Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Андреев, С. В. Конягин, А. Ю. Попов,
Экстремальные задачи для функций с малым
носителем, *Матем. заметки*, 1996, том 60, вы-
пуск 3, 323–332

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1833>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 18:10:21

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С МАЛЫМ НОСИТЕЛЕМ

Н. Н. Андреев, С. В. Конягин, А. Ю. Попов

В связи с приложениями к теории чисел П. Туран поставил следующую задачу.

ЗАДАЧА 1. Пусть $0 < h \leq 1/2$. В классе функций $f \in K_1(h)$, обладающих свойствами

- 1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx)$,
- 2) $a_n \geq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$),
- 3) $f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$,
- 4) $f(x) = 0$ для $h \leq |x| \leq 1/2$,

требуется оценить величину $a_0 = \int_{-h}^h f(x) dx$.

Положим

$$A_1(h) = \sup_{f \in K_1(h)} \int_{-h}^h f(x) dx.$$

С. Б. Стечкин в [1] доказал (он изучал ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$, но нам удобно несколько изменить его обозначения), что

$$A_1\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{N} \quad (N = 2, 3, \dots),$$

откуда

$$A_1(h) = h + O(h^2),$$

и, в частности,

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{A_1(h)}{h} = 1.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00378. Кроме того, работа первого и второго авторов выполнена при поддержке Международного научного фонда, грант МС5300.

Асимптотически экстремальной является функция

$$\phi_h(x) = \max\left(1 - \frac{|x|}{h}, 0\right)$$

с разложением в ряд Фурье

$$\phi_h(x) = h + 2h \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(\pi nh)}{\pi nh}\right)^2 \cos(2\pi nx).$$

При изучении распределения дробных долей некоторых последовательностей возникает аналогичная задача (см. [2]).

ЗАДАЧА 2. Пусть $0 < h \leq 1/2$. В классе функций $f \in K_2(h)$, обладающих свойствами

- 1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx)$,
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = 1$,
- 3) $f(x) = 0$ для $h \leq |x| \leq 1/2$,

требуется оценить величину $a_0 = \int_{-h}^h f(x) dx$.

Положим

$$A_2(h) = \sup_{f \in K_2(h)} \int_{-h}^h f(x) dx.$$

В силу неравенства $|f(x)| \leq 1$ и условия 3) имеем $A_2(h) \leq 2h$. Так как $\phi_h(x) \in K_1(h) \subset K_2(h)$, то $A_2(h) \geq A_1(h) \geq h$. Таким образом,

$$1 \leq \frac{A_2(h)}{h} \leq 2.$$

Возникает естественный вопрос: справедлив ли для функции $A_2(h)$ какой-либо аналог упомянутой теоремы С. Б. Стечкина из [1]? Точнее говоря, что можно сказать о пределе $\lim_{h \rightarrow +0} A_2(h)/h$? В [2] также отмечена важность для приложений нахождения значения $A_2(1/4)$ или хотя бы возможно лучшей оценки снизу этой величины.

Ответить на поставленные вопросы помогает изучение одной родственной экстремальной задачи. Обозначим $e(x) = \exp(2\pi i x)$. *Преобразованием Фурье* интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции f назовем [3, с. 8]

$$\hat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e(-ux) dx.$$

ЗАДАЧА 3. Пусть $h \geq 0$. В классе функций $f \in K_3(h)$, обладающих свойствами

- 1) $f(x) = f(-x)$,
- 2) $f \in C[-h, h]$,
- 3) $f(x) = 0$ для $|x| \geq h$,
- 4) $\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(u)| du = 1$,

требуется оценить величину $\hat{f}(0) = \int_{-h}^h f(x) dx$.

Положим

$$A_3(h) = \sup_{f \in K_3(h)} \int_{-h}^h f(x) dx, \quad L = A_3(1).$$

Ясно, что $A_3(h) = Lh$.

Здесь доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. $\lim_{h \rightarrow +0} A_2(h)/h = L$.

ТЕОРЕМА 2. $A_2(1/4) = 2/(\pi + 4)$.

ТЕОРЕМА 3. $L > 1.16$.

ТЕОРЕМА 4. *Выполнено неравенство*

$$L \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = 1.179 \dots$$

Теоремы 2 и 3 показывают, что задачи 1 и 2 принципиально отличаются друг от друга.

