Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Бабенко, Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 333–355

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1834>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:53:41

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА–СТЕЧКИНА В ПРОСТРАНСТВЕ L^2 ФУНКЦИЙ НА МНОГОМЕРНОЙ СФЕРЕ

А. Г. Бабенко

Данная работа посвящена изучению наименьшей константы в неравенстве Джексона–Стечкина для наилучших приближений функций в пространстве $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ на единичной сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ вещественного евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ размерности $m \geq 2$ сужениями на сферу алгебраических многочленов (точнее, сферическими полиномами).

Фундаментальным в этой тематике является результат Д. Джексона для наилучших равномерных приближений непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами. К настоящему времени эта тематика получила большое развитие. Опишем некоторые из известных результатов, имеющих непосредственное отношение к интересам автора.

Обозначим через $C = C_{2\pi}$ пространство вещественных непрерывных 2π -периодических функций f одной вещественной переменной с равномерной нормой $\|f\|_C = \max\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. Наилучшим равномерным приближением функции $f \in C$ тригонометрическими полиномами t_{n-1} степени не выше $n-1$ называется величина

$$E_{n-1}(f)_C = \min_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C,$$

а ее равномерным модулем непрерывности порядка $r = 1, 2, \dots$ называется функция

$$\omega_r(f, h)_C = \sup_{|t| \leq h} \left\| \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} f(x + kt) \right\|_C$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Российской Федерации по высшему образованию, грант № 2-16-5-31, и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-196.

переменного $h \geq 0$. Зафиксируем числа $\tau > 0$, $r \in \mathbb{N}$. Хорошо известно следующее неравенство [1]–[3]:

$$E_{n-1}(f)_C \leq \mathcal{K} \omega_r \left(f, \frac{\tau}{n} \right)_C, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f \in C, \quad (0.1)$$

с константой $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\tau, r) < \infty$, зависящей только от τ и r . Этот результат означает, что величина

$$\mathcal{K}_n(\tau, r)_C = \sup \left\{ \frac{E_{n-1}(f)_C}{\omega_r(f, \tau/n)_C} : f \in C, f \neq \text{const} \right\}, \quad (0.2)$$

являющаяся наименьшей константой $\mathcal{K}$ в неравенстве (0.1) (при фиксированных τ, r, n), равномерно ограничена по n , т.е. конечна величина

$$\mathcal{K}(\tau, r)_C = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_n(\tau, r)_C. \quad (0.3)$$

Д. Джексон [1] в 1911 г. впервые установил неравенство (0.1) при $r = 1$, т.е. оценил наилучшее равномерное приближение $E_{n-1}(f)_C$ непрерывной 2π -периодической функции f тригонометрическими полиномами степени не выше $n - 1$ через ее модуль непрерывности $\omega(f, \tau)_C = \omega_1(f, \tau)_C$ (первого порядка). С.Б. Стечкин [3] получил неравенство (0.1) при $r \geq 2$; при $r = 2$ этот результат был ранее опубликован Н.И. Ахиезером [2, с. 217, с. 190]. Неравенство (0.1) при $r = 1$ называют *неравенством Джексона*, а в общем случае – *неравенством Джексона–Стечкина*.

Указанный результат был перенесен на пространства $L^p = L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < \infty$, измеримых 2π -периодических функций с обычной нормой (см. [4, гл. 5]). Усилиями многих математиков неравенства типа Джексона–Стечкина были распространены на пространства функций многих переменных, заданных как на классических многообразиях (сфера, тор, пространство, гиперboloид и т.д.), так и на многообразиях довольно общей природы.

Наряду с качественной картиной в этой области большой интерес (в частности, для вычислительных целей) представляют точные результаты. Первое точное неравенство Джексона (в пространстве $C = C_{2\pi}$) установил Н.П. Корнейчук [5] (1962 г.), а первое точное неравенство Джексона–Стечкина (в пространстве $L^2 = L^2_{2\pi}$) получил Н.И. Черных [6], [7] (1967 г.). Подробнее, Н.П. Корнейчук решил задачу (0.3) при $\tau = \pi$, $r = 1$, доказав равенство $\mathcal{K}(\pi, 1)_C = 1$. Позднее он обобщил этот результат в [8] (1982 г.), показав, что $\mathcal{K}(\pi/m, 1)_C = (m + 1)/2$, $m \in \mathbb{N}$. По аналогии с (0.2) можно дать определение величины $\mathcal{K}_n(\tau, r)_{L^p}$, являющейся наименьшей константой в соответствующем неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^p = L^p_{2\pi}$, $1 \leq p < \infty$. Сейчас наиболее

полно изучен случай $p = 2$. Первые точные результаты в этом случае принадлежат Н. И. Черных [6], [7], который доказал, что

$$\mathcal{K}_n(\tau, r)_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{\binom{2r}{r}}} = \frac{\Gamma(r+1)}{\sqrt{\Gamma(2r+1)}} \quad \text{при } n, r \in \mathbb{N}, \quad n > r, \quad \tau \geq 2\pi. \quad (0.4)$$

А в случае $r = 1$ им [6], [9] была найдена наименьшая точка $\tau^* = \pi$, начиная с которой величина $\mathcal{K}_n(\tau, 1)_{L^2}$ как функция аргумента τ выходит на свой глобальный минимум равный $1/\sqrt{2}$. Точное неравенство Джексона в пространстве L^p при $1 \leq p < 2$ было также установлено Н. И. Черных [10]. В этом случае $\mathcal{K}_n(\tau, 1)_{L^p}$ равна $2^{(1-p)/p}$ при $\tau \geq \theta\pi$, где $\theta = (1/2 - 2/\pi^2)^{-1/2} \approx 1.834$. Как отмечается в работе [10], оценка снизу $\mathcal{K}_n(\tau, 1)_{L^p} \geq 2^{|1/p - 1/2| - 1/2}$, $1 \leq p < \infty$, $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$, была получена ранее В. И. Бердышевым.

Для периодических функций одного вещественного переменного есть еще несколько точных результатов в прямых теоремах теории приближения в терминах модуля непрерывности заданного порядка самой функции. В. В. Жук, В. В. Шалаев получили (см. [11, с. 322, с. 352]) соответственно оценки сверху и снизу для величины (0.2) при $r = 2$, $\tau = \pi/2$, с помощью которых вычисляется величина (0.3) в этом случае, а именно, $\mathcal{K}(\pi/2, 2)_C = 1$. В работах автора [12], [13] найдены значения величины $\mathcal{K}_n(\pi/m, 1)_{L^2}$ для натуральных $m \geq 1 + 3n/2$ при $n \geq 1$ и для натуральных $m \geq 3n/4$ при $n \geq 10$. В работе М. Ж. Шакеновой [14] утверждается, что равенство (0.4) остается верным и в случае вещественного $r > 0$, $\tau = 2\pi$.

Пространства $C_{2\pi}$ и $L^p_{2\pi}$ можно интерпретировать соответственно как пространства $C(\mathbb{S}^1)$, $L^p(\mathbb{S}^1)$ функций, заданных на единичной окружности $\mathbb{S}^1$ евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Одним из естественных обобщений указанных пространств являются пространства $C(\mathbb{S}^{m-1})$, $L^p(\mathbb{S}^{m-1})$ функций, заданных на единичной сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ размерности $m \geq 3$ с центром в нуле.

