Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Немировский, Строго псевдовыпуклые области и алгебраические многообразия, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 414–422

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1841>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:35:31

СТРОГО ПСЕВДОВЫПУКЛЫЕ ОБЛАСТИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

С. Ю. Немировский

Введение. Настоящая работа посвящена использованию строго псевдовыпуклых областей для изучения геометрии компактных комплексных многообразий. Идея этого подхода принадлежит Грауэрту [1], в этой же работе впервые была исследована связь между знаком нормального расслоения и структурой окрестности подмногообразия. Однако свойства построенных строго псевдовыпуклых (или псевдोगнутых) областей использовались для изучения самого подмногообразия (например, для доказательства теоремы Кодайры о вложении, см. также [2]) или для исследования ростков голоморфных функций на нем [3].

Наша цель – воспользоваться разбиением компактного многообразия на окрестность гиперповерхности и строго псевдовыпуклую область (теорема 1.2) и получить глобальные результаты об этом многообразии.

В случае комплексной поверхности мы можем весьма подробно описать геометрию комплексных кривых в строго псевдовыпуклой области, а именно, доказать “теорему Ходжа об индексе” для такой области (теорема 3.1). Этот результат позволяет показать связь теорем об индексе “в относительной размерности 0 и 2” [4] и дать прямое доказательство известной теоремы Кодайры [5] об алгебраичности компактной комплексной поверхности, содержащей неприводимую кривую с положительным индексом самопересечения.

Для многообразий большей размерности наш метод позволяет получить вариант теоремы Кодайры, недоступный для оригинального доказательства (теорема 4.3). Мы доказываем алгебраичность компактного комплексного многообразия, содержащего гладкую гиперповерхность с положительным нормальным расслоением такую, что все не пересекающиеся с ней аналитические подмногообразия – гладкие гиперповерхности с отрицательным нормальным расслоением (или гиперповерхности, изоморфные проективным пространствам). Этот результат дает класс алгебраических многообразий Мойшезона.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93–01–00225, и Международного научного фонда, грант 508.

Возвращаясь к случаю поверхности, мы доказываем геометрический критерий рациональности, утверждающий, что компактная комплексная поверхность, содержащая гладкую кривую рода ноль с положительным индексом самопересечения и пересекающую любую кривую на этой поверхности, рациональна.

В заключение в п. 6 мы формулируем ряд гипотез о расположении строго псевдовыпуклых областей на алгебраических поверхностях. Особый интерес, как нам кажется, представляет гипотеза 6.1 о существовании компактной кривой в дополнении к строго псевдовыпуклой области на алгебраической поверхности. Для пояснения этой гипотезы мы переносим на строго псевдовыпуклые области еще один результат алгебраической геометрии – теорему Лефшеца об $(1, 1)$ -классах (теорема 6.1).

1. Строго псевдовыпуклые области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть D – комплексное многообразие, $U \subset D$ – относительно компактная область в D с непустой гладкой границей. Область U *строго псевдовыпукла* в смысле Леви, если для любой точки $x \in \partial U$ существуют окрестность $V \ni x$ и гладкая в V функция φ такие, что

- а) $U \cap V = \{y \in V \mid \varphi(y) < 0\}$;
- б) $\forall y \in V \cap \partial U \quad d\varphi(y) \neq 0$;
- в) ограничение формы $i \cdot \partial\bar{\partial}\varphi$ на комплексное касательное пространство $T_x^c \partial U = \text{Ker}(\partial\varphi(x))$ положительно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Такие области называют еще *гладкими* строго псевдовыпуклыми.

Строго псевдовыпуклые области являются модификациями штейновых пространств в смысле следующей теоремы Грауэрта.

