Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Глушак, О возмущении абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 363–369

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1836>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 11:51:27

О ВОЗМУЩЕНИИ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ

А. В. Глушак

Пусть $\mathbf{A}$ – оператор с непустым резольвентным множеством $\rho(\mathbf{A})$, а, следовательно, замкнутый в банаховом пространстве $\mathbb{E}$ с плотной в $\mathbb{E}$ областью определения $D(\mathbf{A})$. При $k > 0$ рассмотрим абстрактную задачу Коши

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = \mathbf{A}u(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Решением уравнения (1) называется функция $u(t)$, которая при $t > 0$ дважды сильно непрерывно дифференцируема, принимает значения, принадлежащие области определения $D(\mathbf{A})$, и удовлетворяет этому уравнению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Задача (1), (2) называется *равномерно корректной*, если существуют заданная на $\mathbb{E}$, коммутирующая с $\mathbf{A}$ операторная функция $\mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A})$ и числа $M \geq 1, \omega \geq 0$ такие, что для любого $u_0 \in D(\mathbf{A})$ функция $\mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A})u_0$ является ее единственным решением, при этом

$$\|\mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A})\| \leq M \exp(\omega t). \quad (3)$$

Функцию $\mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A})$ будем называть операторной функцией Бесселя (ОФБ), а множество операторов, для которых задача (1), (2) равномерно корректна, обозначим через $\mathbb{G}_k$.

Если $\mathbf{A}$ является генератором операторной косинус-функции $\mathbf{C}(t, \mathbf{A})$ (по поводу терминологии см. [1]), т.е. $\mathbf{A} \in \mathbb{G}_0$, то как доказано в [2], $\mathbf{A} \in \mathbb{G}_k$ при любом $k > 0$. Отметим, что вложение $\mathbb{G}_0 \subset \mathbb{G}_k$ строгое (в [3] приводится пример оператора $\mathbf{A}(k) \in \mathbb{G}_k \setminus \mathbb{G}_0$).

В работе исследуется вопрос о принадлежности $\mathbb{G}_k$ возмущенного оператора $\mathbf{A} + \mathbb{B}$, если $\mathbf{A} \in \mathbb{G}_k$. Заметим, что теория возмущений генераторов полугрупп и косинус-функций может быть найдена, например, в [1], [4].

Если $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{G}_0$, то, вообще говоря, оператор $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ (или его замыкание) не принадлежит $\mathbb{G}_0$ даже в случае, когда $\mathbf{C}(t, \mathbf{A}_1)$ и $\mathbf{C}(t, \mathbf{A}_2)$ коммутируют (см. [1]). Однако справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{G}_0$, $D(\mathbf{A}_1) \cap D(\mathbf{A}_2)$ плотно в $\mathbb{E}$, $\mathbf{C}(t, \mathbf{A}_1)$ и $\mathbf{C}(t, \mathbf{A}_2)$ коммутируют. Тогда для $k \geq 1$ $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \in \mathbb{G}_k$, и при этом

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{C}(t \cos \varphi, \mathbf{A}_1) \mathbf{C}(t \sin \varphi, \mathbf{A}_2) d\varphi, \\ \mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) &= \frac{2\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma((k-1)/2)} \\ &\quad \times \int_0^1 (1-s^2)^{(k-3)/2} s \mathbf{Y}_1(ts, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) ds, \quad k > 1. \end{aligned}$$

Утверждение теоремы вытекает из теорем 1, 2 и замечания 6, приведенных в [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из теоремы 3 и замечания 6 работы [5] следует, что при $0 \leq k < 1$ и $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{G}_0$, вообще говоря, $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \notin \mathbb{G}_k$, но функция

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) u_0 &= \mathbf{C}(t, \mathbf{A}_1) u_0 + \frac{2t}{\pi} \mathbf{A}_2 \int_0^t \mathbf{C}(y, \mathbf{A}_1) dy \\ &\quad \times \int_0^1 \sqrt{1-\tau^2} \mathbf{C}(\tau \sqrt{t^2-y^2}, \mathbf{A}_2) u_0 d\tau \end{aligned} \quad (4)$$

является единственным решением задачи (1), (2) при $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$. Если $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \in \mathbb{G}_0$, что справедливо, например, в случае, когда $\mathbf{A}_2$ — ограниченный оператор, то

$$\mathbf{U}_0(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = \mathbf{C}(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2).$$

В дальнейшем нам понадобятся утверждения о связи решений задачи (1), (2) при различных k .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{G}_k$ при некотором $k \geq 0$, тогда для $p > k$ $\mathbf{A} \in \mathbb{G}_p$, и при этом

$$\mathbf{Y}_p(t, \mathbf{A}) = \frac{2}{B((p-k)/2, (k+1)/2)} \int_0^1 (1-s^2)^{(p-k)/2-1} s^k \mathbf{Y}_k(ts, \mathbf{A}) ds. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственной проверкой убеждаемся, что правая часть формулы (5), обозначим ее $\mathbf{U}_p(t, \mathbf{A})u_0$, является решением задачи (1), (2) с параметром p вместо k . Очевидно, что для $\mathbf{U}_p(t, \mathbf{A})u_0$ справедлива оценка (3).