В 1914 г. Т. Гроуолл [15] получил неравенство Джексона

$$E_n(f)_{C(\mathbb{S}^2)} < (1 + 3\pi/2)\omega(f, 1/n)_{C(\mathbb{S}^2)}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

между наилучшим равномерным приближением функции $f \in C(\mathbb{S}^2)$, $f \not\equiv \text{const}$, сферическими полиномами степени не выше n и ее равномерным модулем непрерывности первого порядка

$$\omega(f, h)_{C(\mathbb{S}^2)} = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in \mathbb{S}^2, x \cdot y = \cos t, 0 < t \leq h\},$$

$h \in (0, \pi]$, при условии, что функция $h^{-1}\omega(f, h)_{C(\mathbb{S}^2)}$ не возрастает по h ; здесь $x \cdot y$ есть скалярное произведение векторов x, y . В силу известного

свойства (см. [16, с. 198] и [3, лемма 5]) $2h^{-1}\omega(f, h)_{C(\mathbb{S}^2)} \geq \eta^{-1}\omega(f, \eta)_{C(\mathbb{S}^2)}$, $0 < h < \eta$, модуля непрерывности произвольной функции $f \in C(\mathbb{S}^2)$ доказательство Т. Гронуола [15, § 3] позволяет получить неравенство Джексона

$$E_n(f)_{C(\mathbb{S}^2)} < (1 + 3\pi/\tau)\omega(f, \tau/n)_{C(\mathbb{S}^2)}, \quad 0 < \tau/n < \pi, \quad n = 2, 3, \dots,$$

уже для любой функции $f \in C(\mathbb{S}^2)$, $f \not\equiv \text{const}$.

Дальнейшие исторические сведения, касающиеся неравенств Джексона–Стечкина для функций из $C(\mathbb{S}^{m-1})$, $L^p(\mathbb{S}^{m-1})$, $m \geq 3$ с применением модулей непрерывности порядка $r \geq 1$, основанных на r -й разности функции вдоль геодезической, можно найти в работах [17], [18].

Наряду с указанными выше модулями непрерывности многие математики используют другие модули непрерывности, основанные на операторе s_t сдвига, представляющем собой усреднение функции $f(x)$ по границе сферической шапки углового радиуса t с полюсом в точке x (см., например, [19, формулы (1.1), (1.19)], а также пункт 1 ниже, формула (1.2)). Этот оператор сдвига применялся учеными в прошлом веке в вопросах о сходимости ряда Фурье–Лапласа функций, заданных на $\mathbb{S}^2$ (см., например, [20, с. 178 и приведенные там ссылки]). Такой модуль непрерывности для функций f из $C(\mathbb{S}^2)$ в прямых и обратных теоремах теории приближения впервые использовался Г. Г. Кушниренко в работах [21], [22]. История дальнейшего развития этого вопроса содержится в работе [23].

Из работ Д. Ньюмена и Г. Шапиро, Д. Рагозина, В. М. Федорова (см. [17] и приведенную там библиографию), относящихся к прямой теореме теории приближения функций на многомерной сфере $\mathbb{S}^m$ видно, каким образом влияет размерность сферы на указанную теорему. Естественно, что в работы, содержащие соответствующие точные результаты, дают дополнительную информацию о влиянии размерности.

Перечислим несколько точных результатов, относящихся к неравенствам Джексона–Стечкина для функций многих переменных. В 1981 г. В. А. Юдин [24] нашел точную константу в неравенстве Джексона для функций из $L^2(\mathbb{T}^m)$, заданных на торе $\mathbb{T}^m$, $m \geq 2$. Аналогичная задача в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$, $m = 2, 3$, была решена В. Ю. Поповым [25, теорема 3]. В пространстве $C(\mathbb{S}^m)$, $m \geq 2$ для наилучших приближений линейными методами В. В. Шалаев [26] получил точный результат в соответствующей прямой теореме теории приближения. В. В. Арестов и В. Ю. Попов [27] указали точное значение наименьшей константы в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{S}^m)$, $m = 2, 3$. В случае пространств $L^2(M)$, $M = \mathbb{R}^m, \mathbb{T}^m, \mathbb{S}^m$, $m \geq 2$, В. Ю. Попов [25], [28], [29] нашел точную константу в неравенстве Джексона–Стечкина при “малых” значениях аргумента модуля непрерывности.

В настоящей статье получено точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$, $m \geq 5$. Оценка снизу для точной константы в указанном неравенстве установлена В. В. Арестовым и публикуется здесь с доказательством с его разрешения.

Кроме того, в данной работе локализована точка Черныха в этом неравенстве (см. следствие 2.1 ниже), т.е. найдены оценки снизу и сверху (отличающиеся друг от друга в два раза) для наименьшей точки $\tau^* = \tau^*(n, r, m)$, начиная с которой точная константа $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\tau, n, r, m)$ в неравенстве Джексона–Стечкина (см. (1.4), (1.5) ниже) при $r \geq 1$ как функция аргумента τ выходит на свой минимум (на множестве Θ_r), равный единице; здесь $\Theta_1 = (0, \pi]$, $\Theta_r = (0, \pi)$ при $r > 1$. Важность задачи о точке Черныха в неравенстве Джексона–Стечкина состоит, в частности, в том, что она позволяет получить меньшую погрешность при оценке сверху константы в этом неравенстве методом оценки модуля непрерывности в большей точке через значение модуля непрерывности в меньшей точке (см. [8]).

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^k$ есть k -мерное ($k \geq 1$) вещественное евклидово пространство со скалярным произведением $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ и расстоянием $|x - y| = \sqrt{(x - y) \cdot (x - y)}$, определенными для точек $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k)$ из $\mathbb{R}^k$. Обозначим через $\mathbb{S}^{k-1} = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| = 1\}$ единичную сферу пространства $\mathbb{R}^k$ с центром в нуле, а через $|\mathbb{S}^{k-1}| = 2\pi^{k/2}/\Gamma(k/2)$ – ее площадь, в частности, $|\mathbb{S}^0| = 2$.

На протяжении всей работы будем считать, что m есть натуральное число не меньше 2, $L^2 = L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ – пространство комплексных функций, заданных на $\mathbb{S}^{m-1}$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} f(\xi) \bar{g}(\xi) d\xi \quad (1.1)$$

и нормой $\|f\| = (f, f)^{1/2}$. Многочленом степени не выше n называется функция

$$p(x) = \sum c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_m \leq n,$$

с комплексными коэффициентами $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_m$ – целые неотрицательные числа). Множество сужений таких многочленов на $\mathbb{S}^{m-1}$ обозначим через $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{n, m}$. Наилучшим приближением функции $f \in L^2$ пространством $\mathbf{P}_n$ называют расстояние от f до $\mathbf{P}_n$, т.е.

$$E_n(f) = \min \{ \|f - p\| : p \in \mathbf{P}_n \}.$$

Сдвигом с шагом $t \in \mathbb{R}$ называется (см., например, [19, формулы (1.1), (1.19)]) оператор s_t , действующий из L^2 в L^2 по правилу

$$s_t f(x) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int_{\mathbb{S}^{m-2}} f(x \cos t + \xi \sin t) d\xi; \quad (1.2)$$

здесь $x \in \mathbb{S}^{m-1}$ и интеграл берется по сфере $\mathbb{S}^{m-2} = \mathbb{S}_x^{m-2} = \{\xi \in \mathbb{S}^{m-1} : x \cdot \xi = 0\}$. В частности, при $m = 2$ имеем $s_t f(e^{iu}) = \frac{1}{2}\{F(u+t) + F(u-t)\}$, $F(u) = f(e^{iu})$, $0 \leq u \leq 2\pi$.

Пусть I есть тождественный оператор, r – положительное число, $\psi_r(u) = (1-u)^{r/2}$. Следуя Х.П. Рустамову [23], оператор

$$\Delta_t^r = (I - s_t)^{r/2} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \psi_r^{(k)}(0) s_t^k \quad (1.3)$$

будем называть *разностным оператором порядка r* , а *модулем непрерывности порядка r функции $f \in L^2$* назовем следующую функцию переменного $\tau > 0$:

$$\omega_r(f, \tau) = \sup\{\|\Delta_t^r f\| : 0 < t \leq \tau\}.$$

Отметим, что в случае обычного сдвига разностный оператор дробного порядка был введен и изучался в 1867–1868 г. А.К. Грюнвальдом и А.В. Летниковым (см. [30, § 20]).

