Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Юдович, Теорема о неявной функции для
косимметрических уравнений, *Матем. заметки*,
1996, том 60, выпуск 2, 313–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1832>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 08:00:39

ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ КОСИММЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. И. Юдович

Косимметрия векторного поля на многообразии, введенная в [1], может служить естественной причиной существования непрерывного семейства равновесий. Такое семейство не является, вообще говоря, орбитой группы симметрии динамической системы, поскольку его точки, в отличие от равновесий орбиты, сохраняют индивидуальность – у каждой свой спектр устойчивости [2].

В этой работе дано общее определение косимметрии. В частности, *косимметрией сечения векторного расслоения над многообразием* называется сечение сопряженного расслоения, аннулирующее данное сечение в каждой точке многообразия.

Косимметрическая версия теоремы о неявной функции (теорема 1, простейший вариант см. в [1]) дает достаточные условия существования у операторного уравнения со многими косимметриями локального подмногообразия решений в окрестности известного решения.

При определенных условиях невырожденности возможно гладкое продолжение по параметру как локальных подмногообразий решений (теорема 2), так и глобальных (предложение 2). При этом бифуркация глобальных подмногообразий решений носит локальный характер – начинается в некоторой точке подмногообразия.

1. Косимметрия. Пусть X, Y – вещественные банаховы пространства, и оператор $F: X \rightarrow Y$ действует из X в Y . Назовем оператор $L: X \rightarrow Y^*$ *косимметрией оператора F* , если для всех $x \in X$

$$(Fx, Lx) = 0. \quad (1)$$

Здесь $(,)$ – внутреннее произведение вектора из Y и линейного функционала из Y^* . *Мультикосимметрией* назовем семейство косимметрий

$$L = \{L_m\}_{m \in M} \quad (2)$$

с произвольным множеством индексов M .

Рассмотрим уравнение

$$Fx = 0 \quad (3)$$

с оператором F , допускающим косимметрию L . Его решение x_0 назовем *косимметричным*, если $Lx_0 = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть оператор $F: X \rightarrow Y$ и его косимметрия $L: X \rightarrow Y^*$ дифференцируемы в точке $x \in X$. Тогда выполняется равенство

$$F'^*(x)Lx + L'^*(x)Fx = 0. \quad (4)$$

Здесь элемент $Fx \in Y$ отождествляется с его образом во втором сопряженном пространстве Y^{**} при каноническом вложении.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–013–17337, Международного научного фонда, гранты NRQ000 и NRQ300, и National Scientific Foundation (USA), грант DMS–9300752.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Некосимметричное решение x_0 вырожденно: оператор $F'(x_0)$ необратим. Ядро $\ker F'^*(x_0)$ его сопряженного нетривиально: $F'^*(x_0)Lx_0 = 0$.*

Это следствие остается верным и в том случае, когда оператор L лишь непрерывен в точке x_0 .

Равенство (4) получаем, дифференцируя (1). Его интересно сравнить с уравнением

$$F'^*(x)Lx + L'(x)Fx = 0, \quad (5)$$

которому удовлетворяет пфаффовая форма $L: X \rightarrow X^*$, инвариантная относительно потока $\exp tF$, порождаемого автономным дифференциальным уравнением $\dot{x} = Fx$ на X . Уравнение (5) тоже влечет вырожденность решения x_0 уравнения (3), если $Lx_0 \neq 0$, и при общих условиях приводит к существованию непрерывной ветви решений.

