Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. И. Григорчук, Весовые функции на группах и критерии аменабельности алгебр Берлинга, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 370–382

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1837>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:18:07

ВЕСОВЫЕ ФУНКЦИИ НА ГРУППАХ И КРИТЕРИИ АМЕНАБЕЛЬНОСТИ АЛГЕБР БЕРЛИНГА

Р. И. Григорчук

§ 1. Введение

Пусть G – группа, $\mathbb{R}_+$ – множество положительных вещественных чисел. Функция $\omega: G \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется весом, если она полумультимпликативна: $\omega(gh) \leq \omega(g)\omega(h)$, $g, h \in G$.

В основном мы будем рассматривать группы, наделенные дискретной топологией. В случае, когда G – топологическая группа, при определении веса дополнительно накладывается условие его измеримости, непрерывности или (односторонней или двусторонней) равномерной непрерывности. Помимо теории весов на топологических группах, целесообразно также развивать теорию весов на топологических или даже полутопологических полугруппах.

Изучение весовых функций на группах интересно по многим причинам. Например, они имеют отношение к гармоническим функциям, ограниченным когомологиям, банаховым алгебрам. Ниже об этом будет сказано подробнее. По-видимому, существуют и другие области приложений теории весов.

Одна из основных задач о весах состоит в исследовании асимптотического поведения весов на бесконечности в зависимости от алгебраических свойств группы.

Логарифм веса есть полуаддитивная функция, которую будем называть аддитивным весом. Полуаддитивные функции на группах $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{Z}^d$ исследованы достаточно подробно (см., например, [1]–[4]).

Если ω и η – два веса на G , то функции $\omega\eta$, $\omega + \eta$ также являются весами, а $\lambda\omega$ (λ – скаляр) гарантированно является весом, только при условии,

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96–01–00974, и фонда INTAS, грант № 94–3420.

что $\lambda \geq 1$ (при $\lambda < 1$ функция $\lambda\omega$ уже не обязана быть весом). По этой причине, а также в силу других причин (о чем речь пойдет ниже) удобно расширить понятие веса.

Функция $\omega: G \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется полувесом, если существует постоянная $C > 0$ такая, что $\omega(gh) \leq c\omega(g)\omega(h)$, $g, h \in G$. Всякий полувес может быть превращен в вес умножением на соответствующую константу c . Множество полувесов, объединенное с нулевой функцией, образует выпуклый конус в пространстве функций на группе.

Если $\eta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — монотонно возрастающий вес на полугруппе $\mathbb{R}_+$, а ω — вес на G , то $\eta \circ \omega$ также вес на G . Если $\varphi: G \rightarrow H$ — гомоморфизм, а η — вес на H , то определен вес $\eta \circ \varphi$ на G .

Так как всякая конечнопорожденная группа является гомоморфным образом свободной группы соответствующего ранга, то изучение весов на свободных группах представляет особый интерес. Другой полюс интереса — веса на нильпотентных, разрешимых, аменабельных группах.

Если ω — вес, то $\hat{\omega}(g) = \omega(g^{-1})$, $\Omega(g) = \omega(g)\omega(g^{-1})$ также веса. (Ω в дальнейшем будет играть важную роль.) Вес ω симметричен, если $\omega(g) = \omega(g^{-1})$ и антисимметричен, если $\omega(g^{-1}) = 1/\omega(g)$.

Вес ω ограничен сверху, если существует постоянная c такая, что $\omega(g) \leq c$, $g \in G$. Всякий ограниченный сверху вес ограничен также и снизу положительной константой:

$$\omega(1) = \omega(gg^{-1}) \leq \omega(g)\omega(g^{-1}) \leq c\omega(g);$$

поэтому $\omega(g) \geq \omega(1)/c$, $g \in G$.

Как легко видеть, всякий симметричный вес ω на группе ограничен снизу константой $\sqrt{\omega(1)}$.

