Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, Максимумы субэкспоненциальных полей дробового шума с конечным радиусом влияния, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 2, 258–262

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm184>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 10:48:45

УДК 519.219.2

МАКСИМУМЫ СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ ДРОБОВОГО ШУМА С КОНЕЧНЫМ РАДИУСОМ ВЛИЯНИЯ

А. В. Лебедев

Изучается асимптотическое поведение максимумов полей дробового шума на ограниченных измеримых областях, стремящимся к бесконечности в смысле Ван Хова. Предполагается, что радиус влияния конечен и амплитуды субэкспоненциально распределены. Получено невырожденное предельное распределение для максимумов.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Понятие полей дробового шума возникло из астрофизики в связи с изучением гравитационных полей в звездных системах [1, гл. 4], однако впоследствии оно нашло применение и в других областях (оптике, статистической физике и т.п.). Работы по многомерному дробовому шуму появились в 70-е годы XX века [2], [3] и продолжают до наших дней [4]–[6]. Заметим также, что решение уравнения Бюргерса со случайными начальными данными [7] в многомерном случае представимо в виде отношения полей дробового шума.

Нашей задачей будет по возможности распространить результаты об асимптотике максимумов субэкспоненциального дробового шума, полученные в одномерном случае [8], на многомерный. Однако, это удастся сделать лишь за счет ограничений на функцию влияния (в частности, условия финитности).

Рассмотрим евклидово пространство $E = \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, и пусть $\{\tau_k\}$ – стационарное пуассоновское точечное поле в E интенсивности $\lambda > 0$. Определим формально поле

$$X(t) = \sum_k h_k(t - \tau_k), \quad t \in E, \quad (1)$$

где h_k – независимые одинаково распределенные измеримые случайные функции (называемые *функциями отклика* или *влияния* [6]), не зависящие от $\{\tau_k\}$.

Величины $h_k(0)$ назовем *амплитудами*, а их распределение обозначим через F^0 . Далее не будем писать нижний индекс при h_k , если речь идет обо всех k .

Предположим, что функции влияния удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $h(t) \geq 0$ при всех $t \in E$;
- 2) $h(t) \leq h(0)$ при всех $t \in E$;
- 3) $h(t) = 0$ при $\|t\| > 1$;
- 4) $h(0) < \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00131.

Имеется в виду, что условия 1)–4) выполняются почти наверное (п.н.). Все эти условия обеспечивают существование поля дробового шума $X(t)$ в смысле абсолютной сходимости (1) п.н. [3].

Радиусом влияния естественно назвать величину

$$\rho = \sup \left\{ r \geq 0 : P \left(\sup_{\|t\| \geq r} h(t) > 0 \right) > 0 \right\}.$$

Каждая точка t_k вносит вклад в поле $X(t)$ на расстоянии не более ρ . Очевидно, значения поля на расстояниях, больших 2ρ , независимы между собой. Условие 3) означает, что $\rho \leq 1$.

Определим теперь для произвольной ограниченной измеримой области G супремум (максимум) поля $X(t)$ по ней:

$$M(G) = \sup_{t \in G} X(t).$$

Заметим, что $M(G)$ конечно п.н., так как оценивается сверху суммой амплитуд по всем точкам t_k в 1-окрестности области G .

Предположим, что задана последовательность таких областей, монотонно стремящаяся к бесконечности в смысле Ван Хова [9, с. 30] (что будем обозначать $G \rightarrow \infty$). Напомним это понятие. Рассмотрим разбиение пространства E правильной решеткой из одинаковых прямоугольных параллелепипедов P_n . Пусть $N^-(G)$ – число P_n , входящих в G , и $N^+(G)$ – число P_n , пересекающихся с G ; тогда *стремление к бесконечности в смысле Ван Хова* означает, что для любого такого разбиения выполнено

$$\lim_{G \rightarrow \infty} N^+(G) = +\infty, \quad \lim_{G \rightarrow \infty} \frac{N^-(G)}{N^+(G)} = 1. \quad (2)$$

В дальнейшем для простоты вместо произвольных параллелепипедов будем рассматривать только правильные кубы C_n со стороной l . Например, это могут быть кубы вида

$$[i_1 l, (i_1 + 1)l] \times \cdots \times [i_d l, (i_d + 1)l], \quad i_1, \dots, i_d \in \mathbb{Z},$$

пронумерованные в произвольном порядке.