ТЕОРЕМА 1.1 [2, гл. VII]. Пусть U – строго псевдовыпуклая область, тогда существуют штейново пространство U^* (быть может, особое) и собственное голоморфное отображение $\pi: U \rightarrow U^*$ такие, что

- а) отображение колец голоморфных функций $\mathcal{O}(U^*) \rightarrow \mathcal{O}(U)$ – изоморфизм;
- б) существует конечное множество $\{x_1, \dots, x_N\} \subset U^*$ такое, что $\pi: U \setminus \pi^{-1}\{x_1, \dots, x_N\} \rightarrow U^* \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$ – биголоморфное отображение.

Пространство U^* называют *редукцией Реммерта* области U .

Отметим важный способ получения строго псевдовыпуклых областей.

ТЕОРЕМА 1.2 [1], [3]. Пусть $Y \subset X$ – гладкая гиперповерхность в компактном комплексном многообразии. Если нормальное расслоение $\mathcal{N}_Y$ положительно, то область $X \setminus Y$ допускает исчерпание строго псевдовыпуклыми областями.

2. Индексы пересечения. Пусть S – гиперповерхность (не обязательно гладкая) в комплексном многообразии X .

Интегрирование по S определяет по двойственности Пуанкаре класс когомологий из $H^2(X, \mathbb{R})$. Хорошо известно, что этот класс совпадает с первым классом Черна линейного расслоения $\mathcal{O}_X(S)$.

Если C – компактная кривая на X , то определен индекс пересечения

$$S \cdot C = \int_C c_1(\mathcal{O}(S)) = \deg \mathcal{O}(S)|_C.$$

В случае, когда S – компактная кривая на комплексной поверхности, определен индекс самопересечения

$$S^2 = S \cdot S = \int_S c_1(\mathcal{O}(S)) = \deg \mathcal{O}(S)|_S = \deg \mathcal{N}_S.$$

Заметим, что если C неприводима и не лежит в S , то индекс пересечения $S \cdot C$ – неотрицательное целое число.

По линейности индекс пересечения продолжается на все дивизоры на X .

Следующее утверждение очевидно, но очень полезно.

ЛЕММА 2.1. Пусть $S = \operatorname{div}(f)$ – дивизор мероморфной функции, а C – компактная кривая, тогда $S \cdot C = 0$.

3. Теорема об индексе для строго псевдовыпуклой области на комплексной поверхности. Пусть $U \subset X$ – строго псевдовыпуклая область на комплексной поверхности.

ЛЕММА 3.1. Пусть $C_1, \dots, C_n$ – компактные неприводимые кривые в U . Существуют натуральные числа k_j , $j = 1, \dots, n$, такие, что

$$-k_j C_j \cdot C_j > \sum_{i \neq j} k_i C_i \cdot C_j \quad \text{для любого } j.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\bigcup_{j=1}^n C_j$ связно.

Пусть $\pi: U \rightarrow U^*$ – редукция Реммерта, тогда $\pi(\bigcup_j C_j) = a$ – точка в силу штейновости U^* .

Положим $S = \pi^{-1}(a)$. Выберем на каждой C_j регулярную точку S и росток аналитической кривой V_j в этой точке, трансверсальный к S .

Существует функция f , голоморфная в окрестности a , такая, что росток $\operatorname{div}(f)$ в точке a содержит ростки $\pi(V_j)$, корректно определенные в силу собственности π [2]. Положим $g = \pi^* f = f \circ \pi$, тогда

- i) g имеет ноль порядка $k_j > 0$ на C_j , $j = 1, \dots, n$;
- ii) для любого j существует компонента $\operatorname{div}(g)$, пересекающая C_j и отличная от C_i , $i \neq j$.

Немедленно получаем, что для любого j

$$0 = \operatorname{div}(g) \cdot C_j > \sum_{i=1}^n k_i C_i \cdot C_j.$$

Теперь воспользуемся простым результатом из линейной алгебры.

ЛЕММА 3.2 [4, теорема 1, приложение]. Пусть B – симметрическая матрица, и $b_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$.