Два веса ω и η называются эквивалентными, если существует постоянная $c > 1$ такая, что

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\omega(g)}{\eta(g)} \leq c, \quad g \in G.$$

Функцией роста веса ω называется функция

$$\gamma_\omega(n) = \text{card}\{g \in G : \log \omega(g) \leq n\} \quad (1)$$

неотрицательного аргумента n , характеризующая рост веса на бесконечности. Она может принимать и бесконечные значения. (1) также называется функцией роста аддитивного полувеса $\log \omega(g)$.

Если G есть конечнопорожденная группа с системой порождающих A , а $\partial_A(g)$ обозначает длину элемента g относительно A , то $\partial_A(g)$ есть аддитивный вес на G , мажорирующий другие веса в том смысле, что

для любого аддитивного веса ρ существует константа $M > 0$ такая, что $\rho(g) \leq M \partial_A(g)$, $g \in G$.

Функция роста

$$\gamma_A(n) = \text{card}\{g \in G : \partial_A(g) \leq n\}$$

аддитивного веса ∂_A называется функцией роста группы G и играет важную роль в теории групп (см. [5]).

Другой интересный пример аддитивного веса возникает в ситуации когда группа G изоморфна коммутанту группы H . Тогда число $k(g)$, равное минимальному числу коммутаторов в представлениях вида

$$g = \prod_{i=1}^n [x_i, y_i],$$

$g \in [H, H]$, $x_i, y_i \in G$, определяет аддитивный симметричный вес k на G .

Антивес – это функция $\eta: G \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\eta(gh) \geq \eta(g)\eta(h)$, $g, h \in G$. Если ω – вес, то $1/\omega$ – антивес, и наоборот.

Пример антивеса может быть построен при помощи случайного блуждания на G . Пусть $p(g)$ – распределение вероятностей на G , $P_{g,h}^{(n)}$ – вероятность перехода из g в h за n шагов для случайного блуждания на G , в котором переход $g \rightarrow gl$ за один шаг происходит с вероятностью $p(l)$, $g, l \in G$. Тогда функция

$$\omega(g) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{1,g}^{(n)} \quad (2)$$

является антивесом, определенным в ситуации, когда рассматриваемое случайное блуждание невозвратно (в этом случае правая часть (2) конечна). Действительно,

$$\begin{aligned} \omega(gh) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{1,g}^{(n)} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n P_{1,g}^{(i)} P_{g,gh}^{(n-i)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{1,g}^{(n)} \sum_{n=0}^{\infty} P_{1,h}^{(n)} = \omega(g)\omega(h), \end{aligned}$$

ибо $P_{g,gh}^{(n)} = P_{1,h}^{(n)}$ в силу левой инвариантности правого случайного блуждания на G .

Если распределение симметрично, $p(g) = p(g^{-1})$, то антивес ω также симметричен.

§ 2. Веса и свойство “тихоновости”

Пусть ω – вес на группе G . Функция $f: G \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется ω – функцией, если $f(gh) \leq \omega(g)f(h)$, $g, h \in G$. Множество V_ω ω – функций замкнуто

относительно операций умножения на положительные скаляры и сложения. Таким образом, $\tilde{V}_\omega = V_\omega \cup \{0\}$ есть выпуклый ненулевой конус в пространстве функций на G .

Правый сдвиг ω -функции есть снова ω -функция:

$$(R_x f)(gh) = f(ghx) \leq \omega(g)f(hx) = \omega(g)R_x f(h).$$

Тем самым, группа G действует на $\tilde{V}_\omega$ аффинными преобразованиями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. также [6]). Если $f \in V_\omega$, то функции

$$\Theta(g) = \sup_{h \in G} \frac{f(gh)}{f(h)}, \quad \xi(g) = \inf_{h \in G} \frac{f(gh)}{f(h)}$$

являются соответственно весом и антивесом, причем выполнены неравенства

$$\frac{1}{\omega(g^{-1})} \leq \xi(g) \leq \frac{f(gh)}{f(h)} \leq \Theta(g) \leq \omega(g), \quad g, h \in G. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что Θ – вес (то, что ξ – антивес, доказывается аналогично). Имеем

$$\begin{aligned} \Theta(gh) &= \sup_t \frac{f(ght)}{f(t)} = \sup_t \frac{f(ght)}{f(ht)} \frac{f(ht)}{f(t)} \\ &\leq \sup_t \frac{f(ght)}{f(ht)} \sup_t \frac{f(ht)}{f(t)} = \sup_l \frac{f(gl)}{f(l)} \sup_t \frac{f(ht)}{f(t)} = \Theta(g)\Theta(h). \end{aligned}$$

