Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Айгунов, К вопросу об ограниченности совокупности ортонормированных собственных функций одного класса операторов Штурма–Лиувилля с весовой функцией неограниченной вариации на конечном отрезке, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 434–437

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1843>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:55:44

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

К ВОПРОСУ ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ СОВОКУПНОСТИ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Г. А. Айгунов

1. Пусть $0 < m \leq M$ – фиксированные числа. Обозначим через Q множество всех измеримых на сегменте $[0, 1]$ функций $\rho(x)$, удовлетворяющих условию

$$0 < m \leq \rho(x) \leq M < \infty. \quad (1)$$

Пусть $\rho(x) \in Q$, рассмотрим спектральную задачу

$$\begin{aligned} -y''(x) &= \lambda \rho(x) y(x) \quad (0 < x < 1), \\ y(0) &= y(1) = 0, \quad \int_0^1 \rho(x) y^2(x) dx = 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Известно, что спектр задачи (2) дискретен и состоит из простых положительных собственных чисел λ_n ($n = 1, 2, \dots$). Обозначим через $u_n(x)$ собственную функцию, соответствующую собственному числу λ_n . Условимся говорить, что совокупность собственных функций $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) ассоциирована с весовой функцией $\rho(x)$ спектральной задачи (2).

В классических работах Штурма, Лиувилля и Стеклова в предположении некоторой гладкости весовой функции $\rho(x)$ было доказано, что

$$\sup_n \max_{0 \leq x \leq 1} |u_n(x)| \leq C_0 < \infty, \quad C_0 > 0. \quad (3)$$

В работе [1] было выяснено, однако, что в классе всех весовых функций $\rho(x) \in Q$ неравенство (3), вообще говоря, неверно.

Во многих вопросах анализа представляет значительный интерес выяснение условий, при которых собственные функции задачи (2) ограничены в совокупности, т.е. выполнено условие (3). В работах [2], [3] были указаны достаточные условия, обеспечивающие выполнение неравенства (3). В частности, в [3] было выяснено, что если весовая функция $\rho(x) \in Q$ является функцией ограниченной вариации, то справедливо неравенство (3).

Природа собственных функций спектральной задачи (2) в случае, если нарушено хотя бы одно из неравенств (1), изучена мало. Из работ в этом направлении отметим прежде всего работу А. А. Дородницына [4] и В. А. Ильина и И. Йо [5].

Цель настоящей работы – указать класс весовых функций Q_p , неограниченных сверху и таких, что для собственных функций спектральной задачи (2), ассоциированных с весовой функцией $\rho(x) \in Q_p$, справедлива оценка (3).

2. Пусть p – фиксированное натуральное число, а x_j ($j = 0, 1, \dots, p$) – фиксированные числа, причем

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_p = 1.$$

Будем говорить, что функция $\rho(x)$ принадлежит классу весовых функций Q_p , если выполнены следующие условия:

- 1) $\rho(x) \geq m > 0$ для всех $x \in [0, 1]$;
- 2) $\rho(x)$ суммируема на $[0, 1]$;
- 3) сужение функции $\rho(x)$ на множестве $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, p$) представимо в виде

$$\rho(x) = r(x)g(x),$$

причем $r(x)$ – функция ограниченной вариации, а функция $g(x)$ монотонно возрастающая (не в строгом смысле) на $[x_{i-1}, x_i]$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_{i-0}} g(x) = \overline{R}_i \quad (0 < \overline{R}_i \leq \infty). \quad (4)$$

ТЕОРЕМА. Пусть $\rho(x) \in Q_p$, тогда для собственных функций $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) спектральной задачи (2) справедлива оценка (3).

3. Доказательство теоремы основывается на леммах 1-5. Сформулируем эти леммы.

ЛЕММА 1. Если $\rho(x) \in Q_p$, то решение $\varphi(x, \lambda)$ задачи Коши

$$\begin{aligned} -\varphi''(x, \lambda) &= \lambda \rho(x) \varphi(x, \lambda) & (0 < x < 1), \\ \varphi(0, \lambda) &= 0, \quad \varphi'(0, \lambda) = 1, \end{aligned}$$

существует при всех $x \in [0, 1]$ и при каждом фиксированном $x \in [0, 1]$ является целой функцией параметра λ .

Пусть $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} -y''(x) &= \lambda \rho(x) y(x) & (\rho(x) \in Q_p), \\ y(t_i) &= 0, \quad y'(t_i) = 1. \end{aligned}$$

Обозначим решение этой задачи Коши через $y(x, t_i, \lambda)$.