Доказательство единственности будем вести от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два решения задачи (1), (2) при $k = p$. Рассмотрим функцию двух переменных

$$w(t, s) = f(\mathbf{U}_p(s)(u_1(t) - u_2(t))),$$

где $f \in \mathbb{E}^*$, $t, s \geq 0$. Она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{p}{t} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{p}{s} \frac{\partial w}{\partial s}, \quad t, s > 0,$$

и условиям $w(0, s) = \partial w(0, s)/\partial t = 0$.

Из полученной в [6] явной формулы для решения указанной задачи следует $w(t, s) \equiv 0$. В силу произвольности $f \in \mathbb{E}^*$ при $s = 0$ получаем $u_1(t) \equiv u_2(t)$, и единственность, а вместе с нею и существование ОФБ $\mathbf{Y}_p(t, \mathbf{A}) = \mathbf{U}_p(t, \mathbf{A})$ доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как уже отмечалось, если $\mathbf{A} \in \mathbb{G}_k$ при $k > 0$, то, вообще говоря, $\mathbf{A} \notin \mathbb{G}_0$, однако, как и при доказательстве теоремы 3 из [5], с помощью $\mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A})$ можно построить единственное решение $\mathbf{U}_0(t, \mathbf{A})u_0$ задачи (1), (2) при $k = 0$ по формуле

$$\mathbf{U}_0(t, \mathbf{A})u_0 = \frac{t}{(2m-1)!!} \left(\frac{1}{t} \frac{d}{dt} \right)^m \left(t^{2m-1} \mathbf{V}_{2m}(t, \mathbf{A})u_0 \right), \quad (6)$$

где $u_0 \in D(\mathbf{A}^m)$, m – наименьшее натуральное число, такое, что $2m \geq k$.

Обозначим через $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ пространство всех линейных ограниченных операторов из $\mathbb{E}$ в $\mathbb{E}$ и сформулируем теорему о возмущении оператора $\mathbf{A} \in \mathbb{G}_k$ ограниченным оператором. Будем считать, что $k > 0$, так как случай $k = 0$ уже рассмотрен в теореме 1 и замечании 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть для некоторого $k > 0$ $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{G}_k$, $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$, $\mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1)$ и $\mathbf{A}_2$ коммутируют. Тогда $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 \in \mathbb{G}_p$ для любого $p \geq k$. При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) &= \frac{(-1)^m \Gamma((k+1)/2) t^2 \mathbf{A}_2}{2^{m+1} \Gamma(k/2 + 1) \Gamma(m + 1/2)} \\ &\times \int_0^1 s^{2m} \left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \right)^m \left((1-s^2)^{k/2} {}_1F_2 \left(1; \frac{k}{2} + 1, 2; t^2(1-s)^2 \mathbf{A}_2/4 \right) \right) \\ &\times \mathbf{Y}_{2m}(ts, \mathbf{A}_1) ds + \mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1), \end{aligned} \quad (7)$$

где m – наименьшее число, такое, что $2m \geq k$,

$${}_1F_2\left(1; \frac{k}{2} + 1, 2; z^2\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right) z^{2i} / \left(\Gamma\left(i + 1 + \frac{k}{2}\right) \Gamma(i + 2)\right)$$

– обобщенная гипергеометрическая функция, а $\mathbf{Y}_p(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)$ при $p > k$ определяется через $\mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)$ по формуле (5), записанной для $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение задачи (1), (2) при $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ обозначим через $\mathbf{U}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)u_0$, и пусть $u_0 \in D(\mathbf{A}_1^m)$. Комбинируя формулы (5), (4) и учитывая, что

$$\mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_2) = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^{2i} \mathbf{A}_2^i / \left(i! \Gamma\left(i + \frac{k+1}{2}\right)\right),$$

