Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Иванов, О. И. Смирнов, О теореме Джексона в пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}_2^n)$, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 390–405

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1839>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:16:39

О ТЕОРЕМЕ ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВЕ $\ell_2(\mathbb{Z}_2^n)$

В. И. Иванов, О. И. Смирнов

Введение. Работа посвящена оценке констант Джексона в пространствах L_2 на конечных компактах $\mathbb{Z}_2^n, \mathbb{Z}_{n+1}$.

Пусть $\mathbb{Z}_2^n = \{x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \mid x_i = 0, 1\}$ – абелева группа с операцией покоординатного сложения по mod 2, ν – нормированная инвариантная мера Хаара на $\mathbb{Z}_2^n$, $\nu(\{x\}) = 1/2^n$; для $k, x \in \mathbb{Z}_2^n$ $kx = \sum_{i=0}^{n-1} k_i x_i$, $|x| = \sum_{i=0}^n x_i = |\{x_i \mid x_i \neq 0\}|$ – вес Хэмминга вектора x , $\{\varphi_k(x) = (-1)^{kx}\}$ – система характеров на $\mathbb{Z}_2^n$;

$$\ell_2(\mathbb{Z}_2^n) = \left\{ f: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{Z}_2^n} |f|^2 d\nu = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \mathbb{Z}_2^n} |f(x)|^2 \right\},$$

$$(f, g) = \int_{\mathbb{Z}_2^n} f \bar{g} d\nu = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in \mathbb{Z}_2^n} f(x) \bar{g}(x).$$

Так как система характеров является ортонормированной, то для любого вектора $f \in \ell_2(\mathbb{Z}_2^n)$ справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_2^n} \hat{f}_k \varphi_k(x), \quad \hat{f}_k = (f, \varphi_k),$$

и равенство

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}_2^n} |\hat{f}_k|^2.$$

Группа движений G однородного пространства $\mathbb{Z}_2^n$ состоит из $2^n n!$ элементов, являющихся произведениями перестановок координат и перестановок символов 0 и 1 в каждой координате. Пространство $\mathbb{Z}_2^n$ можно отождествить с факторпространством группы G по стационарной подгруппе перестановок S_n : $\mathbb{Z}_2^n = G/S_n$. Квазирегулярное представление группы G в пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}_2^n)$, задаваемое формулой $L(g)f(x) = f(g^{-1}x)$, разлагается в прямую сумму попарно неэквивалентных неприводимых представлений $L_i(g)$ ($i = 0, 1, \dots, n$), действующих на конечномерных ортогональных подпространствах

$$V_i = \mathcal{L}(\{\varphi_k(x) \mid |k| = i\}), \quad \dim V_i = \binom{n}{i},$$

$$\ell_2(\mathbb{Z}_2^n) = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_n.$$

(см. [1]–[4]). Если $P_i: \ell_2(\mathbb{Z}_2^n) \rightarrow V_i$ – проектор, то для любой $f \in \ell_2(\mathbb{Z}_2^n)$

$$\|f\|_2^2 = \sum_{i=0}^n \|P_i f\|_2^2. \quad (1)$$

Для $k = 1, \dots, n = [1, n]$ и $f \in \ell_2(\mathbb{Z}_2^n)$ определим величину наилучшего приближения

$$E_k(f, \mathbb{Z}_2^n)_2 = \min \left\{ \|f - g\|_2 \mid g \in \sum_{i=0}^{k-1} V_i \right\}.$$

В силу (1)

$$E_k(f, \mathbb{Z}_2^n)_2 = \sum_{i=k}^n \|P_i f\|_2^2. \quad (2)$$

Для $f \in \ell_2(\mathbb{Z}_2^n)$

$$\begin{aligned} P_i f(x) &= \sum_{|s|=i} \widehat{f}_s \varphi_s(x) = \sum_{|s|=i} \int_{\mathbb{Z}_2^n} f(y) \varphi_s(x) \overline{\varphi}_s(y) d\nu_y \\ &= \int_{\mathbb{Z}_2^n} f(y) \sum_{|s|=i} \varphi_s(x) \overline{\varphi}_s(y) d\nu_y = \int_{\mathbb{Z}_2^n} f(y) K_i(x+y) d\nu_y. \end{aligned} \quad (3)$$

Ядро этого оператора $K_i(x)$, называемое зональной сферической функцией, зависит только от $|x|$ (см. [3]–[5]) и является многочленом Кравчука

$$K_i(x) = K_i(|x|) = \sum_{|s|=i} \varphi_s(x) = \sum_{j=0}^i (-1)^i \binom{|x|}{j} \binom{n-|x|}{i-j}.$$

Мы будем использовать также нормированные многочлены Кравчука

$$R_i(x) = \frac{K_i(x)}{K_i(0)} = \frac{1}{\binom{n}{i}} K_i(x). \quad (4)$$

На группе $\mathbb{Z}_2^n$ определим оператор обобщенного сдвига (см. [2], [6])

$$S^t f(x) = \frac{1}{\binom{n}{t}} \sum_{|h|=t} f(x+h), \quad t \in \{0, 1, \dots, n\} = [0, n].$$

