Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Метельский, В. Н. Мартынчик, Частичная
выпуклость, *Матем. заметки*, 1996, том 60, вы-
пуск 3, 406–413

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1840>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:41:35

ЧАСТИЧНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ

Н. Н. Метельский, В. Н. Мартынич

Классическая выпуклость служит основой многих фундаментальных результатов в математике. Однако, классическая выпуклость является скорее исключительным, чем характерным свойством геометрических объектов, рассматриваемых в приложениях. Естественным путем получения более общих математических результатов и расширения сферы их применения является введение аналогов и обобщений классического понятия выпуклости. Одно из естественных обобщений представляет собой выпуклость по заданному множеству направлений [1], [2], возникшая в геометрии в связи с задачами математической морфологии, обработки изображений, синтеза топологии СБИС, проектирования баз данных.

Пусть V – некоторое множество единичных векторов (*направлений*) n -мерного линейного пространства $\mathbb{R}^n$. Прямая l называется V -*прямой*, если некоторый направляющий вектор прямой l принадлежит V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым относительно V* (V -*выпуклым*, *частично-выпуклым*), если пересечение X с произвольной V -прямой пусто либо связно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\{X_\alpha\}$ — некоторая совокупность подмножеств $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\text{Dir}\{X_\alpha\}$ множество всех единичных векторов v таких, что для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ прямая $x = x_0 + \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$, имеет связное пересечение с каждым членом совокупности $\{X_\alpha\}$. Множество $K\{X_\alpha\} = \{\lambda x \in \mathbb{R}^n : x \in \text{Dir}\{X_\alpha\}, \lambda \geq 0\}$ называется *конусом выпуклых направлений* для семейства $\{X_\alpha\}$. Мы используем обозначение $K(X)$, когда $\{X_\alpha\}$ состоит из одного множества X .

Отметим, что наиболее существенные результаты о V -выпуклости относятся к двумерному случаю, причем большинство из них касаются в основном вычислительных аспектов: распознавание V -выпуклости и построение V -выпуклых оболочек для двух направлений на плоскости [3];

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь, грант Ф95-016.

исследование O -видимости и вычисление O -ядер многоугольных областей [4]; вычисление минимальной по площади ортовыпуклой многоугольной области, содержащей заданный многоугольник и имеющей ограниченное множество вершин [5], [6]; нахождение размещения пары неперекрывающихся многоугольников, оптимального по критерию минимизации площади ортовыпуклой оболочки [6], [7]; теорема декомпозиции для V -выпуклых оболочек в $\mathbb{R}^2$ [2].

Настоящая работа посвящена исследованию теоретических основ частичной выпуклости в $\mathbb{R}^n$ в двух аспектах: изучение семипространств и описание конуса выпуклых направлений.

Аксиоматическая теория выпуклости [8] трактует выпуклую структуру $\langle A, \Phi \rangle$, $\Phi \subseteq 2^A$, $A \in \Phi$, как замкнутую относительно пересечений: $X_\alpha \in \Phi \implies \bigcap_\alpha X_\alpha \in \Phi$. Семипространством S_a , соответствующим точке $a \in A$, называется всякое максимальное по включению выпуклое (в смысле принадлежности S_a к системе Φ) подмножество A , не содержащее a [8]. Особая роль семипространств состоит в том, что они составляют наименьшую базу пересечений $\langle A, \Phi \rangle$ (базу выпуклости), если в $\langle A, \Phi \rangle$ вообще существуют минимальные по включению базы [8, с. 27–31].

Как показано ниже, ситуация с семипространствами для частичной выпуклости значительно отличается от классического случая, исследованного В.Кли и П.Хаммером. Поскольку совокупность всех семипространств для произвольного V представляется необозримой, мы выделяем в качестве основного объекта исследования некоторое семейство семипространств (C -семипространства). Согласно теореме 3, C -семипространства могут быть описаны как дополнения максимальных острых классически выпуклых конусов, порождаемых подмножествами множества направлений V . Отметим, что указанное семейство при переходе к классической, с нашей точки зрения *полной*, выпуклости, когда V содержит все направления, совпадает с совокупностью всех семипространств, описанных В. Кли и П. Хаммером [9]–[11].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Для любого $V \subseteq S^{n-1}$ (S^{n-1} – единичная сфера $\mathbb{R}^n$) пространство $\mathbb{R}^n$ V -выпукло. Если $\{X_\alpha\}$ – непустое семейство V -выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$, то $\bigcap_\alpha X_\alpha$ также V -выпукло.*

Действительно, для V -прямой l : $l \cap (\bigcap_\alpha X_\alpha) = \bigcap_\alpha (l \cap X_\alpha)$, где $l \cap X_\alpha$ – интервалы любых типов, возможно пустые. Следовательно, непустое $l \cap (\bigcap_\alpha X_\alpha)$ также интервал некоторого типа, т.е. связанное множество.

