Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Гладков, Единственность решения задачи Коши для некоторых квазилинейных псевдопараболических уравнений, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 356–362

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1835>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:01:09

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Л. Гладков

1. Введение. В настоящей статье рассматривается задача Коши в слое $\Pi_T = \mathbb{R}^n \times [0, T]$ для уравнения

$$u_t = c\Delta u_t + \Delta\varphi(u) \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (1.2)$$

где c – некоторая положительная постоянная, Δ – оператор Лапласа по переменным $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Относительно функции $\varphi(p)$, определенной при $p \geq 0$, делаются следующие предположения:

$$\varphi(p) \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad \varphi'(p) \geq 0, \quad \varphi'(p) \text{ монотонно не убывает.} \quad (1.3)$$

Здесь $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Задача Коши (1.1), (1.2) с ограниченной неотрицательной начальной функцией при $\varphi(p) = p^2$ рассматривалась в [1], [2]. В [3] при выполнении дополнительных к (1.3) условий на функцию $\varphi(p)$:

$$\begin{aligned} \varphi(p) &\in C^2(\mathbb{R}_+), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(p) \leq \beta_1 p \varphi'(p), \\ \beta_2 p^m &\leq \varphi'(p) \leq \beta_3 p^m, \quad 0 \leq \varphi''(p) \leq \beta_4 p^{m-1} \quad \text{при } p > 0; \\ \beta_i &> 0 \quad (1 \leq i \leq 4), \quad m \geq 1, \end{aligned} \quad (1.4)$$

доказан ряд теорем о разрешимости задачи Коши (1.1), (1.2) с неотрицательной начальной функцией, неограниченно растущей на бесконечности. Обозначим через $\mathcal{K}$ класс неотрицательных функций $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\Pi_T)$, для которых выполняются следующие неравенства:

$$\varphi'(u(x, t)) \leq M_1(1 + |x|^2), \quad (1.5)$$

$$|u_t(x, t)| \leq M_2(1 + |x|^2)^\beta \quad (\beta > 0). \quad (1.6)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда, грант MX6000.

Здесь и ниже через M_i обозначаются положительные постоянные. Для любой неотрицательной начальной функции, удовлетворяющей неравенству (1.5) в [3] установлено существование в некотором слое Π_T решения задачи Коши (1.1), (1.2), принадлежащего классу $\mathcal{K}$. Показана точность этой теоремы. При $n = 1$ доказана единственность решения задачи Коши в классе $\mathcal{K}$. Все упомянутые из [3] результаты могут быть получены и для функции $\varphi(p)$, удовлетворяющей условиям (1.3), (1.4) при $m > 0$.

Целью настоящей работы является доказательство единственности в классе $\mathcal{K}$ решения задачи Коши (1.1), (1.2) в случае произвольного значения размерности n .

2. Единственность решения задачи Коши. Пусть Ω – произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, граница которой $\partial\Omega$ является поверхностью Ляпунова. Обозначим $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$. Рассмотрим в Q_T вспомогательную линейную краевую задачу, имеющую самостоятельный интерес:

$$f_t - c\Delta f_t + a(x, t)\Delta f = \omega(x, t) \quad \text{в } Q_T, \quad (2.1)$$

$$f(x, t) = h(x, t) \quad \text{на } S_T, \quad (2.2)$$

$$f(x, 0) = g(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (2.3)$$

где $a(x, t) \in C_{x,t}^{\alpha,0}(\overline{Q}_T)$, $\omega(x, t) \in C_{x,t}^{\alpha,0}(\overline{Q}_T)$, $h(x, t) \in C_{x,t}^{2+\alpha,1}(\overline{S}_T)$, $g(x) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ ($0 < \alpha < 1$) и, выполняется условие согласования начальных и граничных данных $g(x) = h(x, 0)$ при $x \in \partial\Omega$.