Обозначим лебегову меру множества G через $|G|$; тогда из (2) следует

$$N^-(G) \sim \frac{|G|}{l^d}, \quad N^+(G) \sim \frac{|G|}{l^d}, \quad G \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Субэкспоненциальные распределения были введены в [10] как распределения, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0, & x < 0, \\ F(x) &< 1, & x > 0, \\ \overline{F}^{2*}(x) &\sim 2\overline{F}(x), & x \rightarrow \infty, \quad \text{где } \overline{F}(x) = 1 - F(x). \end{aligned}$$

Отсюда следует также $\overline{F}^{n*}(x) \sim n\overline{F}(x)$, $x \rightarrow \infty$, $n \geq 2$. Далее класс субэкспоненциальных распределений будем обозначать через $\mathcal{S}$.

Интересные результаты о распределениях из $\mathcal{S}$ были получены в [11], [12]. Далее нам понадобится только одно их свойство, а именно [13]: сумма пуассоновского (со средним λ) числа независимых одинаково распределенных случайных величин с общим распределением $F \in \mathcal{S}$ имеет распределение с хвостом $\overline{F}_\Pi(x) \sim \lambda \overline{F}(x)$, $x \rightarrow \infty$.

2. Основной результат.

ТЕОРЕМА. Если $\overline{F}^0 \in \mathcal{S}$ и $u(s)$ — неубывающая функция на $(0, +\infty)$ такая, что $s\overline{F}^0(u(s)) \rightarrow r \in (0, +\infty)$ при $s \rightarrow +\infty$, то

$$\lim_{G \rightarrow \infty} P(M(G) \leq u(\lambda|G|)) = e^{-r}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, оценим $M(G)$ снизу максимумом амплитуд по всем $\tau_k \in G$:

$$\begin{aligned} P(M(G) \leq u(\lambda|G|)) &\leq P\left(\sup_{\tau_k \in G} h_k(0) \leq u(\lambda|G|)\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda|G|)^m}{m!} e^{-\lambda|G|} (F^0(u(\lambda|G|)))^m \\ &= \exp\{-\lambda|G|\overline{F}^0(u(\lambda|G|))\} \rightarrow e^{-r}, \quad G \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим последовательность кубов C_n , $n \geq 1$ (определенную в п. 1), со стороной $l > 4$, вместе с концентрическими кубами C_n^* со стороной $l+2$, C_n' со стороной $l-2$ и C_n'' со стороной $l-4$. Оценим $M(C_n)$ сверху:

$$M(C_n) = \max(M(C_n'), M(C_n \cap \overline{C}_n')) \leq \max\{\xi_n, \eta_n\},$$

где

$$\xi_n = \sum_{\tau_k \in C_n} h_k(0), \quad \eta_n = \sum_{\tau_k \in C_n^* \cap \overline{C}_n''} h_k(0).$$

Заметим, что ξ_n , $n \geq 1$, независимы. По свойству субэкспоненциальных распределений имеем

$$P(\xi_n > x) \sim \lambda l^d \overline{F}^0(x), \quad P(\eta_n > x) \sim \lambda((l+2)^d - (l-4)^d) \overline{F}^0(x)$$

при $x \rightarrow +\infty$.

Обозначим через V^- объединение всех кубов C_n , входящих в G , и через V^+ объединение всех кубов, пересекающихся с G . Тогда с учетом (2) получаем