В данной работе изучается вопрос о точной константе $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\tau, n, r, m)$, $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$, $m = 2, 3, \dots$, в неравенстве Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq \mathcal{K} \omega_r(f, \tau), \quad f \in L^2, \quad (1.4)$$

т.е. величина

$$\mathcal{K}(\tau, n, r, m) = \sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)}{\omega_r(f, \tau)} : f \in L^2, f \neq \text{const}\right\}. \quad (1.5)$$

Сферической гармоникой порядка k называют сужение на сферу $\mathbb{S}^{m-1}$ однородного гармонического многочлена степени k

$$q(x) = \sum c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}, \quad \sum_{l=1}^m \alpha_l = k, \quad \alpha_l \in \mathbb{Z}_+, \quad \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 q}{\partial x_l^2} \equiv 0.$$

Множество всех гармоник порядка k обозначим символом H_k . Известно (см. [31, гл. 4]), что при $k \neq l$ пространства H_k, H_l ортогональны в смысле скалярного произведения (1.1), кроме того, пространство $\mathbf{P}_n$ совпадает с ортогональной прямой суммой $\bigoplus_{k=0}^n H_k$. Справедливо также разложение

пространства L^2 в ортогональную прямую сумму $L^2 = \bigoplus_{k \geq 0} H_k$ и оператор ортогонального проектирования $Y_k: L^2 \rightarrow H_k$ имеет вид (см. [32, с. 206], [31, гл. 4, § 2])

$$Y_k f(x) = \frac{(k + \lambda)\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} C_k^\lambda(x \cdot \xi) f(\xi) d\xi, \quad m \geq 3,$$

где $\lambda = (m - 2)/2$, $C_0^\lambda(u) \equiv 1$, $C_k^\lambda(u)$, $k = 1, 2, \dots$, — многочлены Гегенбауэра, нормированные условием

$$C_k^\lambda(1) = \binom{k + 2\lambda - 1}{k} = \frac{(2\lambda + k - 1)(2\lambda + k - 2) \cdots (2\lambda)}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$Y_k f(x) = \frac{k}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} C_k^0(x \cdot \xi) f(\xi) d\xi, \quad m = 2,$$

где $C_0^0(u) \equiv 1$, $C_k^0(\cos t) = \frac{2}{k} \cos kt$, $k = 1, 2, \dots$. Многочлены $C_k^\lambda(u)$, $\lambda \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$, образуют ортогональную систему на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1 - u^2)^{\lambda-1/2}$.

Каждая функция $f \in L^2$ единственным образом разлагается в ряд Фурье–Лапласа, сходящийся к ней в L^2 :

$$f = \sum_{k \geq 0} Y_k f.$$

Частичная сумма этого ряда $S_{n-1} f = \sum_{k=0}^{n-1} Y_k f$ является ближайшим элементом в $\mathbf{P}_{n-1}$ для f в метрике пространства L^2 , т.е.

$$E_{n-1}^2(f) = \|f - S_{n-1} f\|^2 = \sum_{k \geq n} \|Y_k f\|^2. \quad (1.6)$$

Известны следующие свойства сдвига s_t , разностного оператора Δ_t^r и модуля непрерывности $\omega_r(f, \tau)$, $r > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, которые выполняются для любой функции f из $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$, $m \geq 2$:

$$Y_k s_t f = R_k(t) Y_k f, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$Y_k \Delta_t^r f = \{1 - R_k(t)\}^{r/2} Y_k f, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.7)$$

$$\|\Delta_t^r f\|^2 = \sum_{k \geq 1} \{1 - R_k(t)\}^r \|Y_k f\|^2, \quad (1.8)$$

$$\|\Delta_{lt}^r f\| \leq l^r \|\Delta_t^r f\|, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (1.9)$$

$$\omega_r(f, \tau) \leq 2^{(r-\alpha)/2} \omega_\alpha(f, \tau), \quad 0 < \alpha < r, \quad (1.10)$$

где

$$R_k(t) = R_{k,\lambda}(t) = \frac{C_k^\lambda(\cos t)}{C_k^\lambda(1)}, \quad \lambda = (m-2)/2, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.11)$$

Свойство (1.9) при $r = 2$ доказал В. А. Иванов [33], в общем случае оно доказывается так же; остальные свойства можно найти в работе Х. П. Рустамова [23]. Полиномы (1.11) образуют ортогональную систему на отрезке $[0, \pi]$ с весом $\sin^{2\lambda} t$:

$$\int_0^\pi R_k(t) R_l(t) \sin^{2\lambda} t \, dt = 0, \quad k \neq l, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.12)$$

Кроме того, они удовлетворяют соотношениям

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |R_k(t)| = R_k(0) = (-1)^k R_k(\pi) = 1, \quad k = 0, 1, \dots$$

Соотношения (1.6), (1.8) позволяют свести многомерную задачу (1.5) о точной константе $\mathcal{K}(\tau, n, r, m)$ в неравенстве Джексона–Стечкина (1.4) к одномерной задаче для полиномов (1.11). А именно, квадрат этой константы совпадает с наименьшей константой $K = K(\tau, n, r, \lambda)$, $\lambda = (m-2)/2$, в неравенстве

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq n} \rho_k &\leq K \sup_{0 < t \leq \tau} \sum_{k \geq 1} \{1 - R_k(t)\}^r \rho_k, \\ \sum_{k \geq 1} \rho_k &< \infty, \quad \rho_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} K(\tau, n, r, \lambda) = \sup \left\{ \sum_{k \geq n} \rho_k / \sup_{0 < t \leq \tau} \sum_{k \geq 1} \{1 - R_k(t)\}^r \rho_k : \right. \\ \left. 0 < \sum_{k \geq 1} \rho_k < \infty, \rho_k \geq 0, k = 1, 2, \dots \right\}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

причем для константы (1.5) справедливо равенство

$$\mathcal{K}^2(\tau, n, r, m) = K(\tau, n, r, \lambda), \quad \lambda = (m-2)/2, \quad (1.15)$$

при $\tau > 0$, $n = 1, 2, \dots$, $r > 0$, $m = 2, 3, \dots$.

К задаче (1.14) также сводится (как видно из работ [34], [35]) вопрос о точном неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве L_λ^2 вещественных четных 2π -периодических функций со скалярным произведением

$$(F, G)_\lambda = \int_0^\pi F(x) G(x) \sin^{2\lambda} x \, dx, \quad \lambda \geq 0, \quad (1.16)$$

и нормой $\|F\|_\lambda = (F, F)_\lambda^{1/2}$. Как уже отмечалось выше (см. (1.12)), система (1.11) косинус-полиномов Гегенбауэра является ортогональной в смысле скалярного произведения (1.16). Каждая функция F из L_λ^2 разлагается в ряд Фурье по этим полиномам:

$$F(x) = \sum_{k \geq 0} a_k R_k(x), \quad a_k = (F, R_k)_\lambda \|R_k\|_\lambda^{-2},$$

а частичная сумма этого ряда $S_{n-1}F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k R_k(x)$ является ближайшей к F (в смысле нормы $\|\cdot\|_\lambda$) косинус-полиномом порядка $\leq n-1$. Иными словами, минимум

$$E_{n-1}(F)_\lambda = \min \left\{ \|F - P\|_\lambda : P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k R_k(x), c_0, \dots, c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

реализует полином $P = S_{n-1}F$:

$$E_{n-1}^2(F)_\lambda = \|F - S_{n-1}F\|_\lambda^2 = \sum_{k \geq n} \|a_k R_k\|_\lambda^2. \quad (1.17)$$