Докажем, что выполнено неравенство

$$\frac{1}{\omega(g^{-1})} \leq \frac{f(gh)}{f(h)}. \quad (4)$$

С этой целью сделаем в неравенстве $f(gh) \leq \omega(g)f(h)$ подстановку $g' = gh$. Получим $f(g') \leq \omega(g)f(g^{-1}g')$ или после подставки $g' \rightarrow h$, $g \rightarrow g^{-1}$ приходим к (4).

Группа G называется *тихоновской*, если для любого аффинного действия G на выпуклом конусе K с компактной базой в локально выпуклом топологическом векторном пространстве существует неподвижный луч. Класс тихоновских групп был определен Фюрстенбергом [7]. Всякая нильпотентная и, в частности, коммутативная группа является тихоновской [6]. Существуют разрешимые тихоновские группы экспоненциального роста [8]. Критерий “тихоновости” полициклических групп дан в [9]. Всякая тихоновская группа является аменабельной [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого веса ω на тихоновской группе G существует мультипликативный характер $\chi: G \rightarrow \mathbb{R}_+$ такой, что $\omega(g) \geq \chi(g)$, $g \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим аффинное действие G правыми сдвигами на выпуклом конусе $\tilde{V}_\omega$, образованном ω -функциями и нулем. Функционал Φ , определенный по формуле $\Phi(f) = f(1)$, непрерывен в (локально выпуклой) топологии поточечной сходимости в пространстве $E(G)$ вещественнозначных функций на G .

В силу неравенств

$$\frac{1}{\omega(g^{-1})} \leq f(g) \leq \omega(g), \quad f \in B_\omega = \{f \in \tilde{V}_\omega : \Phi(f) = 1\},$$

вытекающих из (3), база B_ω конуса $\tilde{V}_\omega$ является компактным множеством. Следовательно, существует G – неподвижный луч, проходящий через некоторую точку $\chi \in B_\omega$. Функция χ , как легко видеть, является характером на G .

Для нетихоновских групп оценка веса снизу характером не всегда имеет место. Например, на свободной группе ранга ≥ 2 существуют веса, не ограниченные снизу никаким характером (см. конец § 4).

§ 3. Веса и гармонические функции

Пусть G – конечнопорожденная группа, $p(g)$ – финитное распределение вероятностей на G , носитель которого порождает G , P – соответствующий марковский оператор, действующий на функции по формуле

$$(Pf)(g) = \sum_{h \in G} p(h)f(gh).$$

Функция f называется λ -гармонической (λ – скаляр), если $Pf = \lambda f$. Левый сдвиг λ -гармонической функции есть λ -гармоническая функция. Положительные λ -гармонические функции образуют конус K_λ в пространстве $E(G)$. Если $\lambda > 1$, то конус K_λ не нулевой [8] причем, как легко видеть, базис

$$B_\lambda = \{f \in K_\lambda : \Phi(f) = 1\}$$

конуса K_λ компактен относительно топологии поточечной сходимости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для всякой конечнопорожденной группы G финитного вероятностного распределения $p(g)$, носитель которого порождает G , и веса ω на G в множестве V_ω ω -функций существует положительная λ -гармоническая функция для некоторого $\lambda > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим непрерывное аффинное отображение $P: \tilde{V}_\omega \rightarrow \tilde{V}_\omega$,

$$(Pf)(g) = \sum_{h \in G} p(h)f(gh).$$

Оно определяет непрерывное отображение $\tilde{P}: B_\omega \rightarrow B_\omega$ базы B_ω конуса $\tilde{V}_\omega$:

$$(\tilde{P}f)(g) = \frac{(Pf)(g)}{\Phi(Pf)},$$

которое по теореме Шаудера–Тихонова обладает неподвижной точкой $x \in B_\omega$. Тогда $Px = \lambda x$ для некоторого $\lambda > 0$, т.е. x является λ -гармонической функцией.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всякого веса ω и финитного распределения вероятностей на G существуют $\lambda > 0$ и λ -гармоническая функция f такие, что $f \in B_\omega$, и, в частности, выполнено неравенство $f(g) \leq \omega(g)$, $g \in G$.