ЛЕММА. *Существует решение $f(x, t) \in C_{x,t}^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_T)$ краевой задачи (2.1)–(2.3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} cf(x, t) = & cg(x) - \iint_{Q_t} G_n(x, \xi)a(\xi, \tau)\Delta f(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ & + \iint_{Q_t} G_n(x, \xi)\omega(\xi, \tau) d\xi d\tau - c \int_{S_t} h_\tau \frac{\partial G_n}{\partial \nu_\xi} ds. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь ν_ξ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в переменных ξ , $G_n(x, \xi)$ – функция Грина первой краевой задачи для оператора $Lv = -\Delta v + v$ в области Ω . Как известно,

$$G_n(x, \xi) = \mathcal{E}_n(x - \xi) + g_n(x, \xi), \quad (x, \xi) \in \Omega \times \Omega, \quad (2.5)$$

где $\mathcal{E}_n(x)$ – фундаментальное решение оператора L во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, стремящееся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$, а функция $g_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ при любом фиксированном ξ удовлетворяет уравнению

$$L_x g_n = 0, \quad x \in \Omega,$$

и граничному условию

$$g_n(x, \xi)|_{x \in \partial\Omega} = -\mathcal{E}_n(x - \xi)|_{x \in \partial\Omega}, \quad \xi \in \Omega. \quad (2.6)$$

Несложно показать, что

$$\mathcal{E}_n(x) = c_n |x|^{(2-n)/2} K_{(n-2)/2}(|x|), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $K_\nu(|x|)$ – функция Макдональда ν -го порядка, c_n – нормирующий множитель. Отметим некоторые свойства (см. [3], [4, с. 93–95]) функций Макдональда и Грина

$$\begin{aligned} K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) &= -2K'_\nu(z), \quad K_{-\nu}(z) = K_\nu(z), \\ K_{k/2}(z) &= \frac{\alpha_k}{z^{k/2}} [1 + o(1)] \quad \text{при } z \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, \dots, \\ K_0(z) &= \ln\left(\frac{1}{z}\right) + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow 0, \\ 0 < G_n(x, \xi) &< \mathcal{E}_n(x - \xi), \quad (x, \xi) \in \Omega \times \Omega, \\ \frac{\partial G_n(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} &\leq 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad x \in \Omega, \\ \int_\Omega G_n \Delta v \, d\xi &= \int_\Omega G_n v \, d\xi - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial G_n}{\partial \nu_\xi} \, ds - v(x). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь α_k – некоторые положительные постоянные, $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ имеет на $\partial\Omega$ правильную нормальную производную, причем $\Delta v \in L^2(\Omega)$.

Обозначим через $C_{x,t}^{s+\alpha,0}(\bar{Q}_T)$ ($s = 0, 1, 2, \dots$) банахово пространство с нормой

$$\begin{aligned} \|u\|_{s+\alpha} &= \sum_{|k|=0}^s \sup_{\bar{Q}_T} |D^k u(x, t)| \\ &+ \sum_{|k|=s} \sup_{(x,t), (x',t) \in \bar{Q}_T} \frac{|D^k u(x, t) - D^k u(x', t)|}{|x - x'|^\alpha}. \end{aligned}$$

Символ $D^k u(x, t)$ означает производную функции $u(x, t)$ вида

$$\frac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}},$$

где $k = (k_1, \dots, k_n)$ – мультииндекс с $k_1 \geq 0, |k| = k_1 + \dots + k_n$ – порядок производной. Аналогично определяется норма $\|u\|_{s+\alpha, S_T}$ функций $u(x, t)$, определенных на $\bar{S}_T$. С помощью рассуждений, подобных приведенным

в [5, с. 163–171], можно показать, что для функций $\gamma(x, t) \in C_{x,t}^{\alpha,0}(\overline{Q}_T)$ и $\beta(x, t) \in C_{x,t}^{2+\alpha,0}(\overline{S}_T)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \left\| \iint_{Q_t} G_n(x, \xi) \gamma(\xi, \tau) d\xi d\tau \right\|_{2+\alpha} &\leq c_1(n, \alpha) T \|\gamma\|_{\alpha}, \\ \left\| \int_{S_t} \beta \frac{\partial G_n}{\partial \nu_{\xi}} ds \right\|_{2+\alpha} &\leq c_2(n, \alpha) T \|\beta\|_{2+\alpha, S_T}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где постоянные $c_i(n, \alpha)$ ($i = 1, 2$) зависят лишь от n и α .