Для функций $F(x) = f(\cos x)$ из L_λ^2 , $\lambda \geq 0$, определим понятие *ультрасферического сдвига с шагом* $t \in \mathbb{R}$ (см. [34]–[36]), т.е. введем оператор $T_t = T_{t,\lambda}$, действующий из L_λ^2 в L_λ^2 следующим образом:

$$T_t F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \{F(x+t) + F(x-t)\}, & \lambda = 0, \\ \mu(\lambda) \int_0^\pi f(\cos x \cos t + \sin x \sin t \cos \varphi) \sin^{2\lambda-1} \varphi d\varphi, & \lambda > 0, \end{cases}$$

$$\mu(\lambda) = 1 / \int_0^\pi \sin^{2\lambda-1} \varphi d\varphi. \quad (1.18)$$

В 1817 г., а возможно еще раньше, А.М. Лежандр [37, с. 262, формула (x)], при $\lambda = 1/2$, а затем в 1874 г. Л. Гегенбауэр (см. [38, с. 402]) при $\lambda > 0$ установили важное свойство этой операции, именуемой формулой умножения:

$$T_t R_k(x) = R_k(t) R_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, \quad t, x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \geq 0. \quad (1.19)$$

Так же, как и выше (см. (1.3)), определим $\delta_t^r = \delta_{t,\lambda}^r$ – разностный оператор порядка $r > 0$ с шагом $t \in \mathbb{R}$, соответствующий сдвигу T_t , по формуле

$$\delta_t^r = (I - T_t)^{r/2} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \psi_r^{(k)}(0) T_t^k.$$

Модулем непрерывности порядка r функции F из L^2_λ назовем следующую функцию:

$$\omega_r(F, \tau)_\lambda = \sup_{0 < t \leq \tau} \|\delta_t^r F\|_\lambda, \quad \lambda \geq 0, \quad r > 0, \quad \tau > 0.$$

Из формулы умножения (1.19) вытекают свойства разностного оператора δ_t^r , аналогичные свойствам (1.7)–(1.10) оператора Δ_t^r . В частности, для каждой функции $F(x) = \sum_{k \geq 0} a_k R_k(x)$ из L^2_λ имеем

$$\|\delta_t^r F\|_\lambda^2 = \sum_{k \geq 1} \{1 - R_k(t)\}^r \|a_k R_k\|_\lambda^2, \quad \lambda \geq 0, \quad r > 0, \quad t > 0. \quad (1.20)$$

Отсюда и из (1.17) видно, что задача о точной константе $c = c(\tau, n, r, \lambda)$, $\tau > 0, r > 0, \lambda \geq 0, n = 1, 2, \dots$, в неравенстве Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(F)_\lambda \leq c \cdot \omega_r(F, \tau)_\lambda, \quad F \in L^2_\lambda, \quad (1.21)$$

сводится к задаче (1.14), причем

$$c^2(\tau, n, r, \lambda) = K(\tau, n, r, \lambda).$$

Следовательно (см. (1.15)),

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\tau, n, r, m) &= c\left(\tau, n, r, \frac{m-2}{2}\right), \\ \tau > 0, \quad r > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.22)$$

Это равенство означает, что в (1.5) верхнюю грань достаточно брать по зональным функциям $f \in L^2$, т.е. функциям $f(x) = F(x \cdot y)$, зависящим лишь от скалярного произведения переменной точки $x \in \mathbb{S}^{m-1}$ и фиксированной точки $y \in \mathbb{S}^{m-1}$ (см. [34], [32], [35]).

2. Основные результаты. Остановимся сначала на случае $L^2(\mathbb{S}^1)$. В этом случае $\lambda = 0$, $\mathbb{S}^1$ – обычная окружность. Функции f из $L^2(\mathbb{S}^1)$ можно отождествить с 2π -периодическими функциями $F(u) = f(e^{iu})$ из $L^2_{2\pi}$. Задача (1.4), (1.5) сводится к задаче о наименьшей константе $K = K(\tau, n, r, 0) = \mathcal{K}^2(\tau, n, r, 2)$ в неравенстве

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq n} \rho_k &\leq K \sup_{0 < t \leq \tau} \sum_{k \geq 1} \rho_k \{1 - \cos kt\}^r, \\ \sum_{k \geq 1} \rho_k &< \infty, \quad \rho_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Первые точные результаты в этой задаче получил Н. И. Черных [6], [7], [9], которые в терминах, принятых здесь, можно записать в следующем виде:

$$K(\tau, n, 1, 0) = 1, \quad \tau \geq \frac{\pi}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

$$K(\tau, n, 1, 0) > 1, \quad 0 < \tau < \frac{\pi}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

$$K(\tau, n, r, 0) = \frac{2^r}{\binom{2r}{r}} = \frac{2^r \{\Gamma(r+1)\}^2}{\Gamma(2r+1)}, \quad \tau \geq \frac{2\pi}{n}, \quad n > r, \quad (2.3)$$

$$r = 2, 3, \dots$$

В работах автора [12], [13] найдена $K(\pi/(ln), n, 1, 0)$ для натуральных $l \geq 1 + 3n/2$, $n = 1, 2, \dots$, а также для натуральных $l \in [3n/4, 3n/2]$, $n \geq 10$. В работе М. Ж. Шакиновой [14] содержится утверждение, равносильное тому, что равенство (2.3) остается верным и в случае вещественного $r > 0$, $\tau = 2\pi/n$.

Перейдем к многомерному случаю $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$, $m \geq 3$, $\lambda = (m-2)/2$. Минимальное положительное значение аргумента функции $R_n = R_{n,\lambda}$, при котором она достигает локального минимума и локального максимума, обозначим через $h_{n,\lambda}$ и $t_{n,\lambda}$ соответственно. Единственный корень уравнения $R_n(u) = R_n(t_{n,\lambda})$, $u \in (0, h_{n,\lambda})$ обозначим через $v_{n,\lambda}$. В. Ю. Попов [29] установил, что

$$K^2(\tau, n, r, m) = \{1 - R_n(\tau)\}^{-r}$$

при $m = 3, 4, \dots$, $r = 2, 4, \dots$, $n = 1, 2, \dots$, $0 < \tau \leq v_{n,\lambda}$, хотя его доказательство проходит и в случае вещественного $r > 0$. В совместной работе [27] В. В. Арестова и В. Ю. Попова был анонсирован следующий результат для случая $m = 3, 4$:

$$\mathcal{K}\left(\frac{2\pi}{n+1}, n, 2r, m\right) = 1, \quad r = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Для $\lambda \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$ обозначим через $\tau_{n,\lambda}$ первый положительный нуль косинус-полинома Гегенбауэра $C_n^\lambda(\cos \tau)$:

$$\tau_{n,\lambda} = \min\{\tau > 0 : C_n^\lambda(\cos \tau) = 0\}. \quad (2.5)$$

В настоящей статье доказана

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $n = 1, 2, \dots$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(А) при $\lambda \geq 0$ для каждой функции $F \in L^2_\lambda$, $F \neq \text{const}$, справедливы неравенства

$$E_{n-1}(F)_\lambda < \omega_r(F, 2\tau_{n,\lambda})_\lambda, \quad r \geq 1,$$

$$E_{n-1}(F)_\lambda < 2^{(1-r)/2} \omega_r(F, 2\tau_{n,\lambda})_\lambda, \quad 0 < r < 1;$$

(В) при $\lambda > 0$ для любого $\tau \in (0, \pi)$ существует последовательность функций F_k ($k = 1, 2, \dots$) из L^2_λ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{n-1}(F_k)_\lambda}{\omega_r(F_k, \tau)_\lambda} \geq 1, \quad r > 0;$$

(С) при $\lambda > 0$ существует последовательность функций F_k ($k = 1, 2, \dots$) из L^2_λ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{n-1}(F_k)_\lambda}{\omega_r(F_k, \pi)_\lambda} \geq 1, \quad 0 < r \leq 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Утверждение (В) теоремы 2.1 принадлежит В.В. Арестову (см. ниже лемму 4.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Для $\lambda = 0, r = 1$ утверждения теоремы 2.1 получены Н. И. Черных [6], а при $\lambda = 0, r > 1$ утверждение (А) теоремы 2.1 доказано В.В. Шалаевым [39].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. С помощью функции $F(x) = R_n(x)$ легко показать, что при $0 < \tau < \tau_{n,\lambda}$, $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$, $\lambda \geq 0$ точная константа $c = c(\tau, n, r, \lambda)$ в неравенстве (1.21) будет строго больше единицы.