Если существуют натуральные числа m_j такие, что

$$-m_i b_{ii} > \sum_{j \neq i} m_j b_{ij} \quad \text{для любого } i,$$

то матрица B отрицательно определена.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $C_1, \dots, C_N$ – компактные неприводимые кривые в строго псевдовыпуклой области. Тогда матрица $(C_i \cdot C_j)_{i,j=1,\dots,N}$ отрицательно определена.

Заметим, что по теореме Грауэрта из п. 1 область U содержит конечное число компактных кривых. Из доказанной теоремы следует, что их классы когомологий линейно независимы.

Можно сформулировать теорему и чуть иначе: индекс самопересечения любого дивизора, с носителем в U отрицателен.

4. Алгебраические многообразия. Учитывая теорему 1.2, естественно применить результаты предыдущего пункта к следующей ситуации: X – компактная комплексная поверхность, содержащая гладкую кривую S с положительным индексом самопересечения.

ТЕОРЕМА 4.1. Существует лишь конечное число неприводимых кривых C_j , не пересекающихся с S . Матрица пересечений $(C_i \cdot C_j)$ отрицательно определена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C_1, \dots, C_m$ – любое конечное семейство различных неприводимых кривых в $X \setminus S$. По теореме 1.2 существует строго псевдовыпуклая область $U \supset \bigcup_j C_j$.

По теореме об индексе для U когомологические классы кривых C_j линейно независимы, следовательно,

$$m \leq b^2(X) = \dim_{\mathbb{R}} H^2(X, \mathbb{R}),$$

и конечность числа кривых в $X \setminus S$ доказана.

Осталось применить теорему об индексе к строго псевдовыпуклой области, содержащей все эти кривые.

Этот результат дает геометрическую иллюстрацию к теореме Ходжа об индексе на X и ее очевидное доказательство для эффективных дивизоров [6]. Отметим, впрочем, что мы не предполагали X ни кэлеровой, ни алгебраической.

Не следует думать, что классы кривых S и C_j порождают $H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{Z})$ и тем более $\text{Pic}(X)$. Это может быть не так, даже если S – сфера.

ПРИМЕР. Пусть $X = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, S – диагональ. Тогда $S^2 = 2$, и в $X \setminus S$ нет компактных кривых. Но $H^{1,1}(X)$ двумерно и не может порождаться только классом S .

Развитая техника позволяет получить и более сильное утверждение о поверхности X . Известная теорема Кодаиры [5], [7] утверждает, что компактная комплексная поверхность, содержащая неприводимую кривую с положительным индексом самопересечения, алгебраична. Здесь мы докажем слегка ослабленный вариант этой теоремы.

ТЕОРЕМА 4.2. *Компактная комплексная поверхность X алгебраична тогда и только тогда, когда содержит гладкую кривую с положительным индексом самопересечения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X алгебраична, то по теореме Бертини [6] в качестве такой кривой можно взять общее гиперплоское сечение.

Обратно, пусть $X \supset S$, $S^2 > 0$. Пусть $C_1, \dots, C_N$ – все неприводимые кривые в $X \setminus S$. Применяя σ -процесс, можно считать, что C_j – гладкие и пересекаются трансверсально. Теперь мы построим на X положительное линейное расслоение вида $\mathcal{O}(n \cdot S - \sum_{j=1}^N m_j C_j)$, $n, m_j \in \mathbb{N}$.

а) Поскольку $\deg \mathcal{O}(S)|_S = S^2 > 0$, существует замкнутая неотрицательная $(1, 1)$ -форма ω_1 на X , положительная в некоторой окрестности $V \supset S$ и представляющая класс $c_1(\mathcal{O}(S)) \in H^2(X, \mathbb{R})$ (см. [6]).

б) Воспользуемся следующим классическим фактом [8].

ЛЕММА. *Пусть $M \subset Y$ – подмногообразие комплексного многообразия, $\mathcal{L}$ – линейное расслоение на Y , форма ω представляет $c_1(\mathcal{L})$, и $\mathcal{L}|_M$ положительно.*

Тогда существует гладкая функция φ с носителем в окрестности M такая, что $(1, 1)$ -форма $\omega' = \omega + \partial\bar{\partial}\varphi$ положительна на $T_x Y$ в любой точке $x \in M$.