Обозначим через $\text{Class}(V)$ класс всех V -выпуклых подмножеств $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Утверждение 1 означает, что пара $\langle \mathbb{R}^n, \text{Class}(V) \rangle$ есть структура (пространство) выпуклости.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. а) *Если $V_1 \subseteq V_2$, тогда $\text{Class}(V_1) \supseteq \text{Class}(V_2)$.*

б) *Если V_1 и V_2 – симметричные подмножества S^{n-1} и $V_1 \subset V_2$ ($V_1 \neq V_2$), то $\text{Class}(V_1) \supset \text{Class}(V_2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть утверждения очевидна. Для доказательства второй части достаточно показать существование V_1 -выпук-

лого X , не являющегося V_2 -выпуклым. Пусть $v_2 \in V_2$ и $v_2 \notin V_1$. Тогда множество $\{\lambda v_2 : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$ может быть выбрано в качестве требуемого множества X , поскольку X выпукло по всем направлениям вообще, за исключением v_2 и $-v_2$.

Утверждение 2 показывает, что V -выпуклость чувствительна к изменению множества V -прямых, задающих направления выпуклости.

Для семейства $\{X_\alpha\}$, $X_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\text{Dir}\{X_\alpha\}$ есть совокупность всех единичных векторов v таких, что любая прямая, порождаемая вектором v , имеет связанное пересечение с каждым членом указанного семейства. Очевидно, что $\text{Dir}\{X_\alpha\}$ может быть пустым множеством (например, если $\{X_\alpha\}$ содержит сферу S^{n-1}). Для любого семейства $\{X_\alpha\}$ $\text{Dir}\{X_\alpha\}$ является симметричным множеством, т.е. $-\text{Dir}\{X_\alpha\} \cup \text{Dir}\{X_\alpha\} = \text{Dir}\{X_\alpha\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. а) Если $\{X_\alpha\} \subseteq \{Y_\beta\}$, то $\text{Dir}\{X_\alpha\} \supseteq \text{Dir}\{Y_\beta\}$.

б) Для симметричного множества $V \subset S^{n-1}$ справедливо

$$\text{Dir}(\text{Class}(V)) = V, \quad \text{Class}(\text{Dir}\{X_\alpha\}) \supseteq \{X_\alpha\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО части а) и включения $\text{Dir}(\text{Class}(V)) \supseteq V$ достаточно очевидно.

Докажем обратное включение. Предположим противное: существует $v \in \text{Dir}(\text{Class}(V))$ и $v \notin V$. Рассмотрим множество $X = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$. $X \in \text{Class}(V)$, так как X выпукло по всем направлениям за исключением v и $-v$. Последнее означает $v \notin \text{Dir}(\text{Class}(V))$. Противоречие. Включение $\text{Class}(\text{Dir}\{X_\alpha\}) \supseteq \{X_\alpha\}$ непосредственно вытекает из определений отображений Class и Dir .

Утверждения 2 и 3 приводят к следующей теореме о связи Галуа [12, с. 58], [13, с. 232].

ТЕОРЕМА 1. *Отображения $\text{Class}(V)$ и $\text{Dir}\{X_\alpha\}$ есть пара соответствий Галуа между совокупностью всех подмножеств сферы S^{n-1} и совокупностью произвольных семейств подмножеств $\mathbb{R}^n$. Симметричные подмножества $V \subset S^{n-1}$ и классы V -выпуклых множеств являются замкнутыми элементами соответствующих частичных порядков по включению.*

ТЕОРЕМА 2. а) $\text{Class}(\bigcup V_\nu) = \bigcap \text{Class}(V_\nu)$.

б) $\text{Class}(\bigcap V_\nu) \supseteq \bigcup \text{Class}(V_\nu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) На основании утверждения 2 для любого ν верно $\text{Class}(\bigcup V_\nu) \subseteq \text{Class}(V_\nu)$. Следовательно, $\text{Class}(\bigcup V_\nu) \subseteq \bigcap \text{Class}(V_\nu)$. Обратно, если $X - V_\nu$ -выпуклое множество для каждого ν , то, очевидно, X также $\bigcup V_\nu$ -выпукло.