В силу равенства (1.22) следствием теоремы 2.1 является

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $n = 1, 2, \dots$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(А) при $m = 2, 3, \dots$, $\lambda = (m-2)/2$ для каждой функции $f \in L^2(\mathbb{S}^{m-1})$, $f \neq \text{const}$, выполняются неравенства

$$E_{n-1}(f) < \omega_r(f, 2\tau_{n,\lambda}), \quad r \geq 1, \quad (2.6)$$

$$E_{n-1}(f) < 2^{(1-r)/2} \omega_r(f, 2\tau_{n,\lambda}), \quad 0 < r < 1; \quad (2.7)$$

(В) при $m = 3, 4, \dots$, $\tau \in (0, \pi)$ существует последовательность функций f_k ($k = 1, 2, \dots$) из $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{n-1}(f_k)}{\omega_r(f_k, \tau)} \geq 1, \quad r > 0;$$

(C) при $m = 3, 4, \dots$ существует последовательность функций f_k ($k = 1, 2, \dots$) из $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{n-1}(f_k)}{\omega_r(f_k, \pi)} \geq 1, \quad 0 < r \leq 1.$$

Эта теорема и замечание 2.3 позволяют локализовать точку Черныха в неравенстве Джексона–Стечкина в многомерном случае.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $m = 3, 4, \dots$, $\lambda = (m-2)/2$. Тогда точная константа в неравенстве Джексона–Стечкина (1.4) в пространстве $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\tau, n, r, m) &> 1, & 0 < \tau < \tau_{n, \lambda}, \quad r > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{H}(\tau, n, r, m) &= 1, & \tau \in [2\tau_{n, \lambda}, \pi), \quad r \geq 0, \quad n = 2, 3, \dots, \\ \mathcal{H}(\tau, n, 1, m) &= 1, & \tau \geq 2\tau_{n, \lambda}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Теорема 2.2 для случая $m = 3, n = 1$ и $m = 4, n \geq 1$ содержится в работе В. В. Арестова и В. Ю. Попова [27] (см. (2.4)), а при $m = 3, n \geq 2$ уточняет результат (2.4), так как $2\tau_{n, 1/2} < 2\pi/(n+1)$ (см. [40, с. 147, (6.6.4)]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. В силу известного свойства (1.10) [23, с. 130] неравенство (2.7) является следствием неравенства (2.6).

Для доказательства утверждения (A) теоремы 2.1 применялись идеи, заложенные в работах Н. И. Черных [6], [7] и В. А. Юдина [24] о построении экстремального веса (решения двойственной задачи).

3. Некоторые свойства ультрасферического сдвига. В этом пункте приводятся необходимые в дальнейшем известные свойства (см. [34], [35]) оператора (1.18) ультрасферического сдвига с шагом $t \in \mathbb{R}$, действующего на функции $F(x)$ вида $F(x) = f(\cos x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\lambda \geq 0$, $0 < \tau \leq \pi/2$, функция $F(x) = f(\cos x)$ непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$ и

$$F(x) = 0, \quad x \in [\tau, \pi].$$

Тогда функция $G(x) = T_\tau F(x)$ является непрерывной при всех $x \in \mathbb{R}$ и

$$G(x) = 0, \quad x \in [2\tau, \pi].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\lambda = 0$ утверждения леммы легко проверяются. Пусть $\lambda > 0$. Непрерывность функции G очевидна. По условию леммы имеем

$$f(u) = 0, \quad u \in [-1, \cos \tau]. \quad (3.1)$$

Функция $A(x, \tau, \varphi) = \cos x \cos \tau + \sin x \sin \tau \cos \varphi$ принимает свои значения в отрезке $[-1, \cos \tau]$, если

$$0 < \tau \leq \pi/2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 2\tau \leq x \leq \pi. \quad (3.2)$$

Действительно, в этом случае $\sin x \sin \tau \geq 0$, поэтому при фиксированных $\tau \in (0, \pi/2]$, $x \in [2\tau, \pi]$ функция $A(x, \tau, \varphi)$ монотонно изменяется в отрезке $[\cos(x + \tau), \cos(x - \tau)]$, когда φ меняется от π до 0, при этом $[\cos(x + \tau), \cos(x - \tau)] \subseteq [-1, \cos \tau]$. Поэтому $-1 \leq A(x, \tau, \varphi) \leq \cos \tau$, если выполнено (3.2). Отсюда, из (1.18) и (3.1) получаем утверждение леммы.

Напомним, что через $R_k = R_{k,\lambda}$, $k = 0, 1, \dots$, $\lambda \geq 0$, мы обозначали полиномы

$$R_{k,0}(x) = \cos kx, \quad R_{k,\lambda}(x) = \frac{C_k^\lambda(\cos x)}{C_k^\lambda(1)}, \quad \lambda > 0, \quad (3.3)$$

где

$$C_k^\lambda(u) = \sum_{l=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^l \Gamma(k-l+\lambda)(2u)^{k-2l}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(l+1)\Gamma(k-2l+1)}$$

есть многочлен Гегенбауэра (ультрасферический многочлен) (см. [40, с. 96, формула (4.7.31)]). Известны (см. [40, с. 91, с. 92, с. 175], [38, с. 399]) следующие свойства полиномов (3.3):

$$R_k(t) = (-1)^k R_k(\pi - t), \quad (3.4)$$

$$|R_k(t)| \leq R_k(0) = 1, \quad (3.5)$$

$$\int_0^\pi R_k(x) R_l(x) \sin^{2\lambda} x dx = 0, \quad k \neq l, \quad (3.6)$$

где $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$. В частности, в пространстве L_λ^2 функций со скалярным произведением

$$(F, G)_\lambda = \int_0^\pi F(x) G(x) \sin^{2\lambda} x dx, \quad \lambda \geq 0,$$

полиномы R_k , $k \in \mathbb{Z}_+$, образуют ортогональную систему.