Перепишем уравнение (2.4) в следующем виде:

$$f = A(f) \equiv g + \frac{1}{c} \iint_{Q_t} G_n(x, \xi) \omega(\xi, \tau) d\xi d\tau - \int_{S_t} h_{\tau} \frac{\partial G_n}{\partial \nu_{\xi}} ds + B(f),$$

где

$$B(f) \equiv -\frac{1}{c} \iint_{Q_T} G_n(x, \xi) a(\xi, \tau) \Delta f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

В $C_{x,t}^{2+\alpha,0}(\overline{Q}_T)$ рассмотрим шар B_r некоторого радиуса r . Пусть $u_1, u_2 \in B_r$ и $v(x, \xi, \tau) = G_n(x, \xi) a(\xi, \tau) \Delta[u_1(\xi, \tau) - u_2(\xi, \tau)]$. Используя свойства (2.8) функции Грина, получаем

$$\|A(u_1) - A(u_2)\|_{2+\alpha} = \|B(u_1) - B(u_2)\|_{2+\alpha} \leq M_3 T \|u_1 - u_2\|_{2+\alpha}. \quad (2.9)$$

Отсюда следует, что оператор A непрерывен из $C_{x,t}^{2+\alpha,0}(\overline{Q}_T)$ в $C_{x,t}^{2+\alpha,0}(\overline{Q}_T)$ и является сжимающимся при $T < (M_3)^{-1}$. Пусть $u \in B_r$. Тогда в силу (2.8), (2.9)

$$\begin{aligned} \|A(u)\|_{2+\alpha} &\leq \|g\|_{2+\alpha} + \left\| \int_{S_t} h_{\tau} \frac{\partial G_n}{\partial \nu_{\xi}} ds \right\|_{2+\alpha} + M_3 T \|u\|_{2+\alpha} \\ &\leq M_4 + M_3 T r \leq M_4 + \frac{r}{2} \leq r \end{aligned}$$

при $r \geq 2M_4$ и $T \leq (2M_3)^{-1}$. Таким образом, любой шар B_r с $r \geq 2M_4$ при $T \leq (2M_3)^{-1}$ отображается оператором A в себя, и согласно принципу сжимающих отображений в этом шаре существует единственная неподвижная точка оператора A , которая может быть найдена методом последовательных приближений. Так как постоянная M_3 не зависит от r и T , то решение уравнения (2.4) может быть продолжено на отрезок $[0, T]$ с любым значением T . Дифференцируя (2.4) по t и применяя к обеим частям

получившегося равенства оператор Лапласа, находим

$$\begin{aligned}
 c\Delta f_t &= -\Delta \int_{\Omega} G_n(x, \xi) a(\xi, t) \Delta f(\xi, t) d\xi \\
 &\quad + \Delta \int_{\Omega} G_n(x, \xi) \omega(\xi, t) d\xi - \Delta c \int_{\partial\Omega} h_t \frac{\partial G_n}{\partial \nu_{\xi}} ds \\
 &= - \int_{\Omega} G_n(x, \xi) a(\xi, t) \Delta f(\xi, t) d\xi + a(x, t) \Delta f \\
 &\quad + \int_{\Omega} G_n(x, \xi) \omega(\xi, t) d\xi - \omega(x, t) - c \int_{\partial\Omega} h_t \frac{\partial G_n}{\partial \nu_{\xi}} ds \\
 &= f_t + a(x, t) \Delta f - \omega(x, t),
 \end{aligned}$$

