Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Гриценко, Об оценках тригонометрических сумм по третьей производной, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 383–389

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1838>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 10:12:14

ОБ ОЦЕНКАХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ ПО ТРЕТЬЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

С. А. Гриценко

Пусть

$$S = \sum_{a < n \leq b} \exp(2\pi i f(n)), \quad |f'''(n)| \asymp A^{-1}.$$

Для суммы S хорошо известна оценка ван дер Корпута (см. [1, с. 109])

$$S = O((b-a)A^{-1/6}) + O((b-a)^{1/2}A^{1/6}). \quad (1)$$

Настоящая статья уточняет эту оценку для случая

$$(b-a)^{3/2} < A \leq (b-a)^2. \quad (2)$$

Мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть $f(n)$ – трижды непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, причем $c_1 A^{-1} < f'''(n) \leq c_2 A^{-1}$, c_1 и c_2 – положительные постоянные, $0 < A \leq (b-a)^2$.

Тогда для суммы S справедлива оценка

$$S = O((b-a)A^{-1/6}).$$

Постоянная в знаке O зависит лишь от c_1 и c_2 .

Если выполняются неравенства (2), то второе слагаемое в правой части (1) больше первого, значит, наша теорема действительно уточняет (1) в указанном случае. В основе доказательства лежит одна идея А. А. Карацубы (см. [2]).

Нам потребуется следующая известная лемма.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-00002.

ЛЕММА. Пусть $F(x)$ — действительная функция, непрерывная вместе со своими производными до третьего порядка. Пусть, далее, $F'(x)$ монотонно убывает в интервале (a, b) , причем $F'(b) = \alpha$, $F'(a) = \beta$, а x_ν определены равенствами

$$F'(x_\nu) = \nu \quad (\alpha < \nu \leq \beta).$$

Пусть, кроме того,

$$2\pi\lambda_2 \leq |F''(x)| < A_1\lambda_2, \quad |F'''(x)| \leq A_1\lambda_3.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} \exp(2\pi i F(n)) &= e^{-\pi i/4} \sum_{\alpha < \nu \leq \beta} |F''(x_\nu)|^{-1/2} \exp\left(2\pi i (F(x_\nu) - \nu x_\nu)\right) \\ &+ O(\lambda_2^{-1/2}) + O\left(\ln(2 + (b-a)\lambda_2)\right) + O((b-a)\lambda_2^{1/5}\lambda_3^{1/5}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СМ. В [1, с. 78–79].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. 1. Пусть $H = b - a$. Без ограничения общности считаем, что $H^{3/2} < A \leq H^2$.

Определим последовательность $\{\beta_n\}$:

$$\beta_1 = \|f''(a)\|, \quad \beta_{j+1} = \|- \beta_j^{-1}\|, \quad j \geq 1,$$

где $\|x\|$ — расстояние от вещественного числа x до ближайшего к нему целого числа (если $\beta_l = 0$, то числа β_n при $n > l$ не определяются).

Так как $0 \leq \beta_n \leq 0,5$, то из неравенств

$$\beta_1\beta_2 \cdots \beta_K \leq HA^{-2/3} < \beta_1\beta_2 \cdots \beta_{K-1}$$

однозначно находится натуральное число K (если $\beta_1 \leq HA^{-2/3}$, то полагаем $K = 1$).

Пусть $k_1, \dots, k_K$ — такие целые числа, что

$$\beta_1 = |f''(a) - k_1|, \quad \beta_{j+1} = |-\beta_j^{-1} - k_{j+1}|, \quad j = 1, \dots, K-1.$$

Справедливо следующее равенство: $|S| = |S_1|$, где

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{a < n_1 \leq b} \exp(2\pi i g_1(n_1)), \\ g_1(n_1) &= f(n_1) - 0,5k_1n_1^2 + 0,5k_1n_1. \end{aligned}$$

Так как $f'''(n_1) \leq c_2 A^{-1}$, то

$$|g_1''(n_1)| = \beta_1 + c_2 \theta_1 H A^{-1}, \quad |\theta_1| \leq 1.$$

Выполнено одно из двух неравенств:

$$\beta_1 > H A^{-2/3}, \quad (3)$$

$$\beta_1 \leq H A^{-2/3}. \quad (4)$$

Наши дальнейшие рассуждения для этих двух случаев проводятся по-разному.

Сначала допустим, что β_1 удовлетворяет неравенству (4). Тогда $K = 1$. Этот случай будет рассмотрен в п. 2, 3.

2. Пусть

$$0 \leq \beta_1 \leq 4c_2 A^{-1/3}. \quad (5)$$

Выделим в сумме S_1 те n_1 , для которых $|g_1''(n_1)| \leq A^{1/3} H^{-2}$; из теоремы Лагранжа о конечных приращениях следует, что число таких n_1 не превосходит $2A^{4/3} c_1^{-1} H^{-2}$, поэтому тривиальная оценка суммы по выделенным n_1 есть $O(A^{4/3} H^{-2}) = O(H A^{-1/6})$ (так как $A \leq H^2$).