Подчеркнем, что вопрос о точном значении постоянной L остается открытым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. При доказательстве теоремы рассматривается произвольная функция $f = f_h$, удовлетворяющая условиям 2) и 3) задачи 3. Отметим, что при $h \leq 1/2$ значение ее преобразования Фурье в целых точках $\hat{f}(n)$ можно рассматривать как коэффициенты Фурье 1-периодизации функции f , продолженной с отрезка $[-1/2, 1/2]$; при этом если

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx)$$

на $[-1/2, 1/2]$, то $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n) = a_n/2$ при $n > 0$ и, значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|.$$

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется

ЛЕММА. Равномерно по $h \in (0, 1/4]$, $v \in [-1/2, 1/2]$ и $f = f_h$ имеет место оценка

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n+v)| = (1 + O(h)) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|. \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Соотношение (1), в частности, означает, что правая и левая части его одновременно конечны или равны $+\infty$.

Теорема 1 немедленно вытекает из леммы, поскольку

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(u)| du = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n+v)| dv.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Мы проведем доказательство в случае, когда левая часть (1) конечна. Конечность левой части (1) может быть выведена из конечности правой части аналогичными рассуждениями.

Рассмотрим 1-периодическую функцию g такую, что $g(x) = 1 - e(-vx)$ при $x \in [-h, h]$, $g(x) = g(2h - x)$ при $x \in [h, 2h]$, $g(x) = g(-2h - x)$ при $x \in [-2h, -h]$, $g(x) = 0$ при $x \in [2h, 1 - 2h]$. Мы имеем

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n+v)| - \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n) - \widehat{f}(n+v)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{fg}(n)|. \quad (2)$$

Далее, имеет место неравенство

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{fg}(n)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(n)| \quad (3)$$

(см. [4, с. 14]). Для оценки правой части (3) заметим, что

$$|\widehat{g}(n)| \leq \int_{-2h}^{2h} |g(x)| dx \ll h^2$$

при любом n и

$$|\widehat{g}(n)| \ll \text{Var} \Big|_{-2h-0}^{2h+0} \frac{g'(x)}{n^2} \ll \frac{1}{n^2}$$

при $n \neq 0$. Значит,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(n)| \ll \sum_{n \in \mathbb{Z}} \min \left(h^2, \frac{1}{n^2} \right) \ll h. \quad (4)$$

Соотношение (1) вытекает из (2)–(4). Лемма, а тем самым и теорема 1, доказаны.

Доказательства теорем 2 и 3 будут основываться на свойствах функции

$$F_h(x) = \begin{cases} \pi \cos \frac{\pi x}{2h}, & |x| \leq h, \\ 0, & |x| > h. \end{cases}$$

$\hat{F}_h$ легко вычисляется [5, с. 357]:

$$\hat{F}_h(y) = \frac{4h \cos(2\pi h y)}{1 - 16y^2 h^2}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Разложим функцию $F_{1/4}$ в ряд Фурье:

$$F_{1/4}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) = \hat{F}_{1/4}(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}_{1/4}(n) \cos(2\pi n x). \quad (6)$$

Ввиду (5) и (6) находим $a_0 = 1$, $a_1 = \pi/2$, а при $n \geq 2$

$$|a_n| = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \frac{2}{n^2 - 1}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Посчитаем

$$S(F_{1/4}) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = 1 + \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k)^2 - 1}.$$

Поскольку [6, с. 685]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi a}{2a}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad (7)$$

то $S(F_{1/4}) = (4 + \pi)/2$. Пусть $f(x) = (F_{1/4})/S(F_{1/4})$. Так как $f \in K_2(1/4)$, то

$$A_2\left(\frac{1}{4}\right) \geq \int_{-1/4}^{1/4} f(x) dx = \frac{\hat{F}_{1/4}(0)}{S(F_{1/4})} = \frac{2}{\pi + 4}. \quad (8)$$

Оценим теперь $A_2(1/4)$ сверху. Для произвольной функции $f \in K_2(1/4)$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= f(1/4) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_{2k}, \\ 0 &= \int_{1/4}^{1/2} f(x) dx = \frac{a_0}{4} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$|a_0| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{2k}|, \quad |a_0| \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_{2k}|}{2k+1} \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{2k+1}|.$$

Складывая эти неравенства и добавляя $|a_0|$ к обеим частям, получаем

$$|a_0| \left(2 + \frac{\pi}{2} \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = 1,$$