На многочлен Кравчука он действует по правилу

$$S^t K_i(x) = R_i(t) K_i(x). \quad (5)$$

Действительно, так как $\binom{n}{i} K_t(i) = \binom{n}{t} K_i(t)$, то

$$\begin{aligned} S^t K_i(x) &= \frac{1}{\binom{n}{t}} \sum_{|h|=t} \sum_{|s|=i} \varphi_s(x+h) = \frac{1}{\binom{n}{t}} \sum_{|s|=i} \varphi_s(x) \sum_{|h|=t} \varphi_s(h) \\ &= \frac{1}{\binom{n}{t}} \sum_{|s|=i} \varphi_s(x) \sum_{|h|=t} \varphi_h(s) = \frac{1}{\binom{n}{t}} \sum_{|s|=i} \varphi_s(x) K_t(|s|) \\ &= \frac{1}{\binom{n}{t}} K_i(x) K_t(i) = \frac{1}{\binom{n}{i}} K_i(x) K_i(t) = R_i(t) K_i(x). \end{aligned}$$

Операторы P_i и S^t перестановочные и

$$P_i S^t f(x) = S^t P_i f(x) = R_i(t) P_i f(x). \quad (6)$$

Действительно, в силу (2), (4), (5)

$$\begin{aligned} P_i S^t f(x) &= \int_{\mathbb{Z}_2^n} S^t f(y) K_i(x+y) d\nu_y = \frac{1}{\binom{n}{t}} \sum_{|h|=t} \int_{\mathbb{Z}_2^n} f(y+h) K_i(x+y) d\nu_y \\ &= \int_{\mathbb{Z}_2^n} f(y) \frac{1}{\binom{n}{t}} \sum_{|h|=t} K_i(x+y+h) d\nu_y = \int_{\mathbb{Z}_2^n} f(y) S^t K_i(x+y) d\nu_y \\ &= S^t P_i f(x) = \int_{\mathbb{Z}_2^n} f(y) R_i(t) K_i(x+y) d\nu_y = R_i(t) P_i f(x). \end{aligned}$$

Пусть $r \geq 1$, $\psi_r(u) = (1-u)^{r/2}$, I – тождественный оператор. Оператор

$$\Delta_t^r = (I - S^t)^{r/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_r^{(k)}(0)}{k!} (S^t)^k \quad (7)$$

назовем разностным оператором порядка r , а величину

$$\omega_r(d, f, \mathbb{Z}_2^n)_2 = \max\{\|\Delta_t^r f\|_2 \mid t \in [0, d]\} \quad (8)$$

– модулем непрерывности порядка r вектора $f \in \ell_2(\mathbb{Z}_2^n)$. Для обобщенного сдвига на сфере в $\mathbb{R}^n$ оператор (7) рассматривался в [7], [8].

Для $n \in \mathbb{N}$, $k, d \in [1, n]$, $r \geq 1$ определим константу Джексона равенством

$$D_2(d, k, n, r) = \sup_{f \in \ell_2(\mathbb{Z}_2^n)} \frac{E_k(f, \mathbb{Z}_2^n)_2}{\omega_r(d, f, \mathbb{Z}_2^n)_2}, \quad D_2(d, k, n, 1) = D_2(d, k, n). \quad (9)$$

В силу (1), (6), (7)

$$\begin{aligned} P_i \Delta_t^r f(x) &= (1 - R_i(t))^{r/2} P_i f(x), \\ \|\Delta_t^r f\|_2^2 &= \sum_{i=0}^n (1 - R_i(t))^r \|P_i f\|_2^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} D_2^2(d, k, n, r) &= \sup_{\{a_i\} \subset \mathbb{R}_+} \frac{\sum_{i=k}^n a_i}{\max_{t \in [0, d]} \sum_{i=0}^n a_i (1 - R_i(t))^r} \\ &= \sup_{\{a_i\} \subset \mathbb{R}_+} \frac{\sum_{i=k}^n a_i}{\max_{t \in [0, d]} \sum_{i=k}^n a_i (1 - R_i(t))^r}. \end{aligned} \quad (11)$$

Равенство (11) наводит на мысль рассмотреть задачу о точном неравенстве Джексона и в пространстве, в котором ортогональный базис образуют зональные сферические функции.

Пусть $\mu(\{i\}) = \binom{n}{i}/2^n$ – мера на группе $\mathbb{Z}_{n+1} = [0, n]$,

$$\begin{aligned} \ell_2(\mathbb{Z}_{n+1}) &= \left\{ f : \mathbb{Z}_{n+1} \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{Z}_{n+1}} |f|^2 d\mu = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |f(i)|^2 \right\}, \\ (f, g) &= \int_{\mathbb{Z}_{n+1}} f(x) \overline{g}(x) d\mu = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f(i) \overline{g}(i). \end{aligned}$$

Известно, что система $\{R_i(t)\}_{i=0}^n$ в пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}_{n+1})$ образует ортогональный базис (см. [5]). Поэтому для любой $f \in \ell_2(\mathbb{Z}_{n+1})$ справедливо разложение