Мультикосимметрия (2) индуцирует кораспределение на паре пространств X, Y : каждой точке $x \in X$ сопоставляется подпространство $Y_{*x} = Y_{*x}(L) = \text{Clos Lin}\{Lm_x\}_{m \in M}$, а также и распределение — точке $x \in X$ ставится в соответствие аннулятор $\bar{Y}_x = Y_{*x}^\perp \subset Y$ подпространства Y_{*x} :

$$\bar{Y}_x = \{y \in Y : \forall y_* \in Y_{*x} \mid (y, y_*) = 0\}.$$

Точку $x_0 \in X$ назовем регулярной точкой мультикосимметрии (2), если в некоторой ее окрестности можно определить семейство проекторов $\bar{P}_x: Y \rightarrow Y$, $\text{im } \bar{P}_x = \bar{Y}_x$, непрерывно зависящее от x по операторной норме. Вводя дополнительный проектор $P_x = I - \bar{P}_x$ и сопряженные проекторы $\bar{P}_x^*$ и P_x^* , приходим к прямым разложениям

$$Y = Y_x \oplus \bar{Y}_x, \quad Y^* = Y_{*x} \oplus \bar{Y}_{*x}.$$

При этом $\bar{Y}_{*x} = \text{im } \bar{P}_x^* = Y_x^\perp$, $Y_x = \text{im } P_x$. Для x из окрестности точки x_0 , определяемой неравенством $\|P_x - P_{x_0}\| < 1$, подпространства Y_x, Y_{*x} изоморфны соответственно подпространствам Y_{x_0}, Y_{*x_0} . Это вытекает из следующей леммы (см. [3]).

ЛЕММА. Пусть $P, Q: Z \rightarrow Z$ — проекторы банахова пространства Z на его подпространства $X = \text{im } P$, $Y = \text{im } Q$. Если $\|P - Q\| < 1$, то подпространства X и Y изоморфны, причем сужение $Q|_X: X \rightarrow Y$ есть изоморфизм.

Заметим еще, что для рефлексивного пространства Y достаточно требовать, чтобы существовало семейство проекторов P_{*x} на Y_{*x} . В случае конечной мультикосимметрии $L = \{L_1, \dots, L_k\}$ регулярность точки $x_0 \in X$ означает попросту, что 1-формы $L_1 x_0, \dots, L_k x_0$ линейно независимы.

2. Локальные многообразия решений косимметрических уравнений. Будем говорить, что линейный оператор $T: X \rightarrow Y$, где X, Y — банаховы пространства, *регулярно разрешим*, если он нормально разрешим по Хаусдорфу ($\text{im } T = (\ker T^*)^\perp$) и его ядро дополним в X . Тогда сужение оператора T на любое дополнение его ядра есть изоморфизм этого дополнения и $\text{im } T$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в окрестности решения x_0 уравнения (3) оператор F непрерывно дифференцируем. Предположим, что $F'(x_0)$ – регулярно разрешимый оператор, x_0 – регулярная точка мультикосимметрии (2) оператора F и выполняется условие

$$\ker F'^*(x_0) = Y_{*x_0}. \quad (6)$$

Тогда множество решений уравнения (3) в некоторой окрестности точки x_0 представляет собой подмногообразие E в X , касающееся в x_0 подпространства $X_0 = \ker F'(x_0)$. Точнее, на некоторой окрестности Σ нуля в X_0 определено непрерывно дифференцируемое вложение $\varphi: \Sigma \rightarrow X$ и $E = \text{im } \varphi$. Если $F \in C^k$ при некотором $k = 1, 2, \dots, \infty, \omega$, то и $\varphi \in C^k$.

Заметим, что условие (6) означает отсутствие дополнительных вырождений, помимо тех, которые вызваны косимметриями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается сведением к классической теореме о неявной функции посредством двух редукций – левой и правой. Во-первых, заметим, что уравнение (3) эквивалентно уравнению (левая редукция)

$$\overline{P}_{x_0} Fx = 0 \quad (7)$$

в окрестности точки x_0 , определяемой неравенством $\|Px - P_{x_0}\| < 1$. Действительно, (2) очевидно влечет (7), а из уравнения (7), записанного в эквивалентной форме $Fx = (P_{x_0} - P_x)Fx$, следует (2).