б) Включение $\bigcap V_\nu \subseteq V_\nu$ влечет, согласно утверждению 2,

$$\text{Class}(\bigcap V_\nu) \supseteq \text{Class}(V_\nu).$$

Заметим, что обратное включение не верно, как показывает следующий пример в $\mathbb{R}^2$. Пусть $V_1 = \{e_1, v\}$, $V_2 = \{e_2, v\}$, где $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$; $v = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$, $X = \{\lambda e_1 \mid -1 \leq \lambda \leq 1, \lambda \neq 0\} \cup \{(-1/2, 5)\}$. Легко проверить, что $X \in \text{Class}(V_1 \cap V_2)$, но $X \notin \text{Class}(V_1) \cup \text{Class}(V_2)$.

В нашем исследовании семипространств существенную роль играют выпуклые конусы (в классическом смысле). Под выпуклым конусом мы понимаем множество C , содержащее $\lambda x + \mu y$ для любых $x, y \in C$ и любых неотрицательных λ и μ . Выпуклый конус C называется острым, если C не содержит одномерных подпространств, т.е. $x \in C$ и $-x \in C$ влечет $x = 0$. Выпуклая коническая оболочка $\text{CH}[X]$ множества X есть наименьший выпуклый конус, содержащий X . Будем говорить, что конус C порождается множеством X , если $C = \text{CH}[X]$.

Пусть $V \subset S^{n-1}$ – непустое симметричное множество векторов. Обозначим $\text{PCON}(V)$ множество всех острых $\text{CH}[X]$ для $X \subset V$.

ЛЕММА 1. *Множество $\text{PCON}(V)$ содержит максимальные по включению элементы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\text{CH}[X_\alpha]\}$ – произвольная цепь элементов из $\text{PCON}(V)$. $C^* = \bigcup_\alpha \text{CH}[X_\alpha]$. Покажем, что $C^* \in \text{PCON}(V)$. Действительно, $x, y \in C^* \implies x \in \text{CH}[X_\alpha], y \in \text{CH}[X_\beta]$,

$$\begin{aligned} \alpha < \beta \implies x, y \in \text{CH}[X_\beta] &\implies \lambda x + \mu y \in \text{CH}[X_\beta] \quad (\lambda \geq 0, \mu \geq 0) \\ &\implies \lambda x + \mu y \in C^*. \end{aligned}$$

Таким образом, C^* – выпуклый конус. Докажем, что C^* есть острый конус. Предположим, что C^* содержит 1-мерное подпространство $\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Тогда существует конус $\text{CH}[X_\alpha]$ из рассматриваемой цепи, который содержит $\lambda_1 v$ для некоторого $\lambda_1 > 0$. Следовательно, $\text{CH}[X_\alpha]$ содержит неотрицательный луч $\{\lambda v \mid \lambda \geq 0\}$. Подобным же образом существует $\text{CH}[X_\beta]$, содержащий неположительный луч $\{\lambda v \mid \lambda \leq 0\}$. Если $\alpha \leq \beta$, то $\text{CH}[X_\beta]$ содержит все подпространство $\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Последнее противоречит остроте конуса $\text{CH}[X_\beta]$. Итак, C^* – острый конус. Включения $\bigcup_\alpha X_\alpha \subseteq V$ и $C^* \supseteq \text{CH}[\bigcup_\alpha X_\alpha]$ верны, так как $X_\alpha \subseteq V$ и $C^* \supseteq \text{CH}[X_\alpha] \supseteq X_\alpha$ для любого α , следовательно, $\bigcup_\alpha X_\alpha \subseteq V$ и $C^* \supseteq \bigcup_\alpha X_\alpha$, а $\text{CH}[\bigcup_\alpha X_\alpha]$ – наименьший выпуклый конус, содержащий $\bigcup_\alpha X_\alpha$. Обратное включение $C^* \subseteq \text{CH}[\bigcup_\alpha X_\alpha]$ вытекает из цепочки следований

$$\begin{aligned} X_\alpha \subseteq \bigcup_\alpha X_\alpha &\implies \text{CH}[X_\alpha] \subseteq \text{CH}[\bigcup_\alpha X_\alpha] \\ &\implies C^* = \bigcup_\alpha \text{CH}[X_\alpha] \subseteq \text{CH}[\bigcup_\alpha X_\alpha]. \end{aligned}$$