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \widehat{f}_i R_i(x), \quad \widehat{f}_i = \frac{(f, R_i)}{\|R_i\|_2^2}, \quad \|R_i\|_2^2 = \frac{2^n}{\binom{n}{i}}$$

и равенство

$$\|f\|_2^2 = \sum_{i=0}^n |\widehat{f}_i|^2 \|R_i\|_2^2.$$

Для $f \in \ell_2(\mathbb{Z}_{n+1})$, $k \in [1, n]$ положим

$$E_k(f)_2 = \min \left\{ \|f - g\| \mid g(t) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i R_i(t) \right\}.$$

Очевидно, что

$$E_k^2(f, \mathbb{Z}_{n+1}) = \sum_{i=k}^n |\widehat{f}_i|^2 \|R_i\|_2^2. \quad (12)$$

Оператор обобщенного сдвига на $\mathbb{Z}_{n+1}$ выглядит так (см. [6]):

$$T^t f(x) = \sum_{i=0}^n \widehat{f}_i R_i(t) R_i(x). \quad (13)$$

По аналогии с (7) определим разностный оператор δ_t^r порядка $r \geq 1$, соответствующий этому сдвигу,

$$\delta_t^r = (I - T^t)^{r/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_r^{(k)}(0)}{k!} (T^t)^k, \quad \delta_t^1 = \delta_t,$$

и модуль непрерывности порядка r

$$\begin{aligned} \omega_r(d, f, \mathbb{Z}_{n+1})_2 &= \max\{\|\delta_t^r f\|_2 \mid t \in [0, d]\}, \\ \omega_1(d, f, \mathbb{Z}_{n+1})_2 &= \omega(d, f, \mathbb{Z}_{n+1})_2. \end{aligned}$$

Так как для сдвига T^t справедливо равенство $T^t R_i(x) = R_i(t) R_i(x)$, то

$$\|\delta_t^r f\|_2^2 = \sum_{i=0}^n (1 - R_i(t))^r |\hat{f}_i|^2 \|R_i\|_2^2 \quad (14)$$

и константа Джексона в $\ell_2(\mathbb{Z}_{n+1})$ совпадает с константой Джексона в $\ell_2(\mathbb{Z}_2^n)$:

$$\sup_{f \in \ell_2(\mathbb{Z}_{n+1})} \frac{E_k(f, \mathbb{Z}_{n+1})_2}{\omega_r(d, f, \mathbb{Z}_{n+1})_2} = D_2(d, k, n, r). \quad (15)$$

Поэтому в дальнейшем мы будем оценивать константу Джексона (15).

1. Оценка константы Джексона сверху. Пусть $\text{supp } f = \{x \in \mathbb{Z}_{n+1} \mid f(x) \neq 0\}$ – носитель $f \in \ell_2(\mathbb{Z}_{n+1})$, $k, d \in [1, n]$, $H(d, k, n)$ – множество всех $h \in \ell_2(\mathbb{Z}_{n+1})$, для которых выполнены условия:

$$1) \quad h(x) \geq 0, \quad \text{supp } h \subset [0, d], \quad (16)$$

$$2) \quad \hat{h}_i \leq 0, \quad i \geq k, \quad \hat{h}_i = \binom{n}{i} (h, R_i). \quad (17)$$

Определим величину

$$\varkappa(d, k, n) = \max_{h \in H(d, k, n)} \frac{h(0)}{\hat{h}_0}. \quad (18)$$

Запишем разложение $h \in \ell_2(\mathbb{Z}_{n+1})$ в виде

$$h(x) = \sum_{s=0}^n \hat{h}_s R_s(x) = \sum_{s=0}^n \beta(s) \binom{n}{s} R_s(x).$$

Тогда

$$\beta(s) = (h, R_s) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} h(i) R_s(i)$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} h(i) R_i(s) = \sum_{i=0}^n \widehat{\beta}_i R_i(s)$$

и

$$h(0) = 2^n \widehat{\beta}_0, \quad \widehat{h}_0 = \beta(0), \quad \frac{h(0)}{\widehat{h}_0} = 2^n \frac{\widehat{\beta}_0}{\beta(0)}. \quad (19)$$

Отметим, что $\text{supp } h \subset [0, d]$ тогда и только тогда, когда степень многочлена β равна d .

Пусть $W(d, k, n)$ – множество всех $\beta \in \ell_2(\mathbb{Z}_{n+1})$, для которых выполнены условия:

- 1) $\beta(i) \leq 0, \quad i \geq k,$
- 2) $\widehat{\beta}_i \geq 0, \quad \text{supp } \widehat{\beta} \subset [0, d].$

Определим величину

$$\theta(d, k, n) = \min_{\beta \in W(d, k, n)} \frac{\beta(0)}{\widehat{\beta}_0}. \quad (20)$$

В силу (19)

$$\varkappa(d, k, n) = \frac{2^n}{\theta(d, k, n)}.$$

ТЕОРЕМА 1. Если $n \in \mathbb{N}$, $d, k \in [1, n]$, $r \geq 1$ и $H(d, k, n) \neq \emptyset$, то

$$D_2^2(d, k, n, r) \leq 1 - \frac{1}{2^n} \varkappa(d, k, n) = 1 - \frac{1}{\theta(d, k, n)}. \quad (21)$$