получим

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)u_0 &= \frac{2}{B(k/2, 1/2)} \int_0^1 (1-s^2)^{k/2-1} \\ &\quad \times \left(\mathbf{U}_0(ts, \mathbf{A}_1) + \frac{1}{2} ts \mathbf{A}_2 \int_0^{ts} \mathbf{U}_0(y, \mathbf{A}_1) \mathbf{Y}_3(\sqrt{t^2 s^2 - y^2}, \mathbf{A}_2) u_0 dy \right) \\ &= \mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1)u_0 + \frac{t \mathbf{A}_2}{B(k/2, 1/2)} \int_0^t \mathbf{U}_0(y, \mathbf{A}_1) dy \\ &\quad \times \int_{y/t}^1 (1-s^2)^{k/2-1} s \mathbf{Y}_3(\sqrt{t^2 s^2 - y^2}, \mathbf{A}_2) u_0 ds \\ &= \mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1)u_0 + \frac{t \mathbf{A}_2}{B(k/2, 1/2)} \int_0^t \mathbf{U}_0(y, \mathbf{A}_1) dy \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}_2^i u_0}{2^{2i} t^k \Gamma(i+1) \Gamma(i+2)} \\ &\quad \times \int_0^{\sqrt{t^2 + y^2}} (t^2 - y^2 - x^2)^{k/2-1} x^{2i+1} dx \\ &= \mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1)u_0 + \frac{t^{1-k} \mathbf{A}_2}{kB(k/2, 1/2)} \\ &\quad \times \int_0^t (t^2 - y^2)^{k/2} {}_1F_2\left(1; \frac{k}{2} + 1, 2; (t^2 - y^2) \mathbf{A}_2/4\right) \mathbf{U}_0(y, \mathbf{A}_1)u_0 dy. \end{aligned}$$

Представив $\mathbf{U}_0(y, \mathbf{A}_1)u_0$ по формуле (6), после интегрирования по час-

тjам будем иметь

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)u_0 &= \mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1)u_0 + (-1)^m \frac{t^{1-k} \mathbf{A}_2}{k(2m-1)!! B(k/2, 1/2)} \\
 &\times \int_0^t y^{2m} \left(\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \right)^m \left((t^2 - y^2)^{k/2} {}_1F_2 \left(1; \frac{k}{2} + 1, 2; (t^2 - y^2) \mathbf{A}_2/4 \right) \right) \\
 &\times \mathbf{Y}_{2m}(y, \mathbf{A}_1)u_0 dy \\
 &= (-1)^m \frac{\Gamma((k+1)/2)}{2^{m+1} \Gamma(k/2+1) \Gamma(m+1/2)} t^2 \mathbf{A}_2 \\
 &\times \int_0^1 s^{2m} \left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \right)^m \left((1-s^2)^{k/2} {}_1F_2 \left(1; \frac{k}{2} + 1, 2; t^2(1-s^2) \mathbf{A}_2/4 \right) \right) \\
 &\times \mathbf{Y}_{2m}(ts, \mathbf{A}_1)u_0 ds + \mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1)u_0.
 \end{aligned}$$

Установим, далее, оценку полученного решения $\mathbf{U}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)u_0$. С этой целью, используя (5), представим его в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)u_0 &= \mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1)u_0 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma((k+1)/2) t^2 \mathbf{A}_2}{\Gamma(m+1/2)} \\
 &\times \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} s^{2m} \left(\frac{k}{2} + i \right) \left(\frac{k}{2} + i - 1 \right) \cdots \left(\frac{k}{2} + i - m + 1 \right) \\
 &\times (1-s^2)^{k/2+i-m} \left(\frac{1}{4} t^2 \mathbf{A}_2 \right)^i \frac{\mathbf{Y}_{2m}(ts, \mathbf{A}_1)u_0}{\Gamma(i+k/2+1) \Gamma(i+2)} ds \\
 &= \mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1)u_0 + \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) t^2 \mathbf{A}_2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} t^2 \mathbf{A}_2 \right)^i \\
 &\times \frac{\mathbf{Y}_{k+2+2i}(t, \mathbf{A}_1)u_0}{\Gamma(i+(k+3)/2) \Gamma(i+2)}
 \end{aligned} \tag{8}$$

и оценим с помощью неравенства (3). Имеем

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{U}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)u_0\| &\leq M \exp(\omega_1 t) \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \\
 &\times \left(\frac{t}{2} \sqrt{\|\mathbf{A}_2\|} \right)^{(1-k)/2} I_{(k-1)/2}(t \sqrt{\|\mathbf{A}_2\|}) \|u_0\|,
 \end{aligned}$$