т.е. решение уравнения (2.4) удовлетворяет (2.1). Из (2.4) и последнего равенства следует, что $f(x, t) \in C_{x,t}^{2+\alpha,1}(\overline{Q_T})$ и выполнено условие (2.3). Пусть $H(x, t) \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ при любом $t \geq 0$ и $H(x, t) = h_t(x, t)$ при $(x, t) \in S_T$. Ввиду (2.4), (2.7)

$$\begin{aligned}
 cf_t &= - \int_{\Omega} G_n(x, \xi) [a(\xi, t) \Delta f(\xi, t) - \omega(\xi, t)] d\xi - c \int_{\partial\Omega} H \frac{\partial G_n}{\partial \nu_{\xi}} ds \\
 &= - \int_{\Omega} G_n(x, \xi) [a(\xi, t) \Delta f(\xi, t) - \omega(\xi, t)] d\xi \\
 &\quad + c \int_{\Omega} G_n(x, \xi) [\Delta H(\xi, t) - H(\xi, t)] d\xi + cH(x, t),
 \end{aligned}$$

откуда с учетом (2.5) и (2.6) вытекает, что $f_t = h_t$ при $(x, t) \in S_T$. Отсюда и из условия согласования начальных и граничных данных получаем (2.2). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия (1.3). Тогда решение задачи Коши (1.1), (1.2) единственно в классе $\mathcal{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует по крайней мере два решения задачи: $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Тогда функция $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ удовлетворяет нулевому начальному условию и уравнению

$$w_t - c\Delta w_t - \Delta[aw] = 0 \quad \text{в } \Pi_T, \quad (2.10)$$

где

$$a(x, t) = \int_0^1 \varphi'(su_1(x, t) + (1-s)u_2(x, t)) ds.$$

В силу (1.3) и условия $u_i(x, t) \in \mathcal{H}$ ($i = 1, 2$) при некотором значении M_5 выполняются неравенства

$$0 \leq a(x, t) \leq M_5(1 + |x|^2). \quad (2.11)$$

Пусть $\omega(x, t)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая в Π_T функция, равная нулю при $|x| \geq d$, $\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < k\}$, $Q_{k,T} = \Omega_k \times (0, T)$

и $S_{k,T} = \partial\Omega_k \times (0, T)$. Обозначим через $f_k(x, t)$ решение первой краевой задачи в $Q_{k,T}$ для уравнения (2.1) с нулевыми граничным и начальным условиями

$$\begin{aligned} f_k(x, t) &= -0, & (x, t) &\in S_{k,t}, \\ f_k(x, T) &= 0, & x &\in \Omega_k. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Умножим уравнение (2.10) на $f = f_k(x, t)$ и проинтегрируем полученное равенство по $Q_{k,T}$. Интегрируя по частям, находим

$$\int (aw + cw_t) \frac{\partial f_k}{\partial \nu} + \iint w(f_{kt} - c\Delta f_{kt} + a\Delta f_k) = 0. \quad (2.13)$$

Здесь и далее через $\iint y$ и $\int y$ обозначаются интегралы от функции $y(x, t)$ соответственно по областям $Q_{k,T}$ и $S_{k,T}$. Покажем, что первый интеграл в левой части (2.13) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Для этого получим равномерные по k интегральные оценки для производных первого и второго порядков от f_k по переменным x_i ($i = \overline{1, n}$).