Если для некоторого многочлена $h \in H(d, k, n)$, $h(0) \neq 0$, то при $r = 1$ оценки (21) превращаются в равенства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in \ell_2(\mathbb{Z}_{n+1})$, $h \in H(d, k, n)$, то, с одной стороны, в силу (14), (17)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_{n+1}} h(t) \|\delta_t^r f\|_2^2 d\mu &= \sum_{i=0}^n |\widehat{f}_i|^2 \|R_i\|_2^2 \int_{\mathbb{Z}_{n+1}} h(t) (1 - R_i(t))^r d\mu \\ &\geq \sum_{i=k}^n |\widehat{f}_i|^2 \|R_i\|_2^2 \int_{\mathbb{Z}_{n+1}} h(t) (1 - r R_i(t)) d\mu \\ &= \widehat{h}_0 E_k^2(f, \mathbb{Z}_{n+1})_2 - r \sum_{i=k}^n |\widehat{f}_i|^2 \|R_i\|_2^2 \int_{\mathbb{Z}_{n+1}} h(t) R_i(t) d\mu \\ &\geq \widehat{h}_0 E_k^2(f, \mathbb{Z}_{n+1})_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь мы воспользовались очевидным неравенством $(1-t)^r \geq 1-rt$ ($r \geq 1$, $|t| \leq 1$). С другой стороны, в силу (16)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_{n+1}} h(t) \|\delta_t^r f\|_2^2 d\mu &\leq \frac{1}{2^n} \omega_r^2(d, f, \mathbb{Z}_{n+1}) \sum_{i=1}^n h(i) \binom{n}{i} \\ &= \left(\hat{h}_0 - \frac{h(0)}{2^n} \right) \omega_r^2(d, f, \mathbb{Z}_{n+1}). \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда и из (18), (20), (22) вытекают оценки (21).

Пусть в $H(d, k, n)$ существует многочлен h , для которого $h(0) \neq 0$. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования. Найти

$$\lambda(d, k, n) = \min \sum_{i=1}^d \binom{n}{i} h(i)$$

при условиях

- 1) $h(i) \geq 0, \quad i \in [1, d],$
- 2) $\sum_{i=1}^d \binom{n}{i} h(i) R_j(i) \leq -1 = -h(0), \quad j \in [k, n].$

Очевидно, что

$$\kappa(d, k, n) = \frac{2^n}{\lambda(d, k, n) + 1}.$$

Рассмотрим также двойственную задачу. Найти

$$\max \sum_{j=k}^n a_j \binom{n}{j}$$

при условиях

- 1) $a_j \geq 0, \quad j \in [k, n],$
- 2) $\sum_{j=k}^n \binom{n}{j} R_j(i) a_j \geq -1.$

Если $(h^*(1), \dots, h^*(d))$ и $(a_k^*, \dots, a_n^*)$ – оптимальные решения этих задач, то в силу теоремы о дополнительной нежесткости

$$a_j^* \left(1 + \sum_{i=1}^d \binom{n}{i} h^*(i) R_j(i) \right) = 0, \quad j \in [k, n], \quad (24)$$

$$h^*(i) \left(1 + \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} R_j(i) a_j^* \right) = 0, \quad i \in [1, d]. \quad (25)$$

Тогда вес $h^* = (1, h^*(1), \dots, h^*(d), 0, \dots, 0)$ и вектор f^* , для которого $|\widehat{f_j^*}|^2 \|R_j\|_2^2 = a_j^* \binom{n}{j}$ для $j \in [k, n]$ и $\widehat{f_j^*} = 0$ для $j \in [0, k-1]$, будут экстремальными. Действительно, в силу (24) все неравенства (22) превратятся в равенства, а если $h^*(i) \neq 0$, то в силу (25)

$$\|\delta_i f^*\|_2^2 = \sum_{j=k}^n a_j^* \binom{n}{j} (1 - R_j(i)) = 1 + \sum_{j=k}^n a_j^* \binom{n}{j}$$

и неравенство (23) также станет равенством. Теорема доказана.

Множество $A \subset \mathbb{Z}_2^n$ называется d -кодом, если для любых $x, y \in A$ расстояние Хэмминга $d(x, y) = |x + y| \geq d$. Максимальную мощность d -кода обозначим $M(d, n)$. Задача об оценке сверху величины $M(d, n)$ является центральной в теории кодирования (см. [5]). Известна оценка Дельсарта (см. [3]–[5])

$$M(d, n) \leq \theta(n, d, n).$$

Для оценки величин $M(d, n)$, $\theta(n, d, n)$ предложено много многочленов, которые лежат в множествах $H(d, k, n)$, $W(d, k, n)$ для некоторых $d, k \in [1, n]$. Перебирая их, мы будем получать различные варианты оценок констант Джексона $D_2(d, k, n, r)$ сверху.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $n \in \mathbb{N}$, $k \in [1, n]$, $r \geq 1$, то

$$D_2^2(n - k + 1, k, n, r) \leq 1 - \frac{1}{2^{n-k+1}}. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многочлены

$$h(x, k) = 2^{k-1} \prod_{j=n-k+2}^n \left(1 - \frac{x}{j} \right), \quad h(x, 1) \equiv 1,$$