Далее полагаем (правая редукция)

$$x = x_0 + s + \overline{x}, \quad s = Q(x - x_0), \quad \overline{x} = \overline{Q}(x - x_0),$$

где $Q: X \rightarrow X$, $\text{im } Q = X_0$, – проектор, существующий ввиду регулярной разрешимости оператора $F'(x_0)$. Тогда уравнение (7) приводится к виду

$$\Phi(\overline{x}, s) = 0, \quad \Phi(\overline{x}, s) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{P}_{x_0} F(x_0 + s + \overline{x}). \quad (8)$$

Оператор $\Phi: \overline{X}_0 \times X_0 \rightarrow \overline{Y}_{x_0}$, $X_0 = \text{im } \overline{Q}$, определен в некоторой окрестности нуля пространства $\overline{X}_0 \times X_0$. Доказательство теоремы 1 теперь получается применением классической теоремы о неявной функции к уравнению (3).

Естественно встает вопрос о продолжении локального подмногообразия решений уравнения (3). Содержащая его компонента связности S множества решений вдали от точки x_0 может быть устроена по существу произвольно. Если же компонента S регулярна (целиком состоит из регулярных, удовлетворяющих условиям теоремы 1, точек) и компактна, то S – замкнутое подмногообразие. Поскольку на S определена нигде не исчезающая пфаффова форма (косимметрия), его эйлерова характеристика равна нулю. Отсюда следует, что регулярное и компактное подмногообразие решений в случае, когда оно двумерно, есть либо тор T^2 , либо бутылка Клейна K^2 , а среди сфер S^n возможны лишь S^1, S^3, S^7 [4]. Существование многих косимметрий налагает на S дальнейшие топологические ограничения.

3. Косимметрические уравнения с параметром. Рассмотрим теперь уравнение с векторным параметром λ :

$$F(x, \lambda) = 0. \quad (9)$$

Здесь $F: X \times \Lambda \rightarrow Y$ – заданный оператор, X, Λ, Y – вещественные банаховы пространства. Введем банаховы пространства $\hat{X} = X \oplus \Lambda$, $\hat{Y} = Y \oplus \Lambda$ и оператор $\hat{F}: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$, полагая для любого $\hat{x} = (x, \lambda) \in \hat{X}$ $\hat{F}\hat{x} = (F(x, \lambda), 0)$. Тогда уравнение (9) примет вид

$$\hat{F}\hat{x} = 0, \quad (10)$$

причем память о происхождении этого уравнения выражается в существовании стандартной мультикосимметрии $\Lambda_\Lambda = \{L_\psi\}_{\psi \in \Lambda^*}$ с множеством индексов Λ^* ; по определению, $\Lambda_\psi(x, \psi) = (0, \psi)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F(x_0, \lambda_0) = 0$ для некоторых $x_0 \in X$, $\lambda_0 \in \Lambda$, и для любого λ из некоторой окрестности точки λ_0 отображение $F_\lambda: X \rightarrow Y$: $x \mapsto F(x, \lambda)$ допускает мультикосимметрию (2), не зависящую от параметра. Предположим, что для уравнения $F(x, \lambda_0) = 0$ выполнены предположения теоремы 1: частная производная $F_{x'}(x_0, \lambda_0): X \rightarrow Y$ – регулярно разрешимый оператор, x_0 – регулярная точка мультикосимметрии L , и отсутствуют дополнительные вырождения, так что

$$\ker F_{x'}^*(x_0, \lambda_0) = Y_{*x_0}, \quad (11)$$

где Y_{*x_0} – замкнутая линейная оболочка множества функционалов L_{mx_0} .