В 1954 г. С. Бохнер [34] (см. также [35]) ввел понятие *ультрасферического свертки* для функций $F(x) = f(\cos x)$, $G(x) = g(\cos x)$ из L^2_λ , $\lambda \geq 0$:

$$(F * G)_\lambda(t) = \int_0^\pi \{T_x F(t)\} G(x) \sin^{2\lambda} x \, dx$$

и, опираясь на результат (1.20) Л. Гегенбауэра, доказал коммутативность этой операции:

$$(F * G)_\lambda(t) = (G * F)_\lambda(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Поскольку $T_x F(t) = T_t F(x)$ для любых x, t из $\mathbb{R}$, то равенство (3.7) означает самосопряженность ультрасферического сдвига. Иными словами, справедлива

ЛЕММА 3.2. Пусть $\lambda \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ и функции $F(x) = f(\cos x)$, $G(x) = g(\cos x)$ принадлежат пространству L^2_λ . Тогда справедливо равенство

$$(T_t F, G)_\lambda = (F, T_t G)_\lambda. \quad (3.8)$$

4. Вспомогательные утверждения. Рассмотрим следующее множество функций:

$$\Phi_n^\lambda = \left\{ F(x) = \sum_{k \geq n} \rho_k R_k(x) : F(0) = \sum_{k \geq n} \rho_k = 1, \text{ все } \rho_k \geq 0 \right\}, \quad (4.1)$$

где $\lambda \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $R_k = R_{k,\lambda}$ – косинус-полиномы (3.3) Гегенбауэра. Это множество является выпуклым подмножеством пространства $C[0, \pi]$ непрерывных на $[0, \pi]$ функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Положительное число $\sigma = \sigma(\Phi_n^\lambda)$ назовем *точкой Черныха для множества Φ_n^λ* , если одновременно выполняются следующие два условия:

- (а) для любой функции $F \in \Phi_n^\lambda$ найдется точка $x^* \in (0, \sigma)$, в которой $F(x^*) < 0$;
- (б) для любого $\delta \in (0, \sigma)$ найдутся функция $F_\delta \in \Phi_n^\lambda$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $F_\delta(x) \geq \varepsilon$ при всех $x \in [0, \delta]$.

Результаты (2.1), (2.2) Н. И. Черных эквивалентны равенству

$$\sigma(\Phi_n^0) = \frac{\pi}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

В. Ю. Попов [25, теорема 3] получил результат, из которого вытекает неравенство

$$\sigma(\Phi_n^\lambda) \leq \frac{2\pi}{n+1}, \quad \lambda = 1/2, \quad \lambda = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Одним из основных результатов этого пункта является

ЛЕММА 4.1. Пусть $\lambda \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда справедливы оценки

$$\tau_{n,\lambda} \leq \sigma(\Phi_n^\lambda) \leq 2\tau_{n,\lambda}, \quad (4.4)$$

где $\tau_{n,\lambda}$ есть первый положительный нуль полинома $R_n(x)$ (см. формулы (3.3), (2.5)).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. При $\lambda = 0$ в силу равенства (4.2) Н.И. Черных $\sigma(\Phi_n^0) = 2\tau_{n,0}$. При $\lambda = 1/2$, $n = 1$ и при $\lambda = 1$, $n \geq 1$ оценка сверху в (4.4) совпадает с неравенством (4.3) В.Ю. Попова, а при $\lambda = 1/2$, $n \geq 2$ — уточняет его, так как $2\tau_{n,1/2} < 2\pi/(n+1)$ (см. [40, с. 147, (6.6.4)]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. Оценка снизу $\tau_{n,\lambda} \leq \sigma(\Phi_n^\lambda)$ вытекает из того, что функция R_n принадлежит множеству Φ_n^λ и удовлетворяет неравенству $R_n(x) \geq R_n(\delta) > 0$ при всех $x \in (0, \delta)$ и $\delta \in (0, \tau_{n,\lambda})$. Доказательство оценки сверху

$$\sigma(\Phi_n^\lambda) \leq 2\tau_{n,\lambda} \quad (4.5)$$

будем проводить по схеме Н.И. Черных [6]. А именно, построим вес — неотрицательную, ненулевую и интегрируемую на $[0, 2\tau_{n,\lambda}]$ функцию $v = v_{n,\lambda}$, удовлетворяющую условиям

$$\int_0^{2\tau_{n,\lambda}} R_k(x)v(x) dx \leq 0, \quad k \geq n. \quad (4.6)$$

Эти условия дадут нам неравенство (4.5), так как для каждой функции

$$F(x) = \sum_{k \geq n} \rho_k R_k(x), \quad F(0) = 1, \quad \rho_k \geq 0, \quad k \geq n,$$

из Φ_n^λ мы имели бы

$$\int_0^{2\tau_{n,\lambda}} F(x)v(x) dx = \sum_{k \geq n} \rho_k \int_0^{2\tau_{n,\lambda}} R_k(x)v(x) dx \leq 0.$$

Отсюда ввиду нетривиальности и неотрицательности v следовало бы существование точки $x^* = x^*(F)$ из открытого интервала $(0, 2\tau_{n,\lambda})$, в которой $F(x^*) < 0$.

Идея построения искомого веса v близка к той, которая применялась В.А. Юдиным в работе [24]. Предварительно мы определим четную 2π -периодическую непрерывную функцию $V = V_{n,\lambda}$, которую достаточно задать на отрезке $[0, \pi]$:

$$V(x) = R_n(x), \quad 0 \leq x \leq \tau_{n,\lambda}, \quad V(x) = 0, \quad \tau_{n,\lambda} < x \leq \pi.$$

Искомый вес $v = v_{n,\lambda}$ определим по формуле

$$v(x) = (\sin^{2\lambda} x) T_{\tau_{n,\lambda}} V(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.7)$$

где T_t есть ультрасферический сдвиг (1.18) с шагом t . Из определения (1.18) видно, что v является ненулевой, неотрицательной и непрерывной на замкнутом отрезке $[0, \pi]$ функцией. При $n = 1, 2, \dots$ в силу свойств (3.4)–(3.6) первый положительный нуль полинома R_n удовлетворяет неравенствам $0 < \tau_{n,\lambda} \leq \pi/2$. Отсюда по лемме 3.1 имеем

$$v(x) = 0, \quad x \in [2\tau_{n,\lambda}, \pi].$$

Используя (3.8) – самосопряженность оператора T_t , получаем

$$\begin{aligned} a_k(v) &= \int_0^{2\tau_{n,\lambda}} v(x) R_k(x) dx = \int_0^\pi v(x) R_k(x) dx = (T_{\tau_{n,\lambda}} V, R_k)_\lambda \\ &= (V, T_{\tau_{n,\lambda}} R_k)_\lambda = R_k(\tau_{n,\lambda}) \int_0^{\tau_{n,\lambda}} R_n(x) R_k(x) \sin^{2\lambda} x dx. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Известно (см. [40, с. 79]), что функции

$$\varphi_l(x) = R_l(x) \sin^\lambda x, \quad l = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяют уравнению

$$\varphi_l''(x) - q(x, \lambda) \varphi_l(x) = -(l + \lambda)^2 \varphi_l(x), \quad q(x, \lambda) = \lambda(\lambda - 1) \sin^{-2} x. \quad (4.9)$$

Рассмотрим выражение

$$c(n, k) = \{(n + \lambda)^2 - (k + \lambda)^2\} \int_0^{\tau_{n,\lambda}} \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx.$$

Применяя стандартный прием с использованием уравнения (4.9), получим

$$\begin{aligned} c(n, k) &= \int_0^{\tau_{n,\lambda}} \{\varphi_k''(x) \varphi_n(x) - \varphi_k(x) \varphi_n''(x)\} dx \\ &= \{\varphi_k'(x) \varphi_n(x) - \varphi_k(x) \varphi_n'(x)\} \Big|_0^{\tau_{n,\lambda}} \\ &= -\varphi_k(\tau_{n,\lambda}) \varphi_n'(\tau_{n,\lambda}) = -(\sin^{2\lambda} \tau_{n,\lambda}) R_k(\tau_{n,\lambda}) R_n'(\tau_{n,\lambda}). \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} a_n(v) &= 0, \\ a_k(v) &= R_k(\tau_{n,\lambda}) \{(n + \lambda)^2 - (k + \lambda)^2\}^{-1} c(k, n) \\ &= \{(k + \lambda)^2 - (n + \lambda)^2\}^{-1} (\sin^{2\lambda} \tau_{n,\lambda}) R_k^2(\tau_{n,\lambda}) R_n'(\tau_{n,\lambda}) \leq 0 \end{aligned}$$

при $k > n$, так как $R_n'(\tau_{n,\lambda}) < 0$, $n = 1, 2, \dots$ (поскольку все нули полинома R_n вещественные, простые и при переходе через точку $\tau_{n,\lambda}$ функция R_n меняет знак с ‘+’ на ‘-’). Таким образом, мы нашли вес v , удовлетворяющий условиям (4.6). Лемма доказана.

