Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Яшин, О полноте одной новой интуиционистской связки, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 423–433

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1842>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:18:52

О ПОЛНОТЕ ОДНОЙ НОВОЙ ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ СВЯЗКИ

А. Д. Яшин

§ 0. Введение

Обозначим через H интуиционистское исчисление высказываний с пропозициональными переменными $p, q, r, \dots$ (при необходимости с индексами), с логическими константами 1 (истина) и 0 (ложь), с логическими связками $\vee, \&, \supset, \neg, \equiv$, аксиоматизированное посредством известных схем аксиом и правила *modus ponens* [1].

Пусть φ – дополнительная одноместная связка (понятие формулы расширяется естественным образом). Через $H(\varphi)$ будем обозначать исчисление, полученное из H добавлением некоторых новых схем аксиом для φ (предполагается, что в старые схемы можно подставлять формулы расширенного языка). Формулы, не содержащие φ , будут называться *чистыми* формулами.

Исчисление $H(\varphi)$ называется *консервативным* над H , если для любой чистой формулы B

$$H(\varphi) \vdash B \implies H \vdash B.$$

Формулу вида $\varphi(p) \equiv B$, где B – чистая, будем называть *явным соотношением* для φ .

Аксиомой однозначности для φ называется формула

$$(p \equiv q) \supset (\varphi(p) \equiv \varphi(q)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [2]. Исчисление $H(\varphi)$ определяет новую связку по П. С. Новикову, если выполнены следующие условия:

- N0) $H(\varphi)$ консервативно над H ;
- N1) в $H(\varphi)$ выводима аксиома однозначности для φ ;
- N2) для любой чистой формулы B исчисление $H(\varphi) + \{\varphi(p) \equiv B\}$ не консервативно над H (другими словами, к $H(\varphi)$ невозможно добавление никакого явного соотношения).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [3]. Исчисление $H(\varphi)$ *определяет новую интуиционистскую связку по Д. Габбая*, если выполнены следующие условия:

- G0) $H(\varphi)$ консервативно над H ;
- G1) в $H(\varphi)$ невыводимо никакое явное соотношение для φ ;
- G2) $H(\varphi)$ имеет дизъюнктивное свойство

$$H(\varphi) \vdash A \vee B \implies H(\varphi) \vdash A \quad \text{или} \quad H(\varphi) \vdash B;$$

- G3) связка φ не должна быть “слишком неклассической”, т.е. в исчислении $H(\varphi) + \{\neg\neg p \supset p\}$ должно быть выводимо некоторое явное соотношение;
- G4) аксиомы $H(\varphi)$ должны определять “смысл” связки φ однозначно, т.е. $H(\varphi) + H(\varphi') \vdash \varphi(p) \equiv \varphi'(p)$;
- G5) связка φ должна быть определяема в интуиционистском исчислении высказываний второго порядка $H2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [4]. *Логика Бессонова* Bes получается из H добавлением следующих аксиом:

- B1) $(p \supset q) \supset (\varphi(p) \supset \varphi(q))$;
- B2) $\varphi(1)$;
- B3) $\neg\neg\varphi(p)$;
- B4) $\varphi(0) \supset (p \vee \neg p)$.

Учитывая $\vdash 0 \supset A$ и монотонность операторов φ и $\neg$, вместо аксиомы B3) можно использовать аксиому

$$B3') \neg\neg\varphi(0).$$

Исчисление Bes было рассмотрено А. В. Бессоновым (в [4] обозначалось I^φ) как пример исчисления с новой связкой по П. С. Новикову (после известного примера Я. С. Сметанича [2]) и использовалось для доказательства континуальности семейства логик с новой связкой по П. С. Новикову.

ТЕОРЕМА (А. В. Бессонов [4]). *Исчисление Bes определяет новую логическую связку по П. С. Новикову.*

В данной статье

а) строится окрестностная семантика для Bes , приводятся примеры неэквивалентных интерпретаций, откуда следует, что условие G4) определения Д. Габбая не выполняется;

б) показано, что условия G0)–G3) для Bes верны, а G5) выполнено в слабом смысле;

в) строится пример исчисления, определяющего новую связку по П. С. Новикову, но не имеющего дизъюнктивного свойства.

§ 1. Примеры интерпретаций Bes

Интуиционистская шкала – непустое частично упорядоченное множество. Элементы этого множества принято называть или *вершинами*, или *вынуждающими условиями*, или *мирами*.