Мы видим, что каждому весу ω соответствует положительная λ -гармоническая функция f такая, что $f \leq \omega$. Наоборот, по всякой λ -гармонической функции f можно построить мажорирующий эту функцию вес следующим образом.

Обозначим через K_f выпуклый конус, порожденный левыми сдвигами функции f . Любая функция $f \in K_f$ является λ -гармонической, поэтому база

$$B_f = \{f \in K_f : \Phi(f) = 1\}$$

конуса K_f компактна (легко видеть, что существует функция $\xi(g)$ на G , определенная распределением $p(g)$ и числом λ такая, что $f(g) \leq \xi(g)$, когда $f \in B_f$ и $g \in G$). Группа G действует на K левыми сдвигами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 [6]. Пусть группа G действует аффинными преобразованиями на выпуклом конусе K с компактной базой B в локально выпуклом топологическом векторном пространстве E , Φ – линейный непрерывный функционал на E , определяющий базу B . Тогда функция $\omega(g) = \sup_{x \in B} \Phi(gx)$ является весом на G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что ω есть вес, вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$\begin{aligned} \omega(gh) &= \sup_{x \in B} \Phi(ghx) = \sup_{x \in B} \frac{\Phi(ghx)}{\Phi(hx)} \Phi(hx) \\ &\leq \sup_{x \in B} \Phi\left(g\left(\frac{hx}{\Phi(hx)}\right)\right) \sup_{x \in B} \Phi(hx) \\ &= \sup_{y \in B} \Phi(gy) \sup_{x \in B} \Phi(hx) = \omega(g)\omega(h), \end{aligned}$$

имеющей место поскольку $y = hx/\Phi(hx) \in B$.

Следующее утверждение усиливает утверждение предложения 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для всякого веса ω на конечнопорожденной группе G и всякого финитного вероятностного распределения $p(g)$, носитель которого порождает G , существуют $\mu > 0$, μ -гармоническая функция ω_0 и неотрицательная функция φ на G такая, что $\omega = \omega_0 + T\varphi$, где

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P^n$$

и $\lambda = 1/\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\mu = \sum_{g \in G} p(g)\omega(g)$$

и положим $\lambda = 1/\mu$. Тогда

$$(P\omega)(g) = \sum_{h \in G} p(h)\omega(gh) \leq \omega(g) \sum_{h \in G} p(h)\omega(h) = \mu\omega(g),$$

т.е. $P\omega \leq \mu\omega$. Пусть $\varphi = \omega - \lambda P\omega \geq 0$. Для любого $n \geq 1$ имеет место соотношение

$$\varphi + \lambda P\varphi + \dots + \lambda^{n-1}P^{n-1}\varphi + \lambda^n P^n \omega = \omega.$$

Следовательно, существуют пределы

$$T\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \lambda^i P^i \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P^n \varphi$$

и

$$\omega_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n P^n \omega,$$

причем $\lambda P\omega_0 = \omega_0$.

Мы видим, что информация о λ -гармонических функциях позволяет делать выводы об асимптотическом поведении весов на бесконечности. К сожалению, описание крайних точек компакта λ -гармонических функций, равных 1 в единичном элементе, дано только для почти нильпотентных групп [6] (см. также [8]) и для полупростых групп Ли в случае сферических распределений [7].

§ 4. Веса и ограниченные когомологии

Определение полувеса было дано во введении. Соответственно, аддитивный полувес – это функция $\rho: G \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая неравенству

$$\rho(gh) \leq \rho(g) + \rho(h) + L, \quad g, h \in G,$$

где L – некоторая константа. Прибавлением константы L полувес ρ превращается в аддитивный вес.