Второе основное утверждение этого пункта принадлежит В. В. Арестову и публикуется здесь с его разрешения.

ЛЕММА 4.2. Пусть на отрезке $[0, \tau]$ задана система непрерывных функций P_k , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющая следующим трем условиям:

- (а) $P_k(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots$;
- (б) существует абсолютная константа $M \geq 1$ такая, что $|P_k(t)| \leq M$ при $t \in [0, \tau]$, $k = 1, 2, \dots$;
- (с) для любого $\xi \in (0, \tau]$ выполняется неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \max_{t \in [\xi, \tau]} P_k(t) \right\} \leq 1.$$

Тогда для любого $\varepsilon^* \in (0, 1)$ найдется функция

$$F(t) = \sum_{k \geq 1} \rho_k P_k(t), \quad \sum_{k \geq 1} \rho_k = 1,$$

с неотрицательными коэффициентами ρ_k , $k = 1, 2, \dots$, такая, что

$$F(t) \leq 1 + \varepsilon^*, \quad t \in [0, \tau].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$. Положим $F_1(t) = P_1(t)$. Пусть построена функция

$$F_n(t) = \sum_{k=1}^{N(n)} \rho_k P_k(t), \quad \sum_{k=1}^{N(n)} \rho_k = 1, \quad \rho_k \geq 0.$$

Выберем число $\theta \in (0, 1)$, удовлетворяющее условию $\theta M \leq 1 - \varepsilon$. Построим F_{n+1} следующим образом. Возьмем такое число $\delta_n \in (0, \tau)$, чтобы выполнялось неравенство

$$(1 - \theta)F_n(t) \leq \varepsilon, \quad t \in [0, \delta_n].$$

Теперь выберем $N(n+1)$ такое, чтобы

$$P_{N(n+1)}(t) \leq 1 + \varepsilon = E, \quad t \in [\delta_n, \tau].$$

Положим $F_{n+1}(t) = \theta P_{N(n+1)}(t) + (1 - \theta)F_n(t)$. Для $t \in [0, \delta_n]$ имеем

$$F_{n+1}(t) \leq \theta M + (1 - \theta)\varepsilon \leq 1 - \varepsilon + (1 - \theta)\varepsilon = 1 + \varepsilon\theta \leq 1 + \varepsilon \frac{1 - \varepsilon}{M} \leq 1 + \varepsilon = E.$$

Обозначим $M_k = \max\{F_k(t) : 0 \leq t \leq \tau\}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, что $M_k \leq M$. При $t \in [\delta_n, \tau]$ получаем

$$\begin{aligned} F_{n+1}(t) &\leq \theta E + (1 - \theta) M_n, \\ M_n &\leq \max\{E, \theta E + (1 - \theta) M_{n-1}\}, \\ &\dots\dots\dots \\ M_2 &\leq \max\{E, \theta E + (1 - \theta) M_1\}. \end{aligned}$$

Поскольку выражение

$$\begin{aligned} &\theta E + (1 - \theta) \left\{ \theta E + (1 - \theta) \left\{ \theta E + (1 - \theta) \left\{ \dots + (1 - \theta) M_1 \right\} \right\} \dots \right\} \\ &= \theta E \{ 1 + (1 - \theta) + (1 - \theta)^2 + \dots + (1 - \theta)^{n-1} + (1 - \theta)^n M_1 / (\theta E) \} \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ стремится к $\theta E / \{1 - (1 - \theta)\} = E = 1 + \varepsilon$ и любая сумма вида

$$\theta E \{ 1 + (1 - \theta) + \dots + (1 - \theta)^{k-1} + (1 - \theta)^k / \theta \}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

равна $E = 1 + \varepsilon$, то это влечет неравенство $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} M_n \leq 1 + \varepsilon$, что эквивалентно утверждению леммы.

В следующем пункте нам также понадобится очевидное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Если $r \geq 1$, $|u| \leq 1$, то $1 - ru \leq (1 - u)^r$. Если $0 < r < 1$, $|u| \leq 1$, то $2^{r-1}(1 - u) \leq (1 - u)^r$.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Начнем с доказательства утверждения (А) теоремы 2.1. Пусть $r \geq 1$, в силу соотношений (1.17), (1.20), (1.14), (1.13) и предложения 4.1 достаточно установить неравенство

$$\sum_{k \geq n} \rho_k < \sup_{0 < t \leq 2\tau_{n,\lambda}} \sum_{k \geq n} \{1 - rR_k(t)\} \rho_k \quad (5.1)$$

для любой последовательности неотрицательных чисел $\rho_k \geq 0$, $k = n, n + 1, \dots$, удовлетворяющей условию $\sum_{k \geq n} \rho_k = 1$. Заметим, что ряд, стоящий в правой части (5.1), можно представить в виде

$$\sum_{k \geq n} \{1 - rR_k(t)\} \rho_k = \sum_{k \geq n} \rho_k - rF(t),$$

где функция $F(t) = \sum_{k \geq n} \rho_k R_k(t)$ принадлежит множеству Φ_n^λ (см. (4.1)). В силу леммы 4.1 точка Черныха для множества Φ_n^λ удовлетворяет неравенству

$$\sigma(\Phi_n^\lambda) \leq 2\tau_{n,\lambda}.$$

Следовательно (см. определение 4.1, часть (а)), для F найдется точка $x^* \in (0, 2\tau_{n,\lambda})$, в которой $F(x^*) < 0$. Поэтому справедливо неравенство

$$\sup_{0 < t \leq 2\tau_{n,\lambda}} \left\{ \sum_{k \geq n} \rho_k - rF(t) \right\} > \sum_{k \geq n} \rho_k,$$

которое совпадает с (5.1). Случай $0 < r < 1$ получается аналогично.

Для доказательства утверждения (В) теоремы 2.1 воспользуемся леммой 4.2 В. В. Арестова. Пусть $r > 0$, $0 < \tau < \pi$. Система функций

$$P_k(t) = \{1 - R_{n+k}(t)\}^r, \quad k = 0, 1, \dots,$$

как известно (см. [40, с. 175, (b); формула Дарбу, формула (7.32.2)]), удовлетворяет всем условиям леммы 4.2. Поэтому для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется последовательность неотрицательных чисел $\rho_0, \rho_1, \dots$ такая, что $\sum_{k \geq 0} \rho_k = 1$ и

$$\sum_{k \geq 0} \rho_k \bigg/ \sup_{0 < t \leq \tau} \sum_{k \geq 0} \{1 - R_{n+k}(t)\}^r \rho_k \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

Устремляя ε к нулю, получим требуемое утверждение.