Пусть $(F, \leq)$ – шкала. *Верхним конусом* вершины $a \in F$ называется множество $F^a := \{b \in F \mid b \geq a\}$.

Подмножество $X \subseteq F$ называется *коническим* (*наследственным*), если для любого $a \in X$ из $a \leq b$ следует $b \in X$.

Шкалу будем называть *финальной*, если $\forall a \in F \exists b \in F: a \leq b \wedge \max(b)$.

Если шкала имеет наименьший элемент, то он называется *корнем* шкалы.

Оценка пропозициональных переменных в шкале – это отношение $\models$ между вершинами шкалы и пропозициональными переменными, удовлетворяющее условию монотонности вверх:

$$a \models p \text{ и } a \leq b \implies b \models p.$$

Шкала с заданной оценкой переменных называется *моделью Крипке* (*реляционной моделью*). Если $a \models p$, то говорят, что в вершине a истинна переменная p .

Истинность стандартных связок в модели Крипке определяется обычным образом:

$$\begin{aligned} a \models A \& B &\iff a \models A \text{ и } a \models B, \\ a \models A \vee B &\iff a \models A \text{ или } a \models B, \\ a \models A \supset B &\iff \forall b \geq a \ (b \models A \implies b \models B), \\ a \models \neg A &\iff \forall b \geq a \ b \not\models A. \end{aligned}$$

В частности, всегда $a \models 1$ и $a \not\models 0$.

Пусть $M = (F; \models)$ – модель. *Значением* формулы A в модели M называется множество $|A| := \{a \in F \mid a \models A\}$.

Значение формулы A в верхнем конусе вершины a будем обозначать $|A|_a = |A| \cap F^a$.

С использованием символа $|\cdot|$ определения истинности стандартных связок в модели Крипке можно записать так:

$$\begin{aligned} |A \& B| &= |A| \cap |B|, \quad |A \vee B| = |A| \cup |B|, \\ a \models A \supset B &\iff |A|_a \subseteq |B|_a, \quad a \models \neg A \iff |A|_a = \emptyset. \end{aligned}$$

Класс шкал называется *характеристическим* для H , если любая невыводимая в H чистая формула опровергается на одной из шкал этого

класса. Например, для H являются характеристическими следующие классы шкал:

класс конечных деревьев;
 полное бинарное дерево;
 класс шкал Яськовского и др. [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (фольклор). Пусть φ определяется на некотором характеристическом классе шкал монотонным вверх условием так, что все новые аксиомы $H(\varphi)$ общезначимы. Тогда $H(\varphi)$ консервативно над H .

Рассмотрим интерпретации φ_0, φ_1 на классе конечных шкал:

$$\begin{aligned} a \models \varphi_0(p) &\iff \forall b > a \quad b \models p && \text{(пример из [4]),} \\ a \models \varphi_1(p) &\iff a \models p \vee \max(a) && \text{(пример из [6]).} \end{aligned}$$

ЛЕММА 1.1. Для $i = 0, 1$

$$a \models \varphi_i(p), \quad a \leq b \implies b \models \varphi_i(p).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Аксиомы *Bes* общезначимы в указанных интерпретациях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственная проверка. Для обоснования аксиомы *B4*) отметим, что $\max(a) \iff a \models \varphi_i(0)$.

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим две формулы

$$C_0 = (\varphi(p) \supset p) \supset p, \quad C_1 = \varphi(\varphi(p)) \supset \varphi(p).$$

Нетрудно проверить, что C_i общезначима в интерпретации φ_i , и вместе с тем C_0 опровергается в φ_1 и C_1 опровергается в φ_0 .

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Исчисление *Bes* неполно относительно указанных интерпретаций.

Таким образом, примеры φ_0 и φ_1 показывают, что условие *G4*) определения Д. Габбая не выполняется для *Bes*.

§ 2. Окрестностные модели *Bes*

Следуя совету из [7], построим окрестностную семантику для *Bes*.

Окрестностная шкала – тройка $(F, \leq, D)$, где $(F, \leq)$ – интуиционистская шкала, D – функция, сопоставляющая каждой вершине $a \in F$ некоторое семейство $D(a)$ конических подмножеств F^a (эти подмножества можно называть *допустимыми* для a), причем должно выполняться условие

$$D0) \quad X \in D(a) \text{ и } a \leq b \implies X \cap F^b \in D(b).$$

Одноместная связка φ в окрестностной шкале интерпретируется так:

$$a \models \varphi(A) \iff \{b \geq a \mid b \models A\} \in D(a)$$

или, кратко, $a \models \varphi(A) \iff |A|_a \in D(a)$.