Таким образом, $C^* = \text{CH}[\bigcup_\alpha X_\alpha]$ есть верхняя грань цепи $\{\text{CH}[X_\alpha]\}$ в множестве $\text{PCON}[V]$, частично упорядоченном по включению. Отсюда, в силу леммы Цорна [12, с. 32] множество $\text{PCON}(V)$ имеет максимальные элементы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть V – симметричное множество единичных векторов из $\mathbb{R}^n$. Множество $S_a = \mathbb{R}^n \setminus a + C$, где C – некоторый максимальный среди острых конусов, порождаемых подмножествами множества V , является семипространством V -выпуклости в точке $a \in \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с определением семипространства требуется показать, что $S_a = \mathbb{R}^n \setminus a + C$ есть максимальное V -выпуклое множество, не содержащее a . Отметим сразу же, что $a \notin S_a$, так как $0 \in C$ и $a \in a + C$. Для доказательства V -выпуклости S_a предположим противное: существует V -прямая l , которая имеет несвязное пересечение с S_a . $l \cap S_a$ имеет только две компоненты связности, так как $l \cap a + C$ связно в силу классической выпуклости $a + C$. Множество $l \cap a + C$ не есть луч, так как иначе $l \cap S_a = l \cap (\mathbb{R}^n \setminus a + C)$ было бы связно вопреки предположению. Отсюда вытекает, что $l \cap S_a$ есть объединение непересекающихся лучей r_1 и r_2 .

Пусть $C = \text{CH}[X]$ для некоторого $X \subset V$. Рассмотрим $C' = \text{CH}[X \cup v]$, где v – направляющий вектор прямой l .

Покажем, что C' – острый конус. Действительно, пусть C' содержит прямую l' , проходящую через начало координат и порождаемую вектором v' . Тогда существуют $v_1, \dots, v_k \in X$ и $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0, \lambda \geq 0$ такие, что

$$v' = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i + \lambda v. \quad (1)$$

Подобным же образом для некоторых $u_1, \dots, u_l \in X, \mu_1 > 0, \dots, \mu_l > 0, \mu \geq 0$, имеет место

$$-v' = \sum_{j=1}^l \mu_j u_j + \mu v. \quad (2)$$

Складывая (1) и (2), получаем

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^l \mu_j u_j = -(\lambda + \mu)v. \quad (3)$$

В силу остроты C $\lambda > 0$ либо $\mu > 0$, т.е. $\lambda + \mu > 0$. Слева в (3) стоит вектор из C , следовательно, $v \in C$. Из этого вытекает, что оба луча r_1 и r_2 , лежащие на V -прямой l с направляющим вектором v , не могут одновременно содержаться в $\mathbb{R}^n \setminus a + C = S_a$. Это приводит к противоречию с тем, что $l \cap S_a$ есть объединение r_1 и r_2 . Следовательно, прямая l' не содержится в C' и конус $C' = \text{CH}[X \cup v]$ острый.

Поскольку лучи r_1 и r_2 не содержатся в $a + C$, то острый конус $C' = \text{CH}[X \cup v]$ строго включает конус C , что противоречит максимальнойности C как элемента $\text{PCON}(V)$. Итак, V -выпуклость множества $\mathbb{R}^n \setminus a + C$ установлена.

Перейдем к доказательству максимальности $\mathbb{R}^n \setminus a + C$ как V -выпуклого множества, не содержащего a . С этой целью предположим противное: существует V -выпуклое множество S' такое, что $S_a \subseteq S'$, $S' \setminus S_a \neq \emptyset$, $a \notin S'$. Выберем $z \in S' \setminus S_a$. Ясно, что $z \in a + C$. Мы утверждаем, что луч $r^- = \{z - \lambda v \mid \lambda \geq 0\}$, $v \in X \subset V$, $C = \text{CH}[X]$, содержится в S' . Действительно, существует точка $z - \lambda_1 v \in S_a \subset S'$ ($\lambda_1 > 0$), так как иначе оба луча r^- и $r^+ = \{z + \lambda v \mid \lambda \geq 0\}$ содержались бы в $a + C$, вопреки остроте C . Отрезок $[z, z - \lambda_1 v]$ содержится в S' в силу V -выпуклости S' . Никакая точка $z - \lambda_2 v$ ($\lambda_2 > \lambda_1$) не принадлежит $a + C$ в силу обычной выпуклости $a + C$. Следовательно, $z - \lambda_2 v \in S_a \subset S'$ для $\lambda_2 > \lambda_1$ и весь луч $r^- = \{z - \lambda v \mid \lambda \geq 0\}$ содержится в S' .