Для остальных n_1 очевидно

$$|g_1''(n_1)| > A^{1/3} H^{-2}.$$

Вновь пользуясь теоремой Лагранжа, приходим к

$$A^{1/3} H^{-2} < |g_1''(n_1)| = O(A^{-1/3}) + O(H A^{-1}) = O(A^{-1/3})$$

(последнее равенство следует из $H^{3/2} < A$).

Оценивая соответствующие суммы по второй производной, получаем, что при условии выполнения неравенства (5),

$$S = O(H A^{-1/6}). \quad (6)$$

3. Пусть

$$4c_2 A^{-1/3} < \beta_1 \leq H A^{-2/3}. \quad (7)$$

Тогда

$$|g_1''(n_1)| = \beta_1 + 2c_2 \theta_1 H A^{-1} \asymp \beta_1,$$

так как $\beta_1 > 4c_2 A^{-1/3} > 4c_2 H A^{-1}$.

Применим к S_1 лемму, получим

$$|S_1| \leq \left| \sum_{\alpha_2 < n_2 \leq \gamma_2} |g_1''(n_{1,2})|^{-1/2} \exp(2\pi i f_2(n_2)) \right| + O(A^{1/6}) + O(\ln(H+2)) + O(HA^{-1/5}), \quad (8)$$

где $f(n_2) = g_1(n_{1,2}) - n_{1,2}n_2$, $n_{1,2}$ определяется из условия $g_1'(n_{1,2}) = n_2$, $\alpha_2 = g_1'(a)$, $\gamma_2 = g_1'(b)$.

Пользуясь соотношениями

$$|g_1''(n_{1,2})|^{-1/2} = \beta_1^{-1/2} + O(HA^{-1}\beta_1^{-3/2}), \\ |g_1'(b) - g_1'(a)| \asymp H\beta_1,$$

перепишем неравенство (8) в виде

$$|S_1| \leq \beta_1^{-1/2} |V_2| + O(HA^{-1/6}), \quad (9)$$

где

$$|V_2| = \left| \sum_{\alpha_2 < n_2 \leq \gamma_2} \exp(2\pi i f_2(n_2)) \right|.$$

Вычислим $f_2'''(n_2)$:

$$f_2'(n_2) = -n_{1,2}, \quad f_2''(n_2) = -(g_1''(n_{1,2}))^{-1}, \\ f_2'''(n_2) = g_1'''(n_{1,2})(g_1''(n_{1,2}))^{-3} \asymp A^{-1}\beta_1^{-3}.$$

Оценим V_2 по третьей производной, пользуясь теоремой ван дер Корпута:

$$V_2 \ll H\beta_1(A\beta_1^3)^{-1/6} + H^{1/2}\beta_1^{1/2}(A\beta_1^3)^{1/6}.$$

Подставим это неравенство в (9):

$$|S| = |S_1| = O(HA^{-1/6}) + O(H^{1/2}A^{1/6}\beta_1^{1/2}).$$

Отсюда и из (7) получаем (6).

Итак, установлено, что если β_1 удовлетворяет (4), то утверждение теоремы справедливо.

4. Пусть β_1 удовлетворяет неравенству (3). Тогда $K \geq 2$.

Мы уже определили функцию $g_1(n_1)$. Без ограничения общности можно считать, что $g_1''(n_1) > 0$.

При $2 \leq j \leq K$ определим рекуррентно две последовательности функций:

$$\begin{aligned} f_j(n_j) &= g_{j-1}(n_{j-1,j}) - n_{j-1,j}n_j, \\ g_j(n_j) &= \pm(f(n_j) - 0,5k_jn_j^2 + 0,5k_1n_j), \end{aligned}$$

где числа $n_{j-1,j}$ определяются из условия $g'_{j-1}(n_{j-1,j}) = n_j$, а целые числа k_j определены в п. 1; знаки $\pm$ выбираются так, чтобы $g''_j(n_j) > 0$, $2 \leq j \leq K-1$; переменные n_j изменяются в промежутках $(\alpha_j, \gamma_j]$, где

$$\begin{aligned} \alpha_j &= g'_{j-1}(g'_{j-2}(\cdots(g'_1(a))\cdots)), \\ \gamma_j &= g'_{j-1}(g'_{j-2}(\cdots(g'_1(b))\cdots)). \end{aligned}$$

Пусть при $1 \leq j \leq K$ $B_j = \beta_1\beta_2\cdots\beta_j$,

$$\begin{aligned} S_j &= \sum_{\alpha_j < n_j \leq \gamma_j} \exp(2\pi i g_j(n_j)), \\ W_j &= \sum_{\alpha_j < n_j \leq \gamma_j} (g''_{j-1}(n_{j-1,j}))^{-1/2} \exp(2\pi i f_j(n_j)). \end{aligned}$$

Проверим, что все определения, данные в этом пункте, корректны.