ЛЕММА 2.1 (монотонность). В окрестностной модели для любой формулы A $a \models A$ и $a \leq b \implies b \models A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО традиционно, индукцией по построению формулы A . Для проверки индуктивного шага для φ используется D0).

Окрестностную шкалу назовем *окрестностной B -шкалой*, если шкала финальна и функция D удовлетворяет условиям

$$D1) \emptyset \in D(a) \iff \max(a);$$

$$D2) F^a \in D(a);$$

$$D3) \text{ если } X \in D(a), X \subseteq Y \subseteq F^a, Y - \text{коническое, то } Y \in D(a),$$

(другими словами, $D(a)$ замкнуто относительно взятия конических надмножеств в пределах соответствующего конуса).

ЛЕММА 2.2. Все аксиомы *Bes* общезначимы в любой окрестностной B -шкале.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Истинность аксиомы B1) следует из D3). Истинность B2) – из D2). Истинность B4) – из D1). Наконец, истинность B3') – из D1) и финальности шкалы.

ПРИМЕР 2.1. Пусть $D(a) = \{F^a, F^a - \{a\}\}$. Это соответствует интерпретации φ_0 .

ПРИМЕР 2.2. Пусть

$$D(a) = \begin{cases} \{F^a, \emptyset\}, & \text{если } \max(a), \\ \{F^a\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Это соответствует интерпретации φ_i . Заметим, что этот пример дает “минимально возможную” функцию D с учетом D0)–D3).

ПРИМЕР 2.3. В *Bes* невыводима формула $\varphi(p) \& \varphi(q) \supset \varphi(p \& q)$. Пусть $F = \{o, a, b\}$, o – корень, вершины a и b несравнимы. Положим

$$\begin{aligned} D(a) &= \{\emptyset, \{a\}\}, & D(b) &= \{\emptyset, \{b\}\}, \\ D(o) &= \{\{a\}, \{b\}, \{o, a, b\}\}. \end{aligned}$$

Непосредственным рассмотрением убеждаемся, что $(F, \leq, D)$ – окрестностная B -шкала.

Пусть $|p| = \{a\}$, $|q| = \{b\}$. Тогда $o \models \varphi(p) \ \& \ \varphi(q)$ и вместе с тем $o \not\models \varphi(p \ \& \ q)$, так как $|p \ \& \ q| = \emptyset \notin D(o)$.

Пусть M – окрестностная модель и $a \in M$. Модель M^a (релятивизация модели M на конус вершины a) строится путем отбрасывания всех вершин, не входящих в конус точки a . Порядок, оценка пропозициональных переменных и функция D на оставшихся точках остаются прежними. Это определение корректно, так как допустимые относительно данной вершины множества выбирались в ее верхнем конусе.

ЛЕММА 2.3. *Пусть M – окрестностная модель, $a, b \in M$, $a \leq b$. Тогда для любой формулы A*

$$(M, b) \models A \iff (M^a, b) \models A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что определения всех связей в окрестностной модели зависят только от верхнего конуса данной вершины.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Если M – окрестностная B -модель, то M^a – также окрестностная B -модель.*

§3. Каноническая модель Bes

Пусть Γ, Δ – множества формул. Упорядоченная пара $(\Gamma; \Delta)$ называется *непротиворечивой*, если для любых конечных подмножеств $A_1, \dots, A_n \in \Gamma$ и $B_1, \dots, B_k \in \Delta$ формула $(A_1 \ \& \ \dots \ \& \ A_n) \supset (B_1 \vee \dots \vee B_k)$ не выводима в Bes .

ЛЕММА 3.1. *Пусть пара $(\Gamma; \Delta)$ непротиворечива, C – формула. Тогда по крайней мере одна из пар $(\Gamma; \Delta C)$, $(\Gamma C; \Delta)$ непротиворечива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО традиционно, основано на выводимости

$$H \vdash ((p \ \& \ q) \supset r) \supset ((p \supset (q \vee r)) \supset (p \supset r)).$$

Пара $(\Gamma; \Delta)$ называется *максимальной*, если для любой формулы C либо $C \in \Gamma$, либо $C \in \Delta$.