Для завершения доказательства нам понадобится более общий факт: для любой точки $u \in S'$ и вектора $v \in X \subset V$ весь луч $r^- = \{u - \lambda v \mid \lambda \geq 0\}$ содержится в S' . Этот факт установлен непосредственно выше для случая, когда $u \in S'$ и $u \in a + C$. Остается рассмотреть только случай $u \in S_a \subset S'$. Действительно, предположим, что для некоторого $\lambda > 0$ и $v \in X$ точка $u - \lambda v \notin S'$. Тогда $u - \lambda v \in a + C = a + \text{CH}[X]$, т.е. $u - \lambda v = a + \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i$, где все $\lambda_i > 0$. Отсюда $u = a + \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i + \lambda v$, что означает $u \in a + C$. Однако, $u \in S_a = \mathbb{R}^n \setminus a + C$. Итак, луч r^- содержится в S' .

Поскольку z было выбрано в $S' \setminus S_a$, то $z \in a + C$. Принимая во внимание $C = \text{CH}[X]$, $X \subseteq V$, мы имеем $a = z - \lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_k v_k$ для некоторых $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0$ и $v_1, \dots, v_k \in X$.

Рассмотрим последовательность точек

$$u_0 = z, \quad u_1 = u_0 - \lambda_1 v_1, \quad \dots, \quad u_k = u_{k-1} - \lambda_k v_k = a.$$

Покажем на основе индукции, что все члены этой последовательности принадлежат S' . В качестве базы индукции имеем $u_0 = z \in S'$. Пусть $u_i \in S'$, тогда u_{i+1} принадлежит лучу $r_{i+1}^- = \{u_i - \lambda_{i+1} v_{i+1} \mid \lambda_{i+1} > 0\}$, где $v_{i+1} \in X \subseteq V$. Как установлено выше, в таком случае весь луч r_{i+1}^- и, значит, u_{i+1} содержится в S' . Таким образом, $u_k = u_{k-1} - \lambda_k v_k = a \in S'$. Получаем противоречие с тем, что $a \notin S'$, откуда вытекает максимальность $S_a = \mathbb{R}^n \setminus a + C$.

Теорема доказана.

Теорема 3 выделяет некоторое семейство семипространств, которые мы называем *C-семипространствами*.

Из теоремы 3 и того факта, что всякое семипространство классической выпуклости в точке $a \in \mathbb{R}^n$ есть максимальный классически выпуклый конус, не содержащий a [10], мы получаем следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. *Любое семипространство классической выпуклости является C-семипространством.*

В общей же ситуации C -семипространства вовсе не исчерпывают всех

семипространств. Действительно, для $\mathbb{R}^2$ и $V = \{\pm(0, 1), \pm(1, 0)\}$ подмножества $\mathbb{R}^2$

$$T_{\alpha, \beta} = \{(x_1, x_2) : x_1 < \alpha, x_2 < 0\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 < 0, x_2 < \beta\} \\ \cup \{(x_1, x_2) : x_1 \geq \alpha, x_2 \geq \beta\}$$

составляют при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ двухпараметрическое семейство семипространств в нуле $\mathbb{R}^2$, не являющихся C -семипространствами.

Описание конуса $K(X)$ частичной выпуклости или, равносильно, множества $\text{Dir}(X)$ дает возможность определения мер выпуклости множеств в $\mathbb{R}^n$, важных для исследования проблем распознавания образов и обработки изображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Вектор $v \neq 0$ называется *локальным направлением* для множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $x \in X$, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$, точка $x + \delta v \in X$. Множество всех локальных направлений в точке $x \in X$ называется *локальным конусом* в $x \in X$ и обозначается через $L_x(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$. Минимальный конус $G_x(X)$ такой, что множество $x + G_x(X)$ содержит X , называется *глобальным конусом* множества X в точке x .

Заметим, что $G_x(X)$ является конической оболочкой, вообще говоря невыпуклой, множества $X - x$.

Легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ справедливо включение $L_x(X) \subseteq G_x(X)$. При этом $L_x(X) = G_x(X)$, если x является внутренней точкой X .

Пусть $\text{Br}(X)$ – граница множества X .