Для доказательства утверждения (С) теоремы 2.1 при $r = 1$ достаточно в силу леммы 4.2 построить последовательность функций F_N , $N = n + 1, n + 2, \dots$, вида $F_N(x) = \sum_{k=n+1}^N \rho_k R_k(x)$, $F_N(0) = 1$, с неотрицательными коэффициентами ρ_k , $k \geq n + 1$, такую, чтобы при любом $\xi \in (0, \pi]$ выполнялось бы соотношение

$$\|F_N\|_{C[\xi, \pi]} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

В случае $0 < r < 1$ достаточно будет затем применить неравенство Йенсена

$$\sum_{k=n+1}^N \rho_k \{1 - R_k(x)\}^r \leq \left\{ \sum_{k=n+1}^N \rho_k \{1 - R_k(x)\} \right\}^r,$$

$$\sum_{k=n+1}^N \rho_k = 1, \quad \rho_k \geq 0, \quad k \geq n + 1.$$

Пример такой последовательности функций можно построить с помощью формулы Кристоффеля–Дарбу (см. [40, гл. 3, § 3.2], [41, формулы (1.4), (2.4), (2.5), (2.7), (4.7), (4.14)]), а также равенства (см. [40, (4.7.14)])

$$\frac{d}{dt} C_k^\lambda(t) = 2\lambda C_{k-1}^{\lambda+1}(t)$$

для производных алгебраических многочленов Гегенбауэра. А именно, при $t = \cos x$ положим (см. (3.3))

$$P_k(t) = R_k(\arccos t) = \frac{C_k^\lambda(t)}{C_k^\lambda(1)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$Q_N(t) = \sum_{k=0}^N r_k P_k(t), \quad r_k = \frac{k + \lambda}{\lambda} \binom{k + 2\lambda - 1}{k}.$$

Следующая последовательность функций $F_N(x) = F_N^*(t)$, $t = \cos x$:

$$F_N^*(t) = \frac{Q_N(t) - Q_n(t)}{Q_N(1) - Q_n(1)} = \frac{\sum_{k=n+1}^N r_k P_k(t)}{\sum_{k=n+1}^N r_k}, \quad N = n + 1, n + 2, \dots,$$

является искомой, так как $F_N^*(t)$ преобразуется к виду

$$F_N^*(t) = \frac{2\lambda + 1}{2\lambda(1-t)} \cdot \frac{\binom{N+2\lambda}{N} \{P_N(t) - P_{N+1}(t)\} - \binom{n+2\lambda}{n} \{P_n(t) - P_{n+1}(t)\}}{\binom{N+2\lambda}{N} (2\lambda + 1 + 2N) - \binom{n+2\lambda}{n} (2\lambda + 1 + 2n)}$$

и (см., например, [32, с. 248])

$$\binom{N+2\lambda}{N} = \frac{N^{2\lambda}}{\Gamma(2\lambda+1)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\}.$$

Теорема 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Используя (4.6), (4.7), можно получить доказательство утверждения (А) теоремы 2.1 в случае $r > 1$ способом, предложенным в работе В.В. Шалаева [39, теорема 1, следствие 1].

ЗАМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ. В 1995 г. В.В. Арестов и В.Ю. Попов опубликовали [42] доказательство точного неравенства Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{S}^{m-1})$, $m = 3, 4$, аннотированного ими в [27].

Данная работа обсуждалась в Уральском государственном университете на семинаре под руководством профессора В.В. Арестова. Автор благодарен профессору В.В. Арестову, а также доценту В.Ю. Попову за полезные обсуждения.

Институт математики и механики
Уральского отделения РАН
E-mail: babenko@approx.imm.intec.ru

Поступило
04.04.94
Исправленный вариант
18.06.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Jackson D. On approximation by trigonometric sums and polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. 1912. V. 13. P. 491–515.
- [2] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Гостехиздат, 1947.
- [3] Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. С. 219–242.
- [4] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
- [5] Корнейчук Н. П. Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. № 3. С. 514–515.
- [6] Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
- [7] Черных Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т. 2. № 5. С. 513–522.
- [8] Корнейчук Н. П. О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 3. С. 669–674.
- [9] Arestov V. V., Chernykh N. I. On the L_2 -approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // Approximation and functions spaces. Proc. Conf. Gdan'sk, 1979. Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25–43.
- [10] Черных Н. И. Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ ($1 \leq p < 2$) с точной константой // Тр. МИАН. 1992. Т. 198. С. 232–241.
- [11] Жук В. В. Аппроксимация периодических функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.
- [12] Бабенко А. Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1986. Т. 39. № 5. С. 651–664.
- [13] Бабенко А. Г. О неравенстве Джексона в пространстве L^2 // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С. 4–14.
- [14] Шакенова М. Ж. О точном неравенстве между наилучшими приближениями и модулем гладкости положительного порядка в $L_p[0, 2\pi]^2$ // Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики. Тезисы докл. Алматы, 1993. С. 178–179.
- [15] Gronwall T. H. On the degree of convergence of Laplace's series // Trans. Amer. Math. Soc. 1914. V. 15. P. 1–30.
- [16] Никольский С. М., Лизоркин П. И. Приближение сферическими полиномами // Тр. МИАН. 1984. Т. 166. С. 186–200.
- [17] Фёдоров В. М. Приближение функций на сфере // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1990. № 1. С. 15–23.
- [18] Лизоркин П. И. О приближении функций на сфере σ . О пространствах $B_{p,q}^\alpha(\sigma)$ // Докл. РАН. 1993. Т. 331. № 5. С. 555–558.
- [19] Никольский С. М., Лизоркин П. И. Аппроксимация функций на сфере // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 3. С. 635–651.
- [20] Вебстер А., Сегё Г. Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики. М.–Л.: ОНТИ ГТТИ, 1934.
- [21] Кушниренко Г. Г. О приближении функций, заданных на единичной сфере, конечными сферическими суммами // Научные докл. высшей школы. Физико-матем. науки. 1958. Т. 3. № 4. С. 47–53.

- [22] Кушниренко Г. Г. Некоторые вопросы приближения непрерывных функций на единичной сфере конечными сферическими суммами // Тр. Харьковского политехнического ин-та. Сер. инженерно-физич. 1959. Т. 25. № 3. С. 3–22.
- [23] Рустамов Х. П. О приближении функций на сфере // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 127–148.
- [24] Юдин В. А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 2. С. 309–315.
- [25] Попов В. Ю. О точных константах в неравенствах Джексона для наилучших сферических среднеквадратичных приближений // Изв. вузов. Матем. 1981. № 12. С. 67–78.
- [26] Шалаев В. В. Точные оценки приближения непрерывных на сфере функций линейными операторами типа свертки // Укр. матем. ж. 1991. Т. 43. № 4. С. 565–567.
- [27] Арестов В. В., Попов В. Ю. Неравенство Джексона на сфере L_2 // Международная конф. “Теория приближения и задачи вычислительной математики”. Тезисы докл. Днепрпетровск: ДДУ, 1993. С. 8.
- [28] Попов В. Ю. Многомерные приближения в $L_2(T_m)$ // Теория функций и приближений. Труды 3-й Саратовской зимней школы (27 января – 7 февраля 1986 г.). Межвузовский научн. сб. Ч. 3. Саратов: СГУ, 1988. С. 22–25.
- [29] Попов В. Ю. Приближение на сфере в L_2 // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. № 4. С. 793–797.
- [30] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
- [31] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [32] Berens H., Butzer P. L., Pawelke S. Limitierungsverfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten // Publ. Res. Inst. Math. Sci. (Kyoto). Ser. A. 1968. V. 4. P. 202–268.
- [33] Иванов В. А. К вопросу о свойствах модулей непрерывности для функций на сфере // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 3. С. 481–487.
- [34] Bochner S. Positive zonal functions on spheres // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1954. V. 40. P. 1141–1147.
- [35] Pawelke S. Ein Satz vom Jacksonschen Typ für algebraische Polynome // Acta Sci. Math. 1972. V. 33. P. 323–336.
- [36] Потапов М. К. О приближении алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Якоби // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1983. № 4. С. 43–52.
- [37] Le Gendre A. M. Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendentes et sur les quadratures. V. 2. Paris, 1817.
- [38] Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949.
- [39] Шалаев В. В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. ж. 1991. Т. 43. № 1. С. 125–129.
- [40] Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
- [41] Левенштейн В. И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Пробл. киберн. 1983. Т. 40. С. 43–110.
- [42] Арестов В. В., Попов В. Ю. Неравенство Джексона на сфере L_2 // Изв. вузов. Матем. 1995. № 8 (399). С. 13–20.