ЛЕММА 3.2. *Для любой непротиворечивой пары $(\Gamma; \Delta)$ найдется максимальная непротиворечивая пара $(\Gamma'; \Delta')$ такая, что $\Gamma \subseteq \Gamma'$ и $\Delta \subseteq \Delta'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 3.1.

Максимальные непротиворечивые пары будем называть для краткости *типами* и обозначать малыми греческими буквами σ, τ и др. При этом $\sigma = (\sigma^+; \sigma^-)$.

ЛЕММА 3.3 (свойства типов).

- (а) $A \& B \in \sigma^+ \implies A \in \sigma^+ \text{ и } B \in \sigma^+$;
- (б) $A \& B \in \sigma^- \implies A \in \sigma^- \text{ или } B \in \sigma^-$;
- (в) $A \vee B \in \sigma^+ \implies A \in \sigma^+ \text{ или } B \in \sigma^+$;
- (г) $A \vee B \in \sigma^- \implies A \in \sigma^- \text{ и } B \in \sigma^-$;
- (д) $\neg A \in \sigma^+ \implies A \in \sigma^-$;
- (е) $A \supset B, A \in \sigma^+ \implies B \in \sigma^+$;
- (ж) $A \supset B \in \sigma^- \implies \text{найдется } \tau \text{ такой, что } \sigma^+ \subseteq \tau^+, A \in \tau^+, B \in \tau^-$;
- (з) $\neg A \in \sigma^- \implies \text{найдется } \tau \text{ такой, что } \sigma^+ \subseteq \tau^+, A \in \sigma^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО на основе примеров выводимых в H формул.

Определим каноническую B -шкалу B . Вершинами этой шкалы будут типы. Частичный порядок на типах определяем по включению первых компонент: $\sigma \leq \tau \iff \sigma^+ \subseteq \tau^+$.

Введем обозначения

$$\|A\| = \{\tau \mid A \in \tau^+\}, \quad \|A\|_\sigma = \{\tau \geq \sigma \mid A \in \tau^+\}.$$

С их использованием можно переформулировать предыдущую лемму.

ЛЕММА 3.4.

- (1) $\|A \& B\|_\sigma = \|A\|_\sigma \cap \|B\|_\sigma$;
- (2) $\|A \vee B\|_\sigma = \|A\|_\sigma \cup \|B\|_\sigma$;
- (3) $A \supset B \in \sigma^+ \iff \|A\|_\sigma \subseteq \|B\|_\sigma$;
- (4) $\neg A \in \sigma^+ \iff \|A\|_\sigma = \emptyset$.

Зададим на канонической B -шкале систему допустимых множеств. Положим $X \in D(\sigma) \iff X$ – коническое подмножество B^σ и для некоторой формулы $\varphi(A) \in \sigma^+ \|A\|_\sigma \subseteq X$.

ЛЕММА 3.5. Если $\varphi(0) \in \sigma^+$, то σ – максимальный элемент в B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу аксиомы В4) получаем $A \vee \neg A \in \sigma^+$ для любой формулы A . Если $A \notin \sigma^+$, то $\neg A \in \sigma^+$, поэтому непротиворечивое добавление формулы A к σ^+ невозможно.

ЛЕММА 3.6. B – финальная шкала.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По аксиоме В3') $\neg\neg\varphi(0) \in \sigma^+$. По лемме 3.3(д) $\neg\varphi(0) \in \sigma^-$. По лемме 3.3(з) найдется τ такой, что $\sigma \leq \tau$, $\varphi(0) \in \tau^+$. По лемме 3.5 получаем $\max(\tau)$.

ЛЕММА 3.7. $(B, \leq, D)$ – окрестностная B -шкала, т.е. выполнены условия D0)–D3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. D0). Пусть $\sigma \leq \tau$, $X \in D(\sigma)$. Покажем, что $X \cap B^\tau \in D(\tau)$. Существует $\varphi(A) \in \sigma^+$ такая, что $\|A\|_\sigma \subseteq X$. Ясно, что $\varphi(A) \in \tau^+$, $\|A\|_\tau = \|A\|_\sigma \cap B^\tau$, поэтому $\|A\|_\tau = X \cap B^\tau$.

D1) следует из леммы 3.5.

D2). $\varphi(1)$ – аксиома, поэтому $\varphi(1) \in \sigma^+$. Далее, $\|1\|_\sigma = B^\sigma$, следовательно, $B^\sigma \in D(\sigma)$.