Тогда существуют окрестности Δ точки λ_0 в Λ и Ω точки x в X такие, что множество всевозможных решений $\hat{x} = (x, \lambda) \in \Omega \times \Delta$ уравнения (9) есть дифференцируемое подмногообразие в $X \times \Lambda$, касательное к подпространству $X_0 \times \Lambda$ пространства $X \times \Lambda$ в точке (x_0, λ_0) ; здесь $X_0 = \ker F'_{x'}(x_0, \lambda_0)$. Точнее, для всех $\lambda \in \Delta$ всякое решение уравнения (8) относительно x , расположенное в окрестности x_0 , имеет вид $x = x_0 + s + \theta(s, \lambda)$, где s – произвольная точка X_0 с достаточно малой нормой; отображение $\theta: \Omega \times \Delta \rightarrow X$ C^1 -гладко и $\theta'_s(0, \lambda_0) = 0$. Если $F \in C^k$, $k = 1, 2, \dots, \infty, \omega$, то и $\theta \in C^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получаем, переходя от уравнения (9) к уравнению (10) и применяя к последнему теорему 1. При этом уравнение (10) допускает косимметрию $\hat{L} = L \cup \Lambda_\Lambda$, получаемую присоединением к заданной мультикосимметрии L стандартной мультикосимметрии Λ_Λ .

Любопытно, что при таком подходе классическая теорема о неявной функции для уравнения (9) с параметром оказывается частным случаем ее косимметрической версии для уравнения (11) без параметра; в принципе, можно построить доказательство так, чтобы избежать здесь порочного круга.

Скажем несколько слов о возможных обобщениях понятия косимметрии. Если X и Y – многообразия и $F: X \rightarrow Y$ – отображение, то назовем *соотношением для F* отображение $\Phi: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что $\Phi(x, Fx) = 0$, причем $\Phi(x, 0) = 0$ для всех $x \in X$. Уравнение (1) в случае, когда X и Y – банаховы пространства, получаем, когда $\Phi(x, y) = \langle y, Lx \rangle$.

Далее, пусть M_X – многообразие, моделируемое банаховым пространством X , и V – векторное расслоение с базой M_X , проекцией $\pi: V \rightarrow M_X$ и слоем Y [5].

Если $F: M_X \rightarrow V$ – сечение расслоения V , то назовем его *косимметрией* сечение $L: M_X \rightarrow V^*$ сопряженного расслоения такое, что $(Fm, Lm) = 0$ для всех $m \in M_X$. Можно рассматривать и расслоения V с произвольной базой, не обязательно M_X .

4. Продолжение решений по параметру. Пусть при некотором $\lambda = \lambda_0$ уравнение (9) имеет замкнутое изолированное множество $E \subset X$ решений. Скажем, что λ_0 – *глобально регулярное значение параметра λ для множества E* , если существуют окрестность Δ точки λ_0 в Λ и окрестность Ω множества E в X такие, что множество решений $(x, \lambda) \in \Omega \times \Delta$ уравнения (9) диффеоморфно $E \times \Delta$. Нерегулярное значение будем также называть *бифуркационным*.

Если $F(x_0, \lambda_0) = 0$, то назовем λ_0 *локально регулярным* в точке x_0 значением параметра, если существуют окрестности Ω_0 точки x_0 в X и Δ_0 точки λ_0 в Λ такие, что множество решений уравнения $F(x, \lambda) = 0$ в $\Omega_0 \times \Delta_0$ диффеоморфно $E_0 \times \Delta_0$, где E_0 – множество решений уравнений $F(x, \lambda_0) = 0$ в Ω_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть уравнение (9) при $\lambda = \lambda_0$ имеет в X компактное, замкнутое, связное и регулярное подмногообразие решений E_0 , моделируемое подпространством $X_0 \subset X$. Тогда λ_0 – глобально регулярное значение параметра λ для подмногообразия E_0 . Если же λ_0 – бифуркационное значение для подмногообразия E_0 , то существует точка $x_0 \in E_0$, в которой λ_0 не является локально регулярным.

E-mail: yudovich@ns.unird.ac.ru

Поступило
04.01.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдович В. И. // Матем. заметки. 1991. Т. 49. № 5. С. 142–148.
2. Yudovich V. // Chaos. 1995. V. 5. № 2. Р. 402–411.
3. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969.
4. Шварц Дж. Дифференциальная геометрия и топология. М.: Мир, 1970.
5. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. М.: Мир, 1967.