с помощью которых Дельсартом (см. [4], [5]) была получена граница Синглтона

$$M(n - k + 2, n) \leq 2^{k-1}, \quad k \geq 2.$$

Известно (см. [5]), что

$$\begin{aligned} h(x, k) &\geq 0, \quad h(x, k) = 0 \quad \text{для } x \geq n - k + 2, \\ \widehat{h}_i &= \binom{n}{i} (h, R_i) = \frac{\binom{n}{i}}{2^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{i} h(j) R_i(j) \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{2^n} \sum_{j=0}^n h(j) K_j(i) = \frac{\binom{n-i}{n-k+1} \binom{n}{i}}{\binom{n}{n-k+1}}. \end{aligned}$$

В частности, $\hat{h}_0 = 1$, $\hat{h}_i = 0$ для $i \geq k$. Поэтому $h \in H(n - k + 2, k, n)$ и

$$D_2^2(n - k + 1, k, n, r) \leq 1 - \frac{h(0)}{2^n \hat{h}_0} = 1 - \frac{1}{2^{n-k+1}}.$$

Следствие доказано.

Пусть $t_i(n)$ – наименьший нуль многочлена R_i , определенного на $\mathbb{Z}_{n+1}$, $\eta_i = t_i(n - 1) + 1$, $\xi_i = t_{i-1}(n - 2) + 1$,

$$\begin{aligned} B_{2s-1}(k) &= \sum_{i=0}^{s-1} \binom{n}{i} - \frac{n}{2k} \binom{n-1}{s-1} \frac{R_{s-1}(k) - R_s(k)}{R_s(k)}, \\ B_{2s}(k) &= \sum_{i=0}^s \binom{n}{i} - \frac{n-k}{k} \binom{n-1}{s} \frac{R_s(k) - R_{s+1}(k)}{R_s(k) + R_{s+1}(k)}, \\ B_d(k) &= \begin{cases} B_{2s-1}(k), & d = 2s - 1, \quad \eta_s < k \leq \xi_s, \\ B_{2s}(k), & d = 2s, \quad \xi_{s+1} < k \leq \eta_s. \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

При оценке величины $\theta(n, k, n)$ В. И. Левенштейн [3] предложил многочлены $\beta_{2s-1}(x, k)$, $\beta_{2s}(x, k)$ степени $d = 2s - 1, 2s$, которые принадлежат множествам $W(d, k, n)$ при $\eta_s < k \leq \xi_s$ и $\xi_{s+1} < k \leq \eta_s$ соответственно. Для этих многочленов

$$\frac{\beta_{2s-1}(0, k)}{(\hat{\beta}_{2s-1})_0} = B_{2s-1}(k), \quad \frac{\beta_{2s}(0, k)}{(\hat{\beta}_{2s})_0} = B_{2s}(k).$$

Поэтому справедливо следующее

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $n \in \mathbb{N}$, $d, k \in [1, n]$, $r \geq 1$, $B_d(k)$ (27), то

$$D_2^2(d, k, n, r) \leq 1 - \frac{1}{B_d(k)}.$$

Укажем еще один вариант оценки константы Джексона сверху, метод доказательства которой характерен для бесконечных компактов T^m , S^{m-1} [8]–[10].

ЛЕММА 1. Оператор сдвига $T^t: \ell_2(\mathbb{Z}_{n+1}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}_{n+1})$, $t \in \mathbb{Z}_{n+1}$, (13) является самосопряженным, т.е. для любых $f, g \in \ell_2(\mathbb{Z}_{n+1})$

$$(T^t f(x), g(x)) = (f(x), T^t g(x)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Немедленно вытекает из определения оператора сдвига (13).

ЛЕММА 2. Если $h \in \ell_2(\mathbb{Z}_{n+1})$, $\text{supp } h \subset [0, s]$, то $\text{supp } T^m h \subset [0, s + m]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $h(x) = \sum_{i=0}^n \beta(i) \binom{n}{i} R_i(x)$ и $\text{supp } h \subset [0, s]$, то многочлен $\beta(x)$ имеет степень s . Имеем

$$T^m h(x) = \sum_{i=0}^n \beta(i) \binom{n}{i} R_i(m) R_i(x) = \sum_{i=0}^n \beta(i) R_m(i) \binom{n}{i} R_i(x).$$

Так как степень многочлена $\beta(i) R_m(i)$ равна $s + m$, то $\text{supp } T^m h \subset [0, s + m]$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если $n \in \mathbb{N}$, $k, t_k(n) \in [1, n]$, $r \geq 1$, то

$$D(2t_k(n) - 1, k, n, r) \leq 1. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$t_k(n) = t, \quad v_k(x) = \begin{cases} R_k(x), & 0 \leq x \leq t, \\ 0, & t+1 \leq x \leq n, \end{cases} \quad h_k(x) = T^t v_k(x).$$