где I_ν – модифицированная функция Бесселя. Используя асимптотические свойства функции I_ν , окончательно получаем

$$\|\mathbf{U}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)u_0\| \leq M_1 \exp(t\omega_1 + t\sqrt{\|\mathbf{A}_2\|}) \|u_0\|. \tag{9}$$

При $t \geq 0$ операторная функция $\mathbf{U}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)$ может быть по непрерывности расширена до линейного ограниченного оператора, определенного на всем $\mathbb{E}$. При этом для нее будут справедливы соотношения (1), если $u_0 \in D(\mathbf{A}_1)$, (2) и (9). Отметим, что $\mathbf{U}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)$ удовлетворяет равенству (2) при $u_0 \in \mathbb{E}$ в силу теоремы Банаха–Штейнгауза и плотности $D(\mathbf{A}_1^m)$ в $\mathbb{E}$. Чтобы убедиться, что она удовлетворяет равенству (1) при $u_0 \in D(\mathbf{A}_1)$, достаточно применить доказанное равенство к $v_0 = \mathbf{R}^{m-1}(\lambda, \mathbf{A}_1)u_0 \in D(\mathbf{A}_1^m)$, где $\lambda \in \rho(\mathbf{A}_1)$, $\mathbf{R}(\lambda, \mathbf{A}_1) = (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1}$, и воспользоваться коммутруемостью $\mathbf{R}(\lambda, \mathbf{A}_1)$ с $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1)$.

Оценка (9) вместе с единственностью, которая доказывается так же, как и при доказательстве теоремы 2, позволяют сделать вывод о том, что $\mathbf{U}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) - \text{ОФБ}$, т.е. $\mathbf{U}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = \mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)$, и теорема тем самым доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда

$$\|\mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) - \mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1)\| \rightarrow 0$$

при $\|\mathbf{A}_2\| \rightarrow 0$ равномерно по любому компактному из $[0, \infty)$.

Действительно, из (8) вытекает

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) - \mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1))u_0\| \\ & \leq M\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\frac{1}{4}t^2\|\mathbf{A}_2\|\exp(\omega_1 t)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}t^2\|\mathbf{A}_2\|\right)^i}{\Gamma(i+(k+3)/2)\Gamma(i+2)}\|u_0\| \\ & = M_1\exp(\omega_1 t)\|u_0\|\left(\left(\frac{1}{2}t\sqrt{\|\mathbf{A}_2\|}\right)^{(1-k)/2}I_{(k-1)/2}(t\sqrt{\|\mathbf{A}_2\|})\right. \\ & \quad \left.-\frac{1}{\Gamma((k+1)/2)}\right)\rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\|\mathbf{A}_2\| \rightarrow 0$.

ПРИМЕР. Пусть $\mathbb{E} = \{f(x) : |f(x)| \leq c \exp(\omega x), x \in [0, \infty)\}$,

$$\|f\| = \sup_{[0, \infty)} |f(x) \exp(-\omega x)|, \quad \mathbf{A}_1 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{k}{x} \frac{d}{dx},$$

$$\mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}, \quad D(\mathbf{A}_1) = \left\{ f(x) \in \mathbb{E} : f''(x) + \frac{k}{x} f'(x) \in \mathbb{E} \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_k(t, \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)u_0(x) &= T_x^y(k)u_0(x) + \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)t^2\mathbf{A}_2 \\ &\quad \times \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}t^2\mathbf{A}_2\right)^i \frac{T_x^y(2i+k+2)u_0(x)}{\Gamma(i+2)\Gamma(i+(k+3)/2)}, \end{aligned}$$

где

$$T_x^y(k)u_0(x) = \frac{1}{B(k/2, 1/2)} \int_0^\pi \sin^{k-1} \varphi \cdot u_0(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}) d\varphi$$

– оператор обобщенного сдвига (см. [6]), соответствующий уравнению (1).

Воронежский государственный технический университет

Поступило

E-mail: glushak@vpicnit.voronezh.su

07.02.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Матем. анализ. М.: ВИНТИ, 1990. С. 87–102.
- [2] Глушак А. В., Кононенко В. И., Шмулевич С. Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Изв. вузов. Матем. 1986. № 6. С. 55–56.
- [3] Костин В. А. Об аналитических полугруппах и косинус-функциях // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 4. С. 796–799.
- [4] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [5] Глушак А. В., Шмулевич С. Д. Интегральные представления решений одного сингулярного уравнения, содержащего сумму коммутирующих операторов // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 831–838.
- [6] Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // УМН. 1951. Т. 1. № 2(42). С. 102–143.