ЛЕММА 2. Если существует набор чисел $C_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, p$), не зависящих от λ и таких, что справедливы неравенства

$$\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |y(x, t_i, \lambda)| \left/ \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x) y^2(x, t_i, \lambda) dx \right)^{1/2} \right. \leq C_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то справедливо неравенство (3).

Фиксируем натуральное число k и собственное число λ_k спектральной задачи (2). Собственному числу λ_k в силу леммы 1 соответствует собственная функция

$$u_k(x) = \left(\int_0^1 \rho(x) \varphi^2(x, \lambda_k) dx \right)^{1/2} \varphi(x, \lambda_k).$$

Занумеруем нули функций $\varphi(x, \lambda_k)$, содержащиеся в $[x_{i-1}, x_i]$, в порядке их роста: $z_0 < z_1 < \dots < z_n$.

Введем обозначения ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} m_i &= \inf \rho(x), \quad M_i = \sup \rho(x), \quad x \in [z_{i-1}, z_i]; \\ \delta_i &= z_i - z_{i-1}, \quad h_i = \max |\varphi(x, \lambda_k)|, \quad x \in [z_{i-1}, z_i]; \\ \alpha_i &= |\varphi'(z_i, \lambda_k)|, \quad \alpha_0 = 1, \quad \tau_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}, \\ S_i &= \int_{z_{i-1}}^{z_i} \rho(x) \varphi^2(x, \lambda_k) dx. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Справедливы неравенства ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{i-1}}{\sqrt{\lambda_k M_i}} &\leq h_i \leq \frac{\alpha_{i-1}}{\sqrt{\lambda_k m_i}}, \quad \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_k M_i}} \leq \delta_i \leq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_k m_i}}, \\ \frac{\pi \alpha_{i-1}^2}{2 \sqrt{\lambda_k^3 M_i}} &\leq S_i \leq \frac{\pi \alpha_{i-1}^2}{2 \sqrt{\lambda_k^3 m_i}}. \end{aligned}$$

Положим, далее, ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} R_i &= \sup r(x), \quad r_i = \inf r(x), \quad x \in [z_{i-1}, z_i], \\ G_i &\equiv g(z_i) = \sup g(x), \quad g_i \equiv g(z_{i-1}) = \inf g(x), \quad x \in [z_{i-1}, z_i]. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. Существует число $C_0 > 0$ такое, что справедливы оценки ($i = 1, 2, \dots, n-1$):

$$\sqrt{\frac{r_i}{R_i}} \leq \tau_i \leq \sqrt{\frac{R_i G_i}{r_i g_i}}, \quad \frac{1}{\sqrt{C_0}} \leq \frac{\alpha_i}{\alpha_0} \leq \sqrt{C_0} \sqrt{\frac{g(z_i)}{g(z_0)}}.$$

ЛЕММА 5. Справедливы неравенства ($i = 1, 2, \dots, n-1$):

$$h_i \left/ \left(\int_0^1 \rho(x) \varphi^2(x, \lambda_k) dx \right)^{1/2} \right. \leq \sqrt{2} \lambda_k^{1/4} \left(\frac{m_i}{\alpha_i^2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\pi \alpha_j^2}{\sqrt{M_j}} \right)^{1/2}.$$

4. Рассмотрим некоторые случаи теоремы.

Пусть $p = 1$, $g(x) \equiv 1$, тогда $\rho(x) \in Q$, следовательно, доказанная теорема обобщает результат работы [3].

Если же $r(x) \equiv 1$, а $\overline{R}_i = \infty$ (числа $\overline{R}_i$ определены формулой (4), $i = 1, 2, \dots, n$), то получим класс весовых функций $\rho(x)$ неограниченной вариации, обладающих тем свойством, что собственные функции спектральной задачи (2), ассоциированные с этими весовыми функциями, ограничены в совокупности.

Дагестанский государственный университет

Поступило

06.04.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гехтман М. М., Загиров Ю. М., Якубов В. Я. // Функцион. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. № 3. С. 71–72.
2. Гехтман М. М., Айгунов Г. А. // УМН. 1995. Т. 50. № 3. С. 157–158.
3. Айгунов Г. А. // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1996. № 1(93). С. 15–17.
4. Дородницын А. А. // УМН. 1952. Т. 7. № 6(52). С. 3–95.
5. Ильин В. А., Йо И. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1164–1174.