Так как $\text{supp } v_k \subset [0, t-1]$, то по лемме 2 $\text{supp } h_k(x) \subset [0, 2t-1]$ и $h_k(x) \geq 0$. Если $v_k(x) = \sum_{j=0}^n (\hat{v}_k)_j R_j(x)$, то

$$h_k(x) = T^t v_k(x) = \sum_{j=0}^n (\hat{v}_k)_j R_j(t) R_j(x)$$

и $h_k(0) = v_k(t) = 0$. По лемме 1

$$\begin{aligned} (\hat{h}_k)_i &= \binom{n}{i} (T^t v_k, R_i) = \binom{n}{i} (v_k, T^t R_i) \\ &= \binom{n}{i} R_i(t) (v_k, R_i) = \frac{\binom{n}{i}}{2^n} R_i(t) \sum_{j=0}^{t-1} \binom{n}{i} R_j(i) R_j(k). \end{aligned}$$

Если $i = k$, то $(\hat{h}_k)_i = 0$. Если $i > k$, то по формуле Кристоффеля–Дарбу (см. [2]–[4])

$$\begin{aligned} (\hat{h}_k)_i &= \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{t-1} (n-t+1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{R_t(i) R_{t-1}(k) - R_{t-1}(i) R_t(k)}{k-i} \\ &= \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{t-1} (n-t+1)}{2^{n+1} (k-i)} R_t^2(i) R_k(t-1) \leq 0. \end{aligned}$$

Поэтому $h \in H(2t-1, k, n)$. Оценка (28) следует из условия $h_k(0) = 0$. Теорема доказана.

2. Оценки константы Джексона снизу. Пусть

$$\varepsilon_r = \begin{cases} 0, & r = 1, \\ 1, & r > 1. \end{cases}$$

ЛЕММА 3. Если $r \geq 1$, $|x| \leq 1$, то

$$(1-x)^r \leq 1 - rx + 2^r \varepsilon_r x^2. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (29) при $r > 1$ эквивалентно двум неравенствам

$$\begin{aligned} (1-x)^r &\leq 1 - rx + 2^r x^2 & (0 \leq x \leq 1), \\ (1+x)^r &\leq 1 + rx + 2^r x^2 & (0 \leq x \leq 1). \end{aligned}$$

Если

$$g_1(x) = \frac{(1-x)^r}{1 - rx + 2^r x^2},$$

то

$$g'_1(x) = \frac{x(1-x)^{r-1}(r^2 - r - 2^{r+1} + 2^r(2-r)x)}{(1 - rx + 2^r x^2)^2}.$$

Так как $r^2 - r - 2^{r+1} < 0$, $r^2 - r - r2^r < 0$ при $r \geq 1$, то $g'_1(x) \leq 0$ и $g_1(x) \leq g_1(0) = 1$ ($0 \leq x \leq 1$).

Аналогично, если

$$g_2(x) = \frac{(1+x)^r}{1 + rx + 2^r x^2},$$

то

$$g'_2(x) = \frac{x(1+x)^{r-1}(r^2 - r - 2^{r+1} + (r-2)2^r x)}{(1 + rx + 2^r x^2)^2}.$$

Так как $r^2 - r - 2^{r+1} < 0$ при $r \geq 1$, то

$$g_2(x) \leq \max\{g_2(0), g_2(1)\} = 1.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Если $n \in \mathbb{N}$, $k \in [1, n]$, $r \geq 1$, то

$$D_2^2(n, k, n, r) \geq \left(1 - \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}\right) \frac{n}{n + 2^r \varepsilon_r}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x) \in \ell_2(\mathbb{Z}_{n+1})$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & 1 \leq x \leq n. \end{cases}$$

Для нее

$$\widehat{f}_i = \binom{n}{i} (f, R_i) = \frac{\binom{n}{i}}{2^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f(j) R_i(j) = \frac{\binom{n}{i}}{2^n}.$$

В силу (12), (14), леммы 3 для $t \geq 1$

$$\begin{aligned} E_k^2(f, \mathbb{Z}_{n+1})_2 &= \sum_{i=k}^n |\widehat{f}_i|^2 \|R_i\|_2^2 = \frac{1}{2^n} \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} = 1 - \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}, \\ \|\delta_t^r f\|_2^2 &= \sum_{i=0}^n |\widehat{f}_i|^2 \|R_i\|_2^2 (1 - R_i(t))^r \\ &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1 - r R_i(t) + 2^r \varepsilon_r R_i^2(t)) \\ &= (1 - r(R_t, R_0) + 2^r \varepsilon_r (R_t, R_t)) = 1 + \frac{2^r \varepsilon_r}{\binom{n}{t}} \leq 1 + \frac{2^r \varepsilon_r}{n}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$D_2^2(n, k, n, r) \geq \frac{E_k^2(f, \mathbb{Z}_{n+1})_2}{\omega_r^2(n, f, \mathbb{Z}_{n+1})_2} \geq \left(1 - \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}\right) \frac{n}{n + 2^r \varepsilon_r}.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $n \in \mathbb{N}$, $k \in [1, n]$, $k/n = \alpha < 1/2$, $r \geq 1$, то

$$\sup_n D_2(n, k, n, r) \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3

$$D_2^2(n, k, n, r) \geq \left(1 - \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}\right) \frac{n}{n + 2^r \varepsilon_r}.$$

Так как (см. [11])

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \leq 2^{nH(\alpha)},$$

где $H(\alpha) = -\alpha \log_2 \alpha - (1 - \alpha) \log_2 (1 - \alpha)$, то

$$D_2^2(n, k, n, r) \geq 1 - \gamma_n,$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$. Следствие доказано.