откуда

$$|a_0| \leq \frac{2}{\pi + 4}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) получаем утверждение теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Для доказательства теоремы 3 достаточно найти функцию $f \in K_3(1)$, для которой выполняется неравенство

$$\int_{-1}^1 f(x) dx > 1.16. \quad (10)$$

Проверим, что такой функцией является

$$f(x) = \frac{F_1(x)}{J}, \quad \text{где } J = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{F}_1(y)| dy.$$

Условия 1)–4) задачи 3 для этой функции очевидным образом выполняются. Оценим сверху интеграл J . Для любой функции $p \in L(\mathbb{R})$ имеем очевидное равенство

$$\int_{\mathbb{R}} |p(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} p(x) dx - 2 \int_P p(x) dx,$$

где

$$P = \{x \mid p(x) < 0\}.$$

Ввиду сказанного находим

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{F}_1(y)| dy = \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}_1(y) dy - 2 \int_P \widehat{F}_1(y) dy,$$

где

$$P = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4} \right).$$

Поскольку функция F_1 четная и $\int_{\mathbb{R}} \widehat{F}_1(y) dy = F_1(0)$, то

$$J = \pi + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} J_n,$$

где

$$J_n = \int_{n-1/4}^{n+1/4} \frac{\cos(2\pi y)}{y^2 - 1/16} dy.$$

Используя четность функции $\cos(2\pi(n+u)) = \cos(2\pi u)$ и равенство

$$\int_{-1/4}^{1/4} \cos(2\pi u) du = \frac{1}{\pi},$$

получаем, что

$$J_n = \frac{1}{\pi(n^2 - 1/16)} + I_n,$$

где

$$I_n = \int_0^{1/4} (\Omega(n+u) + \Omega(n-u) - 2\Omega(n)) \cos(2\pi u) du, \quad \Omega(y) = \left(y^2 - \frac{1}{16}\right)^{-1}.$$

Таким образом,

$$J = \pi + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1/16} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} I_n. \quad (11)$$

Для оценки интеграла I_n воспользуемся известной теоремой о промежуточном значении. Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $g \in C[b-a, b+a] \cap D^2(b-a, b+a)$ то существует точка $\xi \in (b-a, b+a)$ такая, что

$$g(b-a) + g(b+a) - 2g(b) = a^2 g''(\xi).$$

Поэтому

$$|I_n| \leq \max_{|y-n| \leq 1/4} |\Omega''(y)| \cdot \int_0^{1/4} u^2 \cos(2\pi u) du. \quad (12)$$

С помощью непосредственных вычислений находим

$$\begin{aligned} \int_0^{1/4} u^2 \cos(2\pi u) du &= \frac{1}{32\pi} \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) < \frac{1}{500}, \\ \Omega''(y) &= \frac{6}{(y^2 - 1/16)^2} + \frac{1}{2(y^2 - 1/16)^3}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (11)–(13) и (7) находим

$$J = \pi + \frac{4}{\pi} - 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} I_n < 3.415 + 10^{-3} \sigma,$$

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{((n-1/4)^2 - 1/16)^2} + \frac{1}{2((n-1/4)^2 - 1/16)^3} \right) < 30,$$

и $J < 3.445$. Используя эту оценку, получаем

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{\int_{-1}^1 F_1(x) dx}{J} > \frac{4}{3.445} > 1.16.$$

Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Через E обозначим множество всех функций, имеющих ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, которые на интервале $(-1, 1)$ тождественно равны x . Для любых $f \in K_3(1)$ и $\mu \in E$ справедливы очевидные равенства

$$\hat{f}(0) = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \tilde{\mu}(u) du.$$

Здесь $\tilde{\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}} e(-ux) d\mu x$. Поэтому

$$A_3(1) \leq \inf_{\mu \in E} \|\tilde{\mu}\|,$$

где $\|\tilde{\mu}\| = \sup_{u \in \mathbb{R}} |\tilde{\mu}(u)|$. Пусть

$$k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Ввиду сказанного для доказательства теоремы 4 достаточно лишь отыскать функцию $\mu \in E$, для которой

$$\|\tilde{\mu}\| = 2k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt. \quad (14)$$

Положим

$$\varphi(t) = \frac{\sin t}{t} - k, \quad |t| \leq \pi,$$

и продолжим функцию φ на $\mathbb{R}$ как 2π -периодическую. Ввиду того, что φ четная, $\int_0^{\pi} \varphi(t) dt = 0$, φ непрерывна на $\mathbb{R}$, а ее производная имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ ограниченную вариацию, φ разлагается в ряд Фурье вида