Во введении было также дано определение эквивалентности полувесов. Для наших целей целесообразно несколько ослабить эту эквивалентность.

Два полувеса ω и η называются слабо эквивалентными, если существует мультипликативный характер $\chi: G \rightarrow \mathbb{R}_+$ и константа $c > 1$ такие, что

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\omega(g)}{\eta(g)\chi(g)} \leq c, \quad g \in G. \quad (5)$$

Логарифмирование неравенств (5) приводит к определению слабой эквивалентности аддитивных полувесов. Аддитивные полувеса ρ и μ слабо эквивалентны, если существует постоянная $L > 0$ и характер $\nu: G \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что выполнено неравенство

$$-L \leq \rho(g) - \mu(g) - \nu(g) \leq L, \quad g \in G. \quad (6)$$

Ограниченные когомологии $H_b^*(G)$ группы G определяются с помощью бар-комплекса Эйленберга–Маклейна–Экмана аналогично тому, как определяются обычные когомологии $H^*(G, \mathbb{R})$ тривиального G -модуля $\mathbb{R}$. Нужно только вместо комплекса всех коцепей использовать комплекс ограниченных по модулю коцепей со значениями в $\mathbb{R}$.

Вложение $C_b^{(*)}(G) \hookrightarrow C^{(*)}(G)$ пространства ограниченных коцепей в пространство всех коцепей на группе G индуцирует гомоморфизм $\Theta: H_b^*(G) \rightarrow H^*(G, \mathbb{R})$, ядро которого в [10] названо сингулярной частью группы ограниченных когомологий и обозначено $H_{b,2}^*(G)$ ($H_{b,1}^*(G)$ – это образ Θ , так что $H_b^*(G) = H_{b,1}^*(G) \oplus H_{b,2}^*(G)$ – прямая сумма векторных пространств).

Полувес ω называется слабо ограниченным, если полувес $\Omega = \omega\hat{\omega}$ ограничен сверху (а значит, и снизу).

Соответственно, аддитивный полувес η слабо ограничен, если ограничен полувес $\eta(g) + \eta(g^{-1})$.

ТЕОРЕМА 1. *Классы слабой эквивалентности слабо ограниченных аддитивных полувесов на группе G образуют векторное пространство над $\mathbb{R}$, изоморфное пространству $H_{b,2}^{(2)}(G)$.*

ЛЕММА 1. *Пусть вес ω слабо ограничен и $\Omega(g) = \omega(g)\omega(g^{-1}) \leq c$, $g \in G$. Тогда*

$$\frac{1}{c} \omega(g)\omega(h) \leq \omega(gh), \quad g, h \in G.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $\Omega(g) \leq c$ вытекает, что $\omega(g^{-1}) \leq c/\omega(g)$, откуда

$$\omega(g) = \omega(ghh^{-1}) \leq \omega(gh)\omega(h^{-1}) \leq \frac{\omega(gh)c}{\omega(h)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Таким образом, слабо ограниченный полувес ω удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{c}\omega(g)\omega(h) \leq \omega(gh) \leq c\omega(g)\omega(h), \quad g, h \in G,$$

где $c > 1$ – некоторая постоянная.

Соответственно, аддитивный слабо ограниченный полувес ρ удовлетворяет неравенствам

$$\rho(g) + \rho(h) - L \leq \rho(gh) \leq \rho(g) + \rho(h) + L, \quad g, h \in G, \quad (7)$$

где $L > 0$ – некоторая постоянная или, что эквивалентно, ρ удовлетворяет неравенству $\|\delta^1 \rho\|_\infty \leq L$, где δ^1 – кограничный оператор, действующий по обычному правилу

$$(\delta^1 \rho)(g, h) = \rho(g) - \rho(gh) + \rho(h).$$

Функция $\rho: G \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая неравенствам (7), названа в [10] *квазихарактером*. Очевидно, относительно операции сложения функций, квазихарактеры образуют пространство $QX(G)$, которое содержит подпространства $X(G)$ -аддитивных характеров и $B(G)$ -ограниченных функций. Таким образом, классы слабой эквивалентности аддитивных слабо ограниченных полувесов находятся во взаимно однозначном соответствии с классами $QX(G)/X(G) \oplus B(G)$, и, тем самым, на множестве этих классов естественным образом определена структура векторного пространства. В [10] доказан изоморфизм

$$H_{b,2}^{(2)}(G) \approx QX(G)/X(G) \oplus B(G),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Для всякого полувеса ω на группе G можно определить функцию

$$\delta_\omega(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\omega(g^n)}$$

(предел существует ввиду полумультипликативности ω).