3. Некоторые частные случаи вычисления констант Джексона.

ТЕОРЕМА 4. Если $n \in \mathbb{N}$, $k, d \in [1, n]$, то

$$D_2^2(1, k, n) = \frac{n}{2k}, \quad (30)$$

$$D_2^2(2, k, n) = \begin{cases} \frac{n+2k-1}{4k}, & 1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}, \\ \frac{n}{2k}, & \frac{n+1}{2} \leq k \leq n, \end{cases} \quad (31)$$

$$D_2^2(d, n, n) = \frac{1}{2}, \quad (32)$$

$$D_2^2(d, n-1, n) = \begin{cases} \frac{n}{2(n-1)}, & 1 \leq d \leq n-1, \quad d = n = 2s+1, \\ \frac{n+1}{2n}, & d = n = 2s, \end{cases} \quad (33)$$

$$D_2^2(n, 1, n) = 1 - \frac{1}{2n}, \quad (34)$$

$$D_2^2(n, 2, n) = D_2^2(n-1, 2, n) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве теоремы будем использовать известные значения многочленов Кравчука (см. [5]):

$$R_i(0) = R_0(i) = 1, \quad R_i(1) = R_1(i) = 1 - \frac{2i}{n},$$

$$R_i(2) = R_2(i) = 1 - \frac{4}{n-1}i + \frac{4}{n(n-1)}i^2,$$

$$R_n(i) = (-1)^i R_0(i) = (-1)^i, \quad R_{n-1} = (-1)^i R_1(i) = (-1)^i \left(1 - \frac{2i}{n}\right).$$

Пусть

$$\Lambda_m = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \mid \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \right\}.$$

В силу (11)

$$\begin{aligned} (D_2^2(1, k, n))^{-1} &= \min_{\alpha \in \Lambda_{n-k+1}} \sum_{i=k}^n \alpha_i (1 - R_i(1)) \\ &= \frac{2}{n} \min_{\alpha \in \Lambda_{n-k+1}} \sum_{i=k}^n i \alpha_i = \frac{2i}{n}. \end{aligned}$$

Равенство (30) доказано.

Аналогично, в силу теоремы Неймана о минимаксе

$$\begin{aligned}
 (D_2^2(2, k, n))^{-1} &= \min_{\alpha \in \Lambda_{n-k+1}} \max_{t=1,2} \sum_{i=k}^n \alpha_i (1 - R_i(t)) \\
 &= \frac{2}{n} \min_{\alpha \in \Lambda_{n-k+1}} \max_{i=k}^n \left\{ \sum_{i=k}^n i \alpha_i, \frac{2}{n-1} \sum_{i=k}^n i(n-i) \alpha_i \right\} \\
 &= \frac{2}{n} \min_{\alpha \in \Lambda_{n-k+1}} \max_{\beta \in \Lambda_2} \left\{ \sum_{i=k}^n i \left(\beta_1 + \frac{2\beta_2(n-i)}{n-1} \right) \alpha_i \right\} \\
 &= \frac{2}{n} \max_{\beta \in \Lambda_2} \min_{\alpha \in \Lambda_{n-k+1}} \left\{ \sum_{i=k}^n i \left(\beta_1 + \frac{2\beta_2(n-i)}{n-1} \right) \alpha_i \right\} \\
 &= \frac{2}{n} \max_{\beta \in \Lambda_2} \min_{k \leq i \leq n} \left\{ i \left(\beta_1 + \frac{2\beta_2(n-i)}{n-1} \right) \right\} \\
 &= \frac{2}{n} \max_{0 \leq \beta \leq 1} \min \left\{ k \left(\beta + \frac{2(1-\beta)(n-k)}{n-1} \right), \beta n \right\}. \quad (36)
 \end{aligned}$$

Так как

$$k \left(\beta + \frac{2(1-\beta)(n-k)}{n-1} \right) \leq \beta n$$

при

$$\beta \geq \frac{2k}{n+2k-1} = \beta_0$$

и $\beta_0 \leq 1$, то

$$\begin{aligned}
 \min \left\{ k \left(\beta + \frac{2(1-\beta)(n-k)}{n-1} \right), \beta n \right\} \\
 = \begin{cases} \frac{k(\beta(2k-n-1) + 2(n-k))}{n-1}, & \beta_0 \leq \beta \leq 1, \\ \beta n, & 0 \leq \beta \leq \beta_0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (36)

$$(D_2^2(2, k, n))^{-1} = \frac{2}{n} \cdot \begin{cases} k, & k \geq \frac{n+1}{2}, \\ \frac{2kn}{n+2k-1}, & 1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}. \end{cases}$$

Равенства (31) доказаны.