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nt, \quad b_n = O(n^{-2}).$$

Теперь построим μ . Положим $\mu(x) = x$, $x \in [0, 1)$, и при каждом $n \in \mathbb{N}$ μ постоянна на полуинтервале $[n, n + 1)$, а в точке n имеет скачок, равный $-b_n$. Наконец, $\mu(-x) = \mu(x)$. Очевидно, что $\mu \in E$ и

$$\tilde{\mu}(u) = 2 \left(\frac{\sin 2\pi u}{2\pi u} - \varphi(2\pi u) \right).$$

Функция $\tilde{\mu}$ является четной, и при $u \in [0, 1/2]$ имеем $\tilde{\mu}(u) = k$. Таким образом, для того, чтобы проверить справедливость соотношения (14), осталось установить неравенство

$$\left| \frac{\sin t}{t} - \varphi(t) \right| \leq k \quad \forall t > \pi. \quad (15)$$

Обозначим для краткости

$$\Phi(t) = \frac{\sin t}{t}, \quad R(t) = \Phi(t) - \varphi(t).$$

Если $t = 2\pi m + \tau$, $\tau \in [0, \pi]$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$R(t) = k + (\Phi(2\pi m + \tau) - \Phi(\tau)).$$

Отсюда немедленно вытекает, что при $t \in [2\pi m, 2\pi m + \pi]$, $m \in \mathbb{N}$

$$k - 1 \leq R(t) \leq k.$$

Следовательно, для указанных значений t неравенство (15) выполнено.

Пусть теперь $t = 2\pi m - \tau$, $m \in \mathbb{N}$, $\tau \in (0, \pi)$. Имеем

$$R(t) = k + \Phi(2\pi m - \tau) - \Phi(\tau).$$

Оценка сверху $R(t) \leq k$ снова очевидна. В доказательстве нуждается лишь неравенство $R(t) \geq -k$, т.е.

$$\frac{\sin \tau}{\tau} - \frac{\sin(2\pi m - \tau)}{2\pi m - \tau} \leq 2k. \quad (16)$$

Если $m \geq 2$, то левая часть в неравенстве (16) не превосходит $1 + \frac{1}{3\pi} < 1.12$, в то время как $2k \geq 1.17$. Осталось рассмотреть случай $m = 1$, т.е. доказать, что

$$\psi(\tau) = \frac{\sin \tau}{\tau(1 - \tau/(2\pi))} \leq 1.17 \quad \forall \tau \in (0, \pi). \quad (17)$$

Функция $\sin \tau/\tau$ убывает на $(0, \pi)$, а $(1 - \tau/(2\pi))^{-1}$ возрастает. Поэтому имеем серию очевидных неравенств

$$\begin{aligned}\max_{\tau \in [2\pi/3, \pi]} \psi(\tau) &\leq 2 \frac{\sin(2\pi/3)}{2\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} < 1, \\ \max_{\tau \in [\pi/2, 2\pi/3]} \psi(\tau) &\leq \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{3}{\pi} < 1, \\ \max_{\tau \in [\pi/3, \pi/2]} \psi(\tau) &\leq \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin(\pi/3)}{\pi/3} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} < 1.15, \\ \max_{\tau \in [\pi/4, \pi/3]} \psi(\tau) &\leq \frac{6}{5} \cdot \frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} = \frac{12\sqrt{2}}{5\pi} < \frac{17}{5\pi} < 1.1, \\ \max_{\tau \in [0, \pi/4]} \psi(\tau) &\leq \frac{8}{7} < 1.15.\end{aligned}$$

Из этих неравенств получаем (17). Тем самым, соотношение (14) полностью доказано, а это, как отмечалось выше, доказывает теорему 4.

Авторы выражают благодарность С.Б. Стечкину за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
E-mail: andreev@nw.math.msu.su
kon@sci.math.msu.su

Поступило
03.11.95
Исправленный вариант
20.04.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Стечкин С.Б. Одна экстремальная задача для тригонометрических рядов с неотрицательными коэффициентами // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1972. V. 23. № 3, 4. P. 289–291.
- [2] Конягин С.В. О распределении дробных долей членов некоторых геометрических прогрессий // II Международная конференция "Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел". Тезисы докл. Воронеж: ВГУ, 1995. С. 89.
- [3] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [4] Кахан Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М.: Мир, 1976.
- [5] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [6] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.