Тогда, как нетрудно видеть, $\delta_\omega(g^n) = (\delta_\omega(g))^n$, $n \geq 1$, и δ_ω есть полувес, если группа G коммутативна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть ω есть слабо ограниченный полувес на группе G . Тогда δ_ω – полувес, являющийся мультипликативным характером на каждой циклической подгруппе G . Кроме того, функция δ_ω постоянна на классах сопряженных элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для аддитивного полувеса $\eta = \log \omega$ функции δ_ω соответствует функция

$$\nu_\omega(g) = (\log \delta_\omega)(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \omega(g^n).$$

В [10, теорема 3.5] (см. также [11] со ссылкой на Бессона) доказано, что для всякого квазихарактера $\eta \in QX(G)$ существует квазихарактер $\eta_0 \in QX(G)$ такой, что $|\eta - \eta_0|$ – ограниченная функция, и η_0 есть аддитивный характер на всякой циклической (и даже аменабельной) подгруппе G . Очевидно, что η_0 совпадает с $\nu_\omega(g)$.

Функции $\eta_0 \in QX(G)$, являющиеся характерами на циклических подгруппах, называются псевдохарактерами. Они постоянны на классах сопряженности [10, лемма 3.4]. Кроме того, имеет место естественный изоморфизм векторных пространств

$$H_{b,2}^{(2)}(G) \approx PX(G)/X(G),$$

где $PX(G)$ – пространство псевдохарактеров на группе G .

ПРИМЕР. Пусть F_m – свободная группа ранга $m \geq 2$, $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ – система порождающих. Элементы F_m отождествляются с несократимыми словами над алфавитом $A \cup A^{-1}$. Для любого элемента $w \in F_m$ длины ≥ 2 определена функция $f_w: F_m \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f_w(g) = \sharp_w(g) - \sharp_{w^{-1}}(g),$$

где $\sharp_w(g)$ обозначает число вхождений w в слово, представляющее элемент $g \in F_m$. Эта функция, как легко видеть, (см. [12], [10]) является квазихарактером, не ограниченным ни снизу, ни сверху, а функции такого вида порождают $H_b^2(F_m)$ и из них легко строится базис в $H_b^2(F_m)$ [10]. Так как $f_w(a_i^{\pm 1}) = 0$ для любого слова w длины ≥ 2 , то ясно, что не существует аддитивного характера $\chi: F_m \rightarrow \mathbb{R}$ такого, что $f_w(g) \geq \chi(g)$, $g \in F_m$.

Прибавлением соответствующей константы квазихарактер f_w превращается в аддитивный вес, не ограниченный снизу никаким аддитивным характером.

Можно показать, что на произвольной группе G с ненулевой $H_{b,2}^2(G)$ существует вес, не ограниченный снизу характером.

Интересный пример симметричного полувеса $\gamma(g)$ на свободных произведениях и, в частности, на некоммутативных свободных группах построен в [12]. Этот полувес ограничен на коммутанте, равномерно ограничен на элементах вида g^n , $g \in G$, где $n > 1$ – фиксированное число, но не ограничен на всей группе.

§ 5. Критерий аменабельности алгебр Берлинга

Повсякому весу (или даже полувесу) на группе G можно определить банахову алгебру $l^1(G, \omega)$, часто называемую алгеброй Берлинга. Элементами $l^1(G, \omega)$ служат формальные линейные комбинации $x = \sum_g \lambda(g)g$ элементов группы с вещественными коэффициентами $\lambda(g)$ такие, что

$$\sum_{g \in G} |\lambda(g)| \omega(g) < \infty$$

(левая часть предыдущего неравенства определяет норму элемента $x \in l^1(G, \omega)$). Сложение в этой алгебре определено покомпонентно, а умножение определено сверткой:

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda(g)g \right) \left(\sum_{g \in G} \mu(g)g \right) = \sum_{g \in G} \left(\sum_{st=g} \lambda(s)\mu(t) \right) g.$$

В частности, единичный вес $\omega \equiv 1$ определяет классическую групповую алгебру $l^1(G)$.