Далее,

$$(D_2^2(d, n, n))^{-1} = \min_{\alpha \in \Lambda_1} \max_{t \in [1, d]} \alpha (1 - R_n(t)) = 2.$$

Отсюда вытекает (32).

Если $d \leq n - 1$, то

$$\begin{aligned}
 & (D_2^2(d, n - 1, n))^{-1} \\
 &= \min_{\alpha \in \Lambda_2} \max_{i \in [1, d]} \left\{ \alpha_1(1 - R_{n-1}(i)) + \alpha_2(1 - R_n(i)) \right\} \\
 &= \min_{\alpha \in \Lambda_2} \max_{i \in [1, d]} \left\{ \alpha_1 + \alpha_2 + (-1)^{i+1} \left(\alpha_2 + \alpha_1 \left(1 - \frac{2i}{n} \right) \right) \right\} \\
 &= \min_{\alpha \in \Lambda_2} \max_{i \in [1, d]} \left\{ 1 + (-1)^{i+1} \left(1 - \frac{2i\alpha_1}{n} \right) \right\} \\
 &= \min_{\alpha \in \Lambda_2} 2 \left(1 - \frac{\alpha_1}{n} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right).
 \end{aligned}$$

Если $d = n$, $n = 2k + 1$, то

$$(D_2^2(d, n - 1, n))^{-1} = \min_{\alpha \in \Lambda_2} \max \left\{ 2 \left(1 - \frac{\alpha_1}{n} \right), 2 - 2\alpha_1 \right\} = 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right).$$

А если $d = n$, $n = 2k$, то

$$(D_2^2(d, n - 1, n))^{-1} = \min_{\alpha \in \Lambda_2} \max \left\{ 2 \left(1 - \frac{\alpha_1}{n} \right), 2\alpha_1 \right\} = \frac{2n}{n + 1}.$$

Равенства (33) также доказаны.

Равенство (34) вытекает из следствия 1 и теоремы 3 при $k = r = 1$.

Из следствия 1 при $k = 2$ вытекает также оценка

$$D_2^2(n, 2, n) \leq D_2^2(n - 1, 2, n) \leq 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Рассмотрим вектор $f \in \ell_2(\mathbb{Z}_{n+1})$, для которого

$$|\widehat{f}_i|^2 \|R_i\|_2^2 = \frac{1}{2}(1 + R_n(i)) \binom{n}{i} \geq 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 E_2^2(f, \mathbb{Z}_{n+1})_2 &= \sum_{i=2}^n |\widehat{f}_i|^2 \|R_i\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (1 + R_n(i)) \binom{n}{i} - 1 \\
 &= 2^{n-1} \{ (R_0, R_0) + (R_0, R_n) \} - 1 = 2^{n-1} - 1, \\
 \|\delta_j f\|_2^2 &= \sum_{i=0}^n |\widehat{f}_i|^2 \|R_i\|_2^2 (1 - R_i(j)) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1 + R_n(i)) (1 - R_j(i)) \\
 &= 2^{n-1} \{ (R_0, R_0) - (R_0, R_j) + (R_0, R_n) - (R_n, R_j) \}, \\
 \omega^2(n, f, \mathbb{Z}_{n+1})_2 &= 2^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$D_2^2(n, 2, n) \geq 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Равенство (35) установлено. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенства (34), (35) можно было получить исходя из теоремы 1 и значений (см. [5])

$$M(1, n) = \theta(n, 1, n) = 2^n, \quad M(2, n) = \theta(n, 2, n) = 2^{n-1}.$$

Известны также значения (см. [5])

$$\begin{aligned} \theta(n, 3, n) &= \frac{2^n}{n+2} & (n \equiv 0 \pmod{2}), \\ \theta(n, 3, n) &= \frac{2^n}{n+3} & (n \equiv 1 \pmod{4}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} D_2^2(n, 3, n) &= 1 - \frac{n+2}{2^n} & (n \equiv 0 \pmod{2}), \\ D_2^2(n, 3, n) &= 1 - \frac{n+3}{2^n} & (n \equiv 1 \pmod{4}). \end{aligned}$$

Тульский государственный университет

Поступило
13.02.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
- [2] Баннаи Э., Ито Т. Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений. М.: Мир, 1987.
- [3] Левенштейн В. И. Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Пробл. кибернетики. 1983. № 40. С. 43–110.
- [4] Дельсарт Ф. Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. М.: Мир, 1979.
- [5] Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979.
- [6] Левитан Б. М. Теория операторов обобщенного сдвига. М.: Наука, 1973.
- [7] Рустамов Х. П. О приближении функций на сфере // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 9. № 3. С. 127–148.
- [8] Бабенко А. Г. Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 333–355.
- [9] Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
- [10] Юдин В. А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 2. С. 309–315.
- [11] Васильев Ю. А. и др. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1. М.: Наука, 1974.