Последовательно вычисляя, находим, что при $j = 1, \dots, K$

$$g''_j(n_j) = \beta_j + O(HA^{-1}B_{j-1}^{-2}) \quad (B_0 = 1). \quad (10)$$

Проверим, что при $1 \leq j \leq K-1$ формулы (10) являются асимптотическими. Действительно, так как

$$B_{j-1} > HA^{-2/3}, \quad \beta_j > HA^{-2/3}B_{j-1}^{-1},$$

то

$$HA^{-1}B_{j-1}^{-2} = HA^{-2/3}B_{j-1}^{-1}A^{-1/3}B_{j-1}^{-1} < \beta_j A^{1/3}H^{-1} \leq \beta_j H^{-1/3}.$$

Следовательно, при $1 \leq j \leq K-1$ функции $g'_j(n_j)$ монотонны и числа $n_{j,j+1}$ определены однозначно.

Повторив рассуждения п. 3, получим

$$|S| \leq B_1^{-1/2}|S_2| + O(HA^{-1/6}). \quad (11)$$

Пусть $K \geq 3$, $2 \leq j \leq K-1$, пользуясь (10) и

$$|g'''_j(n_j)| \asymp A^{-1}B_{j-1}^{-3}, \quad \gamma_j - \alpha_j \asymp HB_{j-1},$$

применяем к S_j лемму, получаем

$$|S_j| \leq |W_{j+1}| + O(\beta_j^{-1/2}) + O(\ln(H+2)) + O(HA^{-1/5}B_{j-1}^{2/5}).$$

Далее, в сумме W_{j+1} множитель $(g_j''(n_{j,j+1}))^{-1/2}$ заменяем на $\beta_j^{-1/2}$ (ошибка от такой замены есть $O(H^2A^{-1}B_{j-1}^{-1/2}B_j^{-1/2})$) и пользуемся тем, что при целых n_{j+1} $\|f_{j+1}(n_{j+1})\| = \|\pm g_{j+1}(n_{j+1})\|$; тогда

$$\begin{aligned} |S_j| &\leq \beta_j^{-1/2}|S_{j+1}| + O(\beta_j^{-1/2}) + O(\ln(H+2)) \\ &\quad + O(HA^{-1/5}B_{j-1}^{2/5}) + O(H^2A^{-1}B_{j-1}^{-1/2}B_j^{-1/2}). \end{aligned}$$

Из последней формулы и (11) следует, что

$$\begin{aligned} |S| &\leq B_{K-1}^{-1/2}|S_K| + O(B_{K-1}^{-1/2}\ln(H+2)) \\ &\quad + O(HA^{-1/5}B_{K-1}^{-1/10}) + O(H^2A^{-1}B_{K-1}^{-3/2}). \end{aligned} \quad (12)$$

5. Осталось оценить $|S_K|$. Оценка будет подобна той, что проведена в п. 2, 3 для $|S_1|$.

Рассмотрим два возможных случая:

$$0 \leq \beta_K \leq 8c_2A^{-1/3}B_{K-1}^{-1}, \quad (13)$$

$$8c_2A^{-1/3}B_{K-1}^{-1} < \beta_K. \quad (14)$$

Если выполнено неравенство (13), то выделим те n_K , для которых

$$|g_K''(n_K)| \leq A^{1/3}H^{-2}B_{K-1}^{-1};$$

число таких n_K есть $O(A^{4/3}H^{-2}B_{K-1}^2)$; соответствующую сумму оценим тривиально; для остальных n_K из (10), (13) и теоремы Лагранжа следует, что

$$\begin{aligned} A^{1/3}H^{-2}B_{K-1}^{-1} < |g_K''(n_K)| &\ll A^{-1/3}B_{K-1}^{-1} + HA^{-1}B_{K-1}^{-2} \\ &\ll A^{-1/3}B_{K-1}^{-1}, \end{aligned}$$

так как $B_{K-1} > HA^{-2/3}$; суммы по невыделенным n_K (их не больше двух) оценим по второй производной как $O(HA^{-1/6}B_{K-1}^{1/2})$.

Если выполнено неравенство (14), то

$$|g_K''(n_K)| \asymp \beta_K.$$

Применим к S_K лемму и заменим $(g_K''(n_{K,K+1}))^{-1/2}$ на $\beta_K^{-1/2}$ (ошибка от такой замены есть $O(H^2 A^{-1} B_{K-1}^{-1} \beta_K^{-1/2}) = O(H^2 A^{-5/6} B_{K-1}^{-1/2})$), а затем оценим сумму по n_{K+1} по третьей производной, пользуясь теоремой ван дер Корпута; получим

$$|S_K| = O(H A^{-1/6} B_{K-1}^{1/2}) + O(A^{4/3} H^{-2} B_{K-1}^2) + O(A^{1/6} B_{K-1}^{1/2}) \\ + O(\ln(H+2)) + O(H A^{-1/5} B_{K-1}^{2/5}) + O(H^2 A^{-5/6} B_{K-1}^{-1/2}).$$

Эта оценка справедлива для обоих рассматриваемых нами случаев. Подставляя ее в (12) и учитывая, что

$$B_K \leq H A^{-2/3} < B_{K-1}, \quad H^{3/2} < A \leq H^2,$$

получаем (6).

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
22.12.94
Исправленный вариант
30.01.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.
- [2] Карацуба А. А. О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Тр. МИАН. 1981. Т. 157. С. 49–63.