D3) следует из определения D .

ЛЕММА 3.8. Если $\varphi(B) \in \sigma^-$, то $\|B\|_\sigma \notin D(\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\|B\|_\sigma \in D(\sigma)$. Это означает, что для некоторой $\varphi(A) \in \sigma^+$ верно $\|A\|_\sigma \subseteq \|B\|_\sigma$. По лемме 3.4(3) $A \supset B \in \sigma^+$. Но тогда по аксиоме B1) $\varphi(B) \in \sigma^+$, что невозможно из-за непротиворечивости σ .

Определим на канонической B -шкале оценку пропозициональных переменных следующим образом:

$$\sigma \models p \iff p \in \sigma^+.$$

В других обозначениях $|p| := \|p\|$.

ЛЕММА 3.9 (семантическая лемма). Для любой формулы A

$$|A| = \|A\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по построению A . Базис индукции следует из определения $\models$. Индукционные шаги для стандартных связок следуют из леммы 3.4 и являются традиционными. Рассмотрим шаг индукции для φ .

Пусть $\varphi(A) \in \sigma^+$. Тогда $\|A\|_\sigma \in D(\sigma)$ по определению. По индуктивному предположению $|A|_\sigma = \|A\|_\sigma$. Тогда $|A|_\sigma \in D(\sigma)$, а это и означает $\sigma \models \varphi(A)$.

Пусть $\varphi(A) \in \sigma^-$. По лемме 3.8 $\|A\|_\sigma \notin D(\sigma)$. По индуктивному предположению $|A|_\sigma = \|A\|_\sigma$. Тогда $|A|_\sigma \notin D(\sigma)$, а это и означает $\sigma \not\models \varphi(A)$.

§4. Полнота Bes

ТЕОРЕМА 4.1 (семантическая полнота Bes в классе окрестностных B -шкал). Пусть пара $(\Gamma; \Delta)$ непротиворечива. Тогда существует окрестностная B -модель с корнем, в которой истинны все формулы из Γ и опровергаются все формулы из Δ .

Доказательство. По лемме 3.2 данную непротиворечивую пару $(\Gamma; \Delta)$ можно расширить до типа $\sigma \in B$. По семантической лемме в канонической B -модели имеем $\sigma \models \wedge \Gamma$ и $\sigma \not\models \vee \Delta$. Искомая модель с корнем строится путем релятивизации канонической модели на верхний конус вершины σ .

Следствие 4.1. *Bes имеет дизъюнктивное свойство, т.е.*

$$\text{Bes} \vdash A \vee B \implies \text{Bes} \vdash A \quad \text{или} \quad \text{Bes} \vdash B.$$

Доказательство. Пусть формулы A, B обе невыводимы в Bes . По теореме о полноте существуют модели M_1, M_2 , в корнях o_1, o_2 которых опровергаются формулы A, B соответственно. Построим новую модель $M = (M_1 + M_2)'$ (операция Сморолинского [1]), взяв дизъюнктивное объединение M_1 и M_2 и добавив новый корень o . Оценка переменных в вершинах $\in M_1 + M_2$ остается прежней, в корне o никакие переменные не вынуждаются.

Далее, $D(a)$ для $a \in M_1$ (равно как и для $a \in M_2$) будет прежним. Осталось задать $D(o)$ так, чтобы, во-первых, не “испортить” $D(a)$ для выше расположенных вершин, и, во-вторых, с выполнением условий D0)–D3). Это можно сделать, например, “минимальным” образом: $D(o) := \{M\}$. Легко проверить выполнение условий D0)–D3).

Теперь в силу релятивизованности в модели M имеем $o_1 \not\models A$, $o_2 \not\models B$. По монотонности $o \not\models A$, $o \not\models B$, т.е. $o \not\models A \vee B$.

§ 5. Bes и определение Д. Габбая

G0) $\iff$ N0);

N1) сильнее, чем G1);

G2) $\text{Bes} + \{\neg\neg A \supset A\} \vdash \varphi(p) \equiv 1$;

G3) выполняется (следствие 4.1);

G4) не выполняется (см. примеры φ_0 и φ_1);

G5) рассмотрим интуиционистское исчисление второго порядка

$$H2_c = H2 + \neg\neg\forall z(z \vee \neg z)$$

(“почти классическая протетика”; здесь $H2$ – базисное интуиционистское второпорядковое исчисление, в котором стандартные связки $\vee, \&, \supset, \neg$ рассматриваются как исходные символы).