$$\begin{aligned} P(M(G) > u(\lambda|G|)) &\leq P(M(V^+) > u(\lambda|V^-|)) \\ &\leq 1 - P(\xi_n \leq u(\lambda N^- l^d))^{N^+} + N^+ P(\eta_n > u(\lambda N^- l^d)) \\ &\rightarrow 1 - e^{-r} + \frac{(l+2)^d - (l-4)^d}{l^d}, \quad G \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Переходя в правой части (6) к пределу при $l \rightarrow \infty$ и учитывая (5), получаем утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие теоремы не требует принадлежности функции F^0 помимо класса $\mathcal{S}$, еще и области притяжения какого-либо невырожденного максимум-устойчивого распределения при линейной нормировке, как в [8]. В качестве функции $u(s)$ всегда можно взять, например, $u(s) = \inf\{x : F^0(x) \geq 1 - r/s\}$, пользуясь доказанным еще в [10] свойством: если $F \in \mathcal{S}$, то $\overline{F}(x - y)/\overline{F}(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$ для всех $y > 0$. В общем случае (4) дает нелинейную нормировку максимумов. Часто нелинейная нормировка может быть сведена к линейной.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема показывает, что асимптотическое поведение максимумов не зависит от конкретного вида функции влияния h , удовлетворяющей условиям 1)–4), а также от размерности пространства d .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Величина $\lambda|G|$ инвариантна относительно выбора единиц измерения в пространстве E (как среднее число точек τ_k в области G). Поэтому теорема остается верна при замене условия 3) на условие вида $h(t) = 0$ при $\|t\| > R$ для любого $R > 0$, т.е. при любом конечном радиусе влияния ρ .

ПРИМЕР 1. Пусть $F^0(x) = 1 - x^{-\alpha}$, $x \geq 1$ (распределение Парето). Тогда $u(s) = (s/r)^{1/\alpha}$. Полагая $r = x^{-\alpha}$, получаем

$$\lim_{G \rightarrow \infty} P(M(G)/(\lambda|G|)^{1/\alpha} \leq x) = \exp\{-x^{-\alpha}\}, \quad x > 0.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $F^0(x) = 1 - \exp\{-x^\beta\}$, $\beta \in (0, 1)$ (распределение Вейбулла). Тогда $u(s) = (\ln(s/r))^{1/\beta}$. Полагая $r = e^{-x}$, получаем

$$\lim_{G \rightarrow \infty} P(M(G)^\beta - \ln(\lambda|G|) \leq x) = \exp\{-e^{-x}\}.$$

Перспективным направлением дальнейших исследований представляется изучение максимумов дробового шума, порожденного точечными полями, более общими, чем пуассоновское (например, ассоциированными [7]), и, возможно, на иных структурах, чем конечномерное евклидово пространство.

Автор благодарен А.В. Булинскому, М.А. Вронскому и рецензенту за внимание к работе, полезные замечания и предложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М.: ГИИЛ, 1947.
- [2] Daley D. J. The definition of multi-dimensional generalization of shot noise // J. Appl. Probab. 1971. V. 8. № 1. P. 128–135.
- [3] Westcott M. On the existence of a generalized shot-noise process // Stud. Probab. Stat. 1976. P. 74–88.
- [4] Булинский А. В. Центральная предельная теорема для полей дробового шума // Проблемы теории вероятн. распределений XI. Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 177. Л.: Наука, 1989. С. 28–36.
- [5] Gubner J. A. Computation of shot-noise probability distributions and densities // SIAM J. Sci. Comp. 1996. V. 17. № 3. P. 750–761.

- [6] van Lieshout M.N.M., Molchanov I.S. Shot-noise-weighted processes: a new family of spatial point processes // *Comm. Stat. Stochastic Models*. 1998. Т. 14. № 3. С. 715–734.
- [7] Бахтин Ю.Ю. Закон повторного логарифма для решения уравнения Бюргерса со случайными начальными данными // *Матем. заметки*. 1998. Т. 64. № 6. С. 812–823.
- [8] Лебедев А.В. Экстремумы субэкспоненциального дробового шума // *Матем. заметки*. 2002. Т. 71. № 2. С. 227–231.
- [9] Рюэль Д. Статистическая механика. М.: Мир, 1971.
- [10] Чистяков В.П. Теорема о суммах положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся случайным процессам // *Теория вероятности и ее примен.* 1964. Т. 9. № 4. С. 710–718.
- [11] Якимив А.Л. Явные оценки для асимптотики субэкспоненциальных безгранично делимых функций распределения // *Матем. заметки*. 2000. Т. 67. № 2. С. 295–301.
- [12] Балтрунас А. О субэкспоненциальности одного класса случайных величин // *Матем. заметки*. 2001. Т. 69. № 4. С. 625–628.
- [13] Embrechts P., Goldie C.M., Veraverbeke N. Subexponentiality and infinite divisibility // *Z. Wahr. verw. Geb.* 1979. V. 49. № 3. P. 335–347.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: alebedev@mech.math.msu.su

Поступило
28.08.2001
Исправленный вариант
10.04.2002