Положительность на M получается из $\partial\bar{\partial}$ -леммы, а на $TY|_M$ – добавлением функции вида $\sum \psi_\alpha \|Z_\alpha\|^2$, где $\{\psi_\alpha\}$ – разбиение единицы, а $(Z_\alpha = 0)$ – локальные уравнения M .

По лемме 3.1 выберем числа $m_j > 0$ так, что

$$\left(-\sum_{j=1}^N m_j C_j\right) \cdot C_i > 0 \quad \text{для всех } i.$$

Применяя только что сформулированную лемму к C_j и $\mathcal{O}(-\sum_{j=1}^N m_j C_j)$, получим замкнутую $(1, 1)$ -форму ω_2 на X , представляющую $c_1(\mathcal{O}(-\sum_{j=1}^N m_j C_j))$ и положительную на $T_x X$ в точках $x \in \bigcup_{j=1}^N C_j$.

в) Пусть U – строго псевдовыпуклая область в $X \setminus S$, содержащая все C_j и такая, что $U \ni X \setminus V$.

На редукции $U^* = \pi(U)$ существует строго плюрисубгармоническая функция f класса C^∞ (вне особенностей U^*). Положим $g = f \circ \pi$, тогда форма $\partial\bar{\partial}g$ положительна в $U \setminus \bigcup_{j=1}^N C_j$.

Таким образом, существует $k > 0$ такое, что $(1, 1)$ -форма $\omega_2 + k \cdot \partial\bar{\partial}g$ положительна во всей области U .

г) Пусть теперь φ – “шапочка” в U , $\varphi \equiv 1$ на $X \setminus V$.

В силу а) и в) существует $n > 0$ такое, что форма

$$\omega = \omega_2 + k \cdot \partial\bar{\partial}(\varphi \cdot g) + n \cdot \omega_1$$

положительна на всем X . Но эта форма представляет класс $c_1(\mathcal{O}(n \cdot S - \sum_{j=1}^N m_j C_j))$, значит, это расслоение положительно, и по теореме Кодыры о вложении (см. [2], [6]) поверхность X – алгебраическая.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это доказательство, по-видимому, самое прямое из известных; оно фактически совпадает с рассуждением в [6], доказывающим, что раздутие алгебраического многообразия в точке алгебраично.

Существование положительного линейного расслоения вида $\mathcal{O}(n \cdot S - \sum_{j=1}^N m_j C_j)$ равносильно в силу теоремы 1 такому утверждению.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Существует константа $\nu > 0$ такая, что для любой кривой C на X и для любого $j = 1, \dots, N$*

$$C \cdot C_j < \nu C \cdot S.$$

Еще одно достоинство изложенного метода – возможность его переноса на многомерный случай.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть $S \subset X$ – гладкая гиперповерхность с положительным нормальным расслоением в компактном комплексном многообразии. Пусть все компактные аналитические подмножества в $X \setminus S$ – это гладкие гиперповерхности с отрицательными нормальными расслоениями.*

Тогда X – алгебраическое многообразие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать конечность числа различных гиперповерхностей в $X \setminus S$: далее доказательство такое же, как у теоремы 2.

Пусть $C_1, \dots, C_m$ – различные гиперповерхности в $X \setminus S$. По условию они алгебраичны и не пересекаются.