Эквивалентным весам соответствуют изоморфные алгебры.

Банахова алгебра B называется аменабельной, если $H^1(B, X^*) = 0$ (т.е. все ограниченные дифференцирования $B \rightarrow X^*$ являются внутренними) для любого двустороннего банахова B -модуля X (X^* – дуальный модуль). К понятию аменабельности ведет много внешне совершенно различных подходов [15].

В [14, теорема 3.2] на основе критерия аменабельности, полученного А. Я. Хелемским и М. В. Шейнбергом [14], доказано, что алгебра $l^1(G, \omega)$ аменабельна в том и только том случае, если группа G аменабельна и ассоциированный вес $\Omega = \omega \hat{\omega}$ ограничен сверху. Как следствие этого утверждения и теоремы 1 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Алгебра $l^1(G, \omega)$ аменабельна в том и только том случае, если группа G аменабельна и вес ω эквивалентен некоторому мультипликативному характеру $\chi: G \rightarrow \mathbb{R}_+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждения теоремы 3.2 из [13] для аменабельности $l^1(G, \omega)$ необходимо, чтобы группа G была аменабельной.

Ограниченные когомологии аменабельной группы – нулевые (теорема Джонсона [13], см. также [10]).

Если $l^1(G, \omega)$ аменабельна, то опять-таки, в силу теоремы 3.2 из [14] вес $\Omega = \omega \hat{\omega}$ ограничен сверху, а значит (ввиду тривиальности $H_{b,2}^2(G)$), существует характер $\chi: G \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что для некоторой константы $c > 1$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{c} < \frac{\omega(g)}{\chi(g)} < c, \quad g \in G, \quad (8)$$

т.е. вес ω эквивалентен χ .

Наоборот, из существования константы c и характера χ таких, что выполнены неравенства (8) следует, что алгебра $l^1(G, \omega)$ изоморфна алгебре $l^1(G, \chi)$, которая аменабельна (если группа G аменабельна), ибо $\chi(g) = \chi(g)\chi(g^{-1}) = 1$ – ограниченная функция.

Таким образом, аменабельные алгебры Берлинга исчерпываются алгебрами вида $l^1(G, \chi)$, где G – аменабельная группа, $\chi: G \rightarrow \mathbb{R}_+$ – мультипликативный характер.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Коммутативная банахова алгебра B называется слабо аменабельной, если для любого коммутативного двустороннего банахова B -модуля X всякое дифференцирование $D: B \rightarrow X$ является нулевым. Аменабельная коммутативная банахова алгебра является слабо аменабельной.

В [16] для группы $\mathbb{Z}$, а в [17] – для произвольной коммутативной группы установлен критерий слабой аменабельности алгебр Берлинга: алгебра $l^1(G, \omega)$ слабо аменабельна в том и только том случае, если

$$\sup_{g \in G} \frac{|f(g)|}{\omega(g)\omega(g^{-1})} = \infty \quad (9)$$

для любого ненулевого аддитивного характера $f: G \rightarrow \mathbb{R}$.

Если G конечно порождена, то она представима в виде прямой суммы $G = G_0 \oplus G_1$, где G_0 – конечная группа, а G_1 – свободная абелева группа ранга m с базисом $a_1, \dots, a_m$. Всякий аддитивный характер $\chi: G \rightarrow \mathbb{R}$ определяется своими значениями на элементах a_i , $1 \leq i \leq m$.