ТЕОРЕМА. Для замкнутого множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет место соотношение

$$K(X) = \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{x \in \text{Br}(X)} G_x(X) \setminus L_x(X) \right) \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем $\subseteq$ -включение. Предположим противное. Пусть $e \in K(X)$ – вектор, который не принадлежит правой части (4). Следовательно, $e \in \bigcup_{x \in \text{Br}(X)} G_x(X) \setminus L_x(X)$. Тогда существует точка $x_0 \in \text{Br}(X)$ такая, что $e \in G_{x_0}(X)$ и $e \notin L_{x_0}(X)$. Последнее означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$ такое, что $x_0 + \delta e \notin X$. С другой стороны, существует $\lambda > 0$ такое, что $x_0 + \lambda e \in X$, иначе, для луча $r = \{x_0 + \mu e : \mu \geq 0\}$ мы имеем, что конус $G_{x_0}(X) \setminus r$ содержит X и строго содержится в $G_{x_0}(X)$, что противоречит минимальности $G_{x_0}(X)$. Таким образом, прямая $x_0 + \mu e$, $\mu \in \mathbb{R}$, имеет несвязное пересечение с X , вследствие малости δ , и $e \notin K(X)$. Получили противоречие с предположением.

2) *Обратное включение.* Предположим противное. Пусть вектор $v \in \mathbb{R}^n \setminus (\bigcup_{x \in \text{Br}(X)} G_x(X) \setminus L_x(X))$ и $v \notin K(X)$. Последнее означает, что найдется прямая l , параллельная v , такая, что $l \cap X$ будет не связно.

Так как, по предположению, X является замкнутым, то пересечение $l \cap \mathbb{R}^n \setminus X$ открыто на прямой l и, вследствие несвязности $l \cap X$, содержит ограниченный открытый отрезок (интервал) (a, b) . Точки a и b принадлежат границе X . Пусть $v = b - a$. Для $0 < \delta < 1$ точки $a + \delta v = a + \delta(b - a) = (1 - \delta)a + \delta b$ составляют внутренность отрезка $[a, b]$ и лежат в $\mathbb{R}^n \setminus X$. Из определения 3 следует, что v не является локальным направлением множества X в точке $a \in X$, т.е. $v \notin L_a(X)$. С другой стороны, $v \in G_a(X)$, так как луч $\{a + \lambda v : \lambda > 0\}$ содержит $b \in X$. Таким образом, $v \in G_a(X) \setminus L_a(X)$ и, следовательно, $v \notin \mathbb{R}^n \setminus (\bigcup_{x \in \text{Br}(X)} G_x(X) \setminus L_x(X))$, что противоречит нашему предположению.

Авторы выражают благодарность В. В. Гороховику и Е. А. Барабанову за полезные замечания и обсуждение результатов.

Институт математики АН Беларуси

Поступило

20.03.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Rawlins G. J. E., Wood D. Ortho-convexity and its generalizations // Computational Morphology / ed. G. T. Toussaint. Amsterdam: North-Holland, 1988. P. 137–152.
- [2] Rawlins G. J. E., Wood D. A decomposition theorem for convexity spaces // J. Geom. 1989. V. 36. P. 143–157.
- [3] Wood D. An isothetic view of computational geometry // Computational Geometry / ed. G. T. Toussaint. Amsterdam: North-Holland, 1985. P. 429–459.
- [4] Schuierer S., Wood D. Restricted orientation visibility. Report 40: Univ. Freiburg, 1991.
- [5] Метельский Н. Н., Крикун В. С. Изотетические оболочки ограниченного ранга, типа и рода. Минск: Препринт ин-та матем. АН БССР № 10 (410), 1990.
- [6] Метельский Н. Н., Крикун В. С. Размещения изотетических блоков, оптимальные по оболочечным критериям // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317. № 2. С. 320–323.
- [7] Метельский Н. Н., Крикун В. С. Метод иерархического размещения изотетических блоков. Минск: Препринт ин-та матем. АН БССР № 27 (427), 1990.
- [8] Солтан В. П. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. Кишинев: Штиинца, 1984.
- [9] Klee V. L. The structure of semispaces // Math. Scand. 1956. V. 4. P. 54–64.
- [10] Hammer P. C. Maximal convex sets // Duke Math. J. 1956. V. 22. P. 103–106.
- [11] Hammer P. C. Semispaces and the topology of convexity // Convexity / ed. V. L. Klee. Providence: AMS Publ., 1963. P. 305–316.
- [12] Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.
- [13] Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980.