Выберем для каждого $j = 1, \dots, m$ кривую $S_j \subset C_j$, тогда $C_i \cdot S_j = 0$ при $i \neq j$ и отрицателен при $i = j$, следовательно, когомологические классы C_j линейно независимы, и $m \leq b^2(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нельзя убрать требование отрицательности $\mathcal{N}_{C_j}$, вообще говоря, неверно, что гиперповерхность в строго псевдовыпуклой области имеет отрицательное нормальное расслоение. Однако, это будет так, если на гиперповерхности каждый эффективный дивизор положителен (работает рассуждение из леммы 3.1, см. также [1]). Можно, например, предположить, что все C_j – проективные пространства.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\dim_{\mathbb{C}} X \geq 3$, и в $X \setminus S$ содержатся кривые, не лежащие на C_j , то построение из теоремы 2 не проходит: ограничение любого расслоения вида $\mathcal{O}(n \cdot S - \sum_{j=1}^N m_j C_j)$ на такую кривую отрицательно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Утверждение о конечности числа гиперповерхностей справедливо и без предположения об отсутствии пересечений. Если гиперповерхности алгебраичны, то можно убрать и условие отрицательности нормальных расслоений.

В работе [5] теорема 2 сводится к результату Кодаиры и Чжоу об алгебраичности компактной поверхности с двумя алгебраически независимыми мероморфными функциями. Используя то же рассуждение, легко показать, что на компактном комплексном многообразии X , содержащем гладкую гиперповерхность с положительным нормальным расслоением, существует $\dim_{\mathbb{C}} X$ алгебраически независимых мероморфных функций, т.е. степень трансцендентности поля $\mathcal{M}(X)$ максимальна, и X – многообразие Мойшезона. Однако, это свойство не гарантирует алгебраичности X (см. [4]).

5. Рациональные поверхности. Алгебраическая поверхность называется *рациональной*, если она бирационально эквивалентна $\mathbb{CP}^2$ (см. [6]).

Классическим критерием рациональности является следующая лемма М. Нётера [6].

ЛЕММА 5.1. Пусть на алгебраической поверхности лежит гладкая кривая S рода ноль такая, что $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathcal{O}(S)) > 1$. Тогда эта поверхность рациональна.

Число $q(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(\Omega^1)$, т.е. размерность пространства голоморфных 1-форм, называется *иррегулярностью* компактной комплексной поверхности X . Если поверхность кэлерова, то из разложения Ходжа

$$q(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathcal{O}) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathbb{C}) = \frac{1}{2} \cdot b^1(X).$$

ЛЕММА 5.2. Пусть X – компактная комплексная поверхность, содержащая гладкую кривую S рода ноль с $S^2 > 0$. Тогда X рациональна тогда и только тогда, когда $b^1(X) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X рациональна, то $q(X) = 0$, поскольку иррегулярность – бирациональный инвариант.

Обратно, X алгебраична по теореме 4.2, значит, из $b^1(X) = 0$ следует, что $H^1(\mathcal{O}) = 0$.

Из точной тройки пучков $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(S) \rightarrow \mathcal{O}_S(S) \rightarrow 0$ на X получаем точную последовательность кохомологий

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}(S)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_S(S)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}) \cong 0.$$

Таким образом,

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathcal{O}(S)) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathcal{O}) + \dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathcal{O}_S(S)) = 2 + S^2 > 2,$$

что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если предполагать X алгебраической, то достаточно требовать $S^2 \geq 0$.

Теперь мы можем доказать геометрический признак рациональности.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть X – компактная комплексная поверхность, содержащая гладкую кривую S рода ноль с $S^2 > 0$. Если в $X \setminus S$ нет компактных кривых, то X рациональна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точной последовательности пары (X, S) получаем точную последовательность

$$H_c^1(X \setminus S, \mathbb{C}) \rightarrow H_c^1(X, \mathbb{C}) \rightarrow H_c^1(S, \mathbb{C}).$$

Последняя группа тривиальна, поскольку $S \cong \mathbb{CP}^1$.

Многообразие $X \setminus S$ допускает исчерпание штейновыми областями, в каждой из которых

$$H_c^1(U, \mathbb{C}) \cong H^3(U, \mathbb{C}) = 0$$

в силу двойственности Пуанкаре и теоремы Серра.