Введем вспомогательную функцию $\eta(x, t) = (\alpha + |x|^2)^p \exp(\mu t)$, где α , p и μ — некоторые положительные постоянные. Умножим уравнение (2.1) с $f = f_k$ на $\eta\Delta f_k$ и проинтегрируем затем по $Q_{k,T}$. Переносим все члены в одну сторону и применяя формулу Гаусса–Остроградского, неравенство Коши и соотношения (2.12), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2} \iint \frac{d}{dt} [\eta |\nabla f_k|^2] + \frac{\mu}{2} \iint \eta |\nabla f_k|^2 \\ &\quad - \iint \nabla \eta \nabla f_k f_{kt} + \int \eta f_{kt} \frac{\partial f_k}{\partial \nu} + \iint \eta a (\Delta f_k)^2 \\ &\quad - \frac{c}{2} \iint \frac{d}{dt} [\eta (\Delta f_k)^2] + \frac{c\mu}{2} \iint \eta (\Delta f_k)^2 + \iint \nabla f_k \nabla (\eta \omega) \\ &\geq \frac{\mu}{2} \iint \eta [|\nabla f_k|^2 + c(\Delta f_k)^2] + \iint \eta a (\Delta f_k)^2 \\ &\quad - \left(4p^2 c_1 + \frac{1}{2}\right) \iint \eta |\nabla f_k|^2 \\ &\quad - \frac{1}{4c_1} \iint \eta (\alpha + |x|^2)^{-1} f_{kt}^2 - \iint \left(\eta |\nabla \omega|^2 + \frac{\omega^2 |\nabla \eta|^2}{\eta} \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где постоянная c_1 будет выбрана ниже. Умножим теперь уравнение (2.1) с $f = f_k$ на $c_1 \eta (\alpha + |x|^2)^{-1} f_{kt}$ и проинтегрируем полученное равенство по $Q_{k,t}$. Применяя те же рассуждения, что и при выводе (2.14), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4c_1} \iint \eta (\alpha + |x|^2)^{-1} f_{kt}^2 + \frac{c}{c_1} \iint \eta (\alpha + |x|^2)^{-1} |\nabla f_{kt}|^2 \\ &\quad - \frac{M_5}{c_1} \iint \eta a (\Delta f_k)^2 - \frac{4(p-1)c^2}{c_1} \iint \eta (\alpha + |x|^2)^{-2} |\nabla f_{kt}|^2 \\ &\quad - \frac{1}{c_1} \iint \eta (\alpha + |x|^2)^{-1} \omega^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Пусть $c_1 \geq M_5$, $\mu \geq 8p^2 c_1 + 2c^{-1} + 3$, $\alpha \geq 4(p-1)c + p^2$. Тогда, складывая (2.14), (2.15) и отбрасывая некоторые неотрицательные интегралы, находим

$$\iint \eta[|\nabla f_k|^2 + (\Delta f_k)^2] \leq M_6, \quad (2.16)$$

где постоянная M_6 не зависит от k . Так как при выбранном значении α

$$|\nabla \eta^{1/2}|^2 = p^2(\alpha + |x|^2)^{p-2} |x|^2 \exp(\mu t) \leq \eta,$$

то

$$[\nabla(\nabla f_k \eta^{1/2})]^2 = [\Delta f_k \eta^{1/2} + \nabla f_k \nabla \eta^{1/2}]^2 \leq 2\eta[|\nabla f_k|^2 + (\Delta f_k)^2].$$

Отсюда и из соотношения (2.16) вытекает оценка

$$\iint \{|\nabla f_k \eta^{1/2}|^2 + [\nabla(\nabla f_k \eta^{1/2})]^2\} \leq 3M_6. \quad (2.17)$$

Из (2.17) и теоремы вложения С. Л. Соболева следует неравенство

$$\left\| \eta^{1/2} \frac{\partial f_k}{\partial \nu} \right\|_{L^1(S_{k,T})} \leq M_7. \quad (2.18)$$

В силу (2.11), (2.18) и того, что $w \in \mathcal{K}$ первый интеграл в левой части (2.13) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Переходя в (2.13) к пределу при $k \rightarrow \infty$ и учитывая (2.1), получаем

$$\iint_{\Pi_T} w \omega \, dx \, dt = 0. \quad (2.19)$$

Вследствие произвольности функции $\omega(x, t)$ из (2.19) выводим, что $w(x, t) \equiv 0$ в Π_T . Теорема доказана.

Витебский государственный педагогический институт

Поступило

09.07.93

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гилев В. Д. Решение обобщенного уравнения Буссинеска в теории фильтрации жидкости со свободной поверхностью. Дисс. ... к. ф.-м. н. М., 1979.
- [2] Фураев В. З. О разрешимости краевых задач и задачи Коши для обобщенного уравнения Буссинеска в теории нестационарной фильтрации. Дисс. ... к. ф.-м. н. М., 1983.
- [3] Гладков А. Л. Задача Коши в классах растущих функций для некоторых нелинейных псевдопараболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 2. С. 277–288.
- [4] Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949.
- [5] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.