28n + 42}, \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{n}{(n-2)(n-6)} \leq \alpha < 1, \quad (6)$$

и $\Omega \in G_\varphi$. Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt \int_\Omega \left(\left(\frac{(\nabla u, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} + \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} u_t \right)^2 + |\nabla u|^2 - \frac{(\nabla u, \nabla \varphi)^2}{|\nabla \varphi|^2} + \frac{u^2}{r^2} \right) \frac{dx}{r^{2\alpha-1}} \\ \leq C_2 \int_\Omega r^{2\alpha+1} (g^2 + |\nabla g|^2 + (\Delta g)^2) dx \end{aligned}$$

с постоянной C_2 , зависящей от n и α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1 основано на свойствах в замкнутой верхней полуплоскости $\{\operatorname{Im} k \geq 0\}$ решения $v(x, k)$ краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\begin{aligned} \Delta v + k^2 v &= h(x), \quad x \in \Omega, \quad k = \omega + i\mu, \\ v|_\Gamma &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\int_\Omega r^{2\alpha+1} |h|^2 dx < \infty.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 9$, n и α удовлетворяют (5), (6) и $\Omega \in G_\varphi$. Тогда функция $v(x, k)$ удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + |\nabla v|^2 - \frac{|(\nabla v, \nabla \varphi)|^2}{|\nabla \varphi|^2} + \frac{|v|^2}{r^2} \right) \frac{dx}{r^{2\alpha-1}} \\ \leq C_3 (\omega^2 + 1) \int_\Omega r^{2\alpha+1} |h|^2 dx, \quad -\infty < \omega < +\infty, \quad \mu > 0, \quad (7) \end{aligned}$$

с постоянной C_3 , зависящей от n, α , и равномерно непрерывна на $K_N = \{\operatorname{Im} k > 0, |k| < N\}$ в норме $W_2^2(\Omega'')$, где N – любое положительное

число, а $\Omega'' \subset \Omega$ — произвольная ограниченная область. Для каждого $\omega \in (-\infty, +\infty)$

$$\lim_{k \rightarrow \omega} \|v(x, k) - v(x, \omega)\|_{W_2^2(\Omega'')} = 0, \quad \text{Im } k > 0,$$

где функция $v(x, \omega)$ является решением задачи

$$\Delta v + \omega^2 v = h(x), \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad (9)$$

и удовлетворяет (7).

Из (7) следует, что при всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$ существует решение задачи (8), (9) с конечным интегралом

$$\int_{\Omega} \left(\left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 + \frac{|v|^2}{r^2} \right) \frac{dx}{r} < \infty. \quad (10)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $n \geq 9$, m удовлетворяет (5), $1/2 \leq \alpha \leq 1$ и $\Omega \in D_{\varphi}$. Тогда решение задачи (8)–(10), $-\infty < \omega < +\infty$, единственно.

При $\omega \neq 0$ из (10) следует условие излучения

$$\int_{\Omega} \left| \frac{(\nabla v, \nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|} - i\omega \frac{|\nabla \varphi|}{2\sqrt{\varphi}} v \right|^2 \frac{dx}{r} < \infty. \quad (11)$$

В случае $\alpha = 1$ из (11) вытекает условие

$$\int_{\Omega} |v_r - i\omega v|^2 \frac{dx}{r} < \infty,$$

а при $\alpha = 0$, $m = n - 1$ — условие

$$\int_{\Omega} |v|_{x_n} - i\omega v|^2 \frac{dx}{r} < \infty,$$

из которого для $\Omega \in G_{\varphi}$, $\Omega \subset \{x_n \geq \delta > 0\}$ следует условие излучения Реллиха [3]

$$\int_{\Omega} |v_{x_n} - i\omega v|^2 \frac{dx}{x_n} < \infty.$$

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступило
11.01.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zachmanoglou E. C. // Arch. Rat. Mech. Anal. 1963. V. 14. № 4. P. 312–325.
2. Муравей Л. А. // Тр. МИАН. 1988. Т. 185. С. 171–180.
3. Rellich F. // Jahresb. der Deutsch. Math. Verein. 1943. V. 53. № 1. P. 57–65.