Предложение 5.1. $H2_c$ консервативно над бескванторным фрагментом $H2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула $\neg\neg\forall z(z \vee \neg z)$ общезначима в классе конечных второпорядковых моделей Крипке без ограничений на допустимые множества [8].

Рассмотрим следующие переводы

$$\begin{aligned} t_0(\varphi(A)) &= \forall z \left(z \vee (z \supset t_0(A)) \right), \\ t_1(\varphi(A)) &= t_1(A) \vee \forall z(z \vee \neg z), \\ t_2(\varphi(A)) &= \forall z(t_2(A) \vee z \vee \neg z) \end{aligned}$$

(предполагается, что эти переводы коммутируют со стандартными связками и сохраняют атомарные формулы).

Легко проверяется

ЛЕММА 5.1. *Для $i = 0, 1, 2$ $\text{Bes} \vdash A \implies H2_c \vdash t_i(A)$.*

Все упомянутые переводы, однако, не точны, т.е. они не являются операциями, “погружающими Bes в $H2_c$ ”. Условие G5), на наш взгляд, можно сформулировать следующим образом: существуют расширение $L2 \supseteq H2$, консервативное над бескванторным фрагментом $H2$, и отображение $t: F_m(\text{Bes}) \rightarrow F_m(H2)$ такое, что $\text{Bes} \vdash A \iff L2 \vdash t(A)$. Вопрос о существовании таких $L2$ и t для Bes остается открытым. (Однако, это не влияет на вывод о том, что “ Bes не определяет новую связку по Габбаю”.)

§ 6. Определение П. С. Новикова и дизъюнктивное свойство

Приведем пример исчисления, определяющего новую связку по П. С. Новикову, но не имеющего дизъюнктивного свойства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Пусть $H_1(\varphi) \subseteq H_2(\varphi)$ – консервативные над H исчисления. Если $H_1(\varphi)$ определяет новую связку по П. С. Новикову, то это же верно и для $H_2(\varphi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если добавление некоторого явного соотношения позволяет вывести чистую формулу $\notin H$ с использованием аксиом $H_1(\varphi)$, то это тем более справедливо для $H_2(\varphi)$.

Вспомним примеры формул и интерпретаций из § 1.

$$\begin{aligned} C_0 &= (\varphi(p) \supset p) \supset p, & C_1 &= \varphi(\varphi(p)) \supset \varphi(p), \\ a \models \varphi_0(p) &\iff \forall b > a \quad b \models p, & a \models \varphi_1(p) &\iff \max(a) \vee a \models p. \end{aligned}$$

Рассмотрим исчисление $\text{Bes}' = \text{Bes} + \{C_0 \vee C_1\}$. Вспоминая сказанное в § 1, видим, что формула $C_0 \vee C_1$ общезначима в классе конечных шкал как для φ_0 , так и для φ_1 .

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Bes' консервативно над H .

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Bes' определяет новую связку по П. С. Новикову.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Формулы C_0 и C_1 невыводимы в Bes' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. C_0 опровергается в интерпретации φ_1 , C_1 – в интерпретации φ_0 .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
07.02.94
Исправленный вариант
16.02.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Драгалин А. Г. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М.: Наука, 1979.
- [2] Сметанич Я. С. О полноте исчисления высказываний с дополнительной операцией от одной переменной // Тр. ММО. 1960. Т. 9. С. 357–351.
- [3] Gabbay D. M. On some new intuitionistic propositional connectives. 1 // *Studia Logica*. 1977. V. 36. № 1, 2. P. 127–139.
- [4] Бессонов А. В. О новых операциях в интуиционистском исчислении // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 1. С. 23–28.
- [5] Kirk R. E. A characterisation of the classes of finite tree frames which are adequate for the intuitionistic logic // *Z. Math. Logik Grundlag. Math.* 1980. Bd. 26. № 6. S. 497–501.
- [6] Яшин А. Д. Новая интуиционистская связка и условие единственности // Тезисы Межреспубл. конф. по матем. логике. Казань, 1992.
- [7] Скотт Д. Советы по модальной логике // Семантика модальных и интенциональных логик. М.: Прогресс, 1981. С. 280–317.
- [8] Соболев С. К. Об интуиционистском исчислении высказываний с кванторами // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 1. С. 69–76.