Если вес ω симметричен, то (9) превращается в следующее условие:

для всякого i , $1 \leq i \leq m$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(a_i^n)}{\sqrt{n}} = 0.$$

В то же время, из теоремы 2 следует, что среди алгебр вида $l^1(G, \omega)$, где G – конечнопорожденная коммутативная группа, а ω – симметричный вес, аменабельной является только алгебра $l^1(G, \omega_0)$, где $\omega_0 \equiv 1$ – единичный вес.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если ω есть вес на группе G , то банахово пространство $l^\infty(G, \omega^{-1})$ определяется соотношением

$$l^\infty(G, \omega^{-1}) = \left\{ f : \|f\| = \sup_{g \in G} \frac{|f(g)|}{\omega(g)} < \infty \right\}.$$

Группа G действует на $l^\infty(G, \omega^{-1})$ левыми или правыми сдвигами, причем операторы действия ограничены. Имеет место изоморфизм $l^\infty(G, \omega^{-1}) = l^1(G, \omega)^*$.

В [13, теорема 3.2] доказано, что аменабельность алгебры $l^1(G, \omega)$ эквивалентна существованию положительного левоинвариантного среднего на $l^\infty(G, \omega^{-1})$.

Любопытно, что свойство “тихоновости” группы G , обсуждавшееся выше в § 2, полностью описывается в терминах левого действия G на пространствах вида $l^\infty(G, \omega)$. А именно, как показано в [6], группа G тихоновская тогда и только тогда, когда для любого веса ω и левого действия G в пространстве $l^\infty(G, \omega^{-1})$ существует положительный полуинвариантный функционал m , т.е. такой функционал, для которого $gm = \lambda(g)m$, где $\lambda: G \rightarrow \mathbb{R}_+$ – мультипликативный характер, $g \in G$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
27.12.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Хилл Э. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1951.
- [2] Hille E., Phillips R. Functional Analysis and Semigroups. Providence: AMS Publ., 1957.
- [3] Rosenbaum R. A. Sub-additive functions // Duke Math. J. 1950. V. 17. P. 227–247.
- [4] Бабенко И. К. Замкнутые геодезические, асимптотический объем и характеристики группового роста // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 4. С. 675–711.
- [5] Grigorchuk R. I. On growth in group theory // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Kyoto, 1990. Tokyo: Springer Verlag, 1991. P. 325–338.
- [6] Conze J. P., Guivarch Y. Propriete de droite fixe et fonctions propres des operateurs de convolution. Preprint. Univ. de Rennes, 1973.
- [7] Furstenberg H. Translation-invariant cones of functions on semi-simple Lie groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1965. V. 71. P. 271–326.
- [8] Grigorchuk R. I. On Tychonoff groups. Preprint MPI 95-12: Max-Planck-Institut für Mathematik, 1995.
- [9] Старков А. Н. Тихоновское свойство для линейных групп // Матем. заметки. 1997. Т. 61.
- [10] Grigorchuk R. I. Some results on bounded cohomology // Combinatorial and Geometric Group Theory. Edinburg, 1993 / ed. A. J. Duncan, N. D. Gilbert, J. Howie. London Math. Soc. Lecture Notes Ser. V. 284. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. P. 111–163.
- [11] Bouarich A. Suites exactes en cohomologie bornee reelle des groupes discrets // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1995. V. 320.
- [12] Rhemtulla A. H. A problem of bounded expressibility in free products // Proc. Cambridge Philosoph. Soc. 1968. V. 64. P. 573–584.
- [13] Johnson B. E. Cohomology in Banach Algebras // Mem. Amer. Math. Soc. 1972. V. 127.
- [14] Groenbaek N. Amenability of weighted discrete convolution algebras on cancellative semigroups // Proc. Royal Soc. Edinburgh 1988. V. 110 A. P. 351–360.
- [15] Хелемский А. Я. Плоские банаховы модули и аменабельные алгебры // Тр. ММО. 1984. Т. 47. С. 199–244.
- [16] Bade W. G., Curtis P. C., Dales G. G. Amenability and weak amenability for Beurling and Lipschitz algebras // Proc. London Math. Soc. 1987. V. 55. P. 359–377.
- [17] Groenbaek N. A characterization of weakly amenable Banach algebras // Studia Math. 1989. V. 94. № 2. P. 149–162.