Таким образом, к X применима лемма 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Учитывая доказательство теоремы 4.2, можно было воспользоваться теоремой Лефшеца о гиперплоском сечении.

6. Некоторые гипотезы. Начнем со следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть U – строго псевдовыпуклая область на комплексном многообразии, и $\mathcal{L}$ – линейное расслоение на U , тривиальное вне некоторого компакта. Тогда $\mathcal{L} = \mathcal{O}(D)$ для некоторого дивизора D с компактным носителем в U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U^* = \pi(U)$ – редукция Реммерта области U . По теореме Грауэрта [9] прямой образ $\pi_* \mathcal{L}$ – когерентный пучок на U^* . Кроме того, $\pi_* \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{U^*}$ вне некоторого компакта $K \in U^*$.

По теореме А Картана существует нетривиальное голоморфное сечение $s \in \pi_* \mathcal{L}(U^*) \cong \mathcal{L}(U)$. Вне K это сечение совпадает с голоморфной функцией, продолжим ее по теореме Хартогса до голоморфной функции $f \in \mathcal{O}_{U^*}(U^*)$.

Частное s/f определяет мероморфное сечение $\mathcal{L}$, дивизор которого имеет компактный носитель, и $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}(\text{div}(s/f))$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это фактически теорема Лефшеца об $(1, 1)$ -классах для строго псевдовыпуклых областей.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть U – строго псевдовыпуклая область на компактной комплексной поверхности X . Линейное расслоение $\mathcal{L}$ такое, что $c_1(\mathcal{L}) \cdot c_1(\mathcal{L}) > 0$, не тривиально на $X \setminus U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует строго псевдовыпуклая область $U' \ni U$ (см. [2]), применим к ней лемму 1 и теорему об индексе.

Исходя из этих результатов и теоремы 1.2, можно сформулировать такую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 6.1. Пусть U – строго псевдовыпуклая область на алгебраической поверхности X , тогда в $X \setminus U$ лежит компактная кривая с положительным индексом самопересечения.

ЗАМЕЧАНИЕ. В простейшем случае, когда U – малая окрестность компактной вещественной кривой в X , гипотеза вытекает из соображений трансверсальности.

Следующая гипотеза основана на соображениях голоморфной размерности [2].

ГИПОТЕЗА 6.2. Пусть U – область на компактной комплексной поверхности, не содержащая компактных кривых с нулевым самопересечением. Если $\mathcal{O}(U) \neq \mathbb{C}$, то любой компакт в U имеет строго псевдовыпуклую окрестность.

Приняв эти гипотезы, мы получаем, например, такой результат, являющийся усилением гипотезы А.Г. Витушкина (доказанной в [10]).

ГИПОТЕЗА 6.3. Пусть U – область в $\mathbb{CP}^2$, и ограничение формы Фубини–Штуди на U не когомологично нулю. Тогда любая голоморфная функция на U постоянна.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
02.08.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Грауэрт Г. Модификации и исключительные аналитические пространства // Комплексные пространства. М.: Мир, 1965. С. 205–299.
- [2] Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.
- [3] Suzuki O. Neighborhoods of a smooth compact algebraic curve embedded in a 2-dimensional complex manifold // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A. 1975. V. 11. № 1. P. 185–199.
- [4] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. Т. 1, 2. М.: Наука, 1986.
- [5] Кодаира К. О компактных комплексно-аналитических поверхностях. I // Математика. 1962. Т. 6. № 6.
- [6] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. Т. 1, 2. М.: Мир, 1982.
- [7] Barth W., Peters C., Van de Ven A. Compact complex surfaces. N. Y.: Springer, 1984.
- [8] Уэллс Р. Дифференциальное исчисление на комплексном многообразии. М.: Мир, 1976.
- [9] Grauert H., Remmert R. Coherent analytic sheaves. N. Y.: Springer, 1984.
- [10] Ivashkovich S., Shevchishin V. Pseudoholomorphic curves and envelopes of meromorphy. Preprint: Bochum, 1994.