Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Л. Блошанский, О. К. Иванова, Т. Ю. Рослова,
Обобщенная локализация и равносходимость раз-
ложений в двойной тригонометрический ряд и ин-
теграл Фурье функций из $L(\ln^+ L)^2$, *Матем. за-
метки*, 1996, том 60, выпуск 3, 437–441

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1844>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:54:12

ОБОБЩЕННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ И РАВНОСХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ В ДВОЙНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ $L(\ln^+ L)^2$

И. Л. Блошанский, О. К. Иванова, Т. Ю. Рослова

1. Рассмотрим N -мерное евклидово пространство, элементы которого будем обозначать $x = (x_1, \dots, x_N)$, и положим $xz = x_1z_1 + \dots + x_Nz_N$.

Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^1$ определим множество

$$\mathbb{R}_\lambda^N = \{x \in \mathbb{R}^N : x_j \geq \lambda, j = 1, \dots, N\}.$$

Введем также множество $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами и положим $\mathbb{Z}_\lambda^N = \mathbb{Z}^N \cap \mathbb{R}_\lambda^N$.

Пусть $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – неубывающая функция, через $\Phi(L) = \Phi(L)(T^N)$ обозначим множество суммируемых функций f таких, что

$$\|f\|_{\Phi(L)} = \int_{T^N} \Phi(|f(x)|) dx < \infty,$$

где $T^N = \{x \in \mathbb{R}^N : -\pi \leq x_j < \pi, j = 1, \dots, N\}$. Если $\Phi(u) = u^p$, то обозначим $\Phi(L) = L_p(T^N)$, $p \geq 1$, если $\Phi(u) = u \ln^+ u$, где $\ln^+ u = \max\{1, u\}$, то $\Phi(L) = L \ln^+ L$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00332. Кроме того, работа первого автора выполнена также при поддержке Государственного Комитета РФ по делам науки и высшей школы, грант № 94-1.2-71(26).

Пусть 2π -периодическая функция $f(x) \in \Phi(L)(T^N)$, $N \geq 1$, разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k e^{ikx}. \quad (1)$$

Для любого вектора $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$ рассмотрим прямоугольную частичную сумму

$$S_n(x; f) = \sum_{|k_1| \leq n_1} \dots \sum_{|k_N| \leq n_N} e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_N x_N)}, \quad (2)$$

частным случаем которой является квадратная частичная сумма $S_{n_0}(x; f)$, когда $n_1 = n_2 = \dots = n_N = n_0$.

При этом под сходимостью ряда в (1) по прямоугольникам будем понимать существование предела частичных сумм $S_n(x; f)$ (2) при $n \rightarrow \infty$ (иными словами, $\min_{1 \leq j \leq N} n_j \rightarrow \infty$), а под сходимостью ряда в (1) по квадратам – существование предела $S_{n_0}(x; f)$ при $n_0 \rightarrow \infty$.

Пусть Ω – произвольное измеримое множество, $\Omega \subset T^N$, $\mu\Omega > 0$ ($\mu = \mu_N$ – N -мерная мера Лебега), и пусть $f(x) = 0$ на Ω .

2. Отсутствие классической локализации для тригонометрического ряда Фурье в классе L_p , $p \geq 1$, в кратном случае привело одного из авторов к понятию обобщенная локализация почти всюду (п.в.) [1] (см. также [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Ω , $\Omega \subset T^N$, – произвольное множество положительной меры. Будем говорить, что для кратных рядов Фурье функций из класса $\Phi(L)$ справедлива на множестве Ω *обобщенная локализация почти всюду* (ОЛ), если из условия $f \in \Phi(L)(T^N)$, $f(x) = 0$ на Ω , следует, что почти всюду на Ω существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f) = 0.$$

При $N = 1$ ОЛ справедлива на любых измеримых множествах $\Omega \subset T^1$ в классах L_p , $p > 1$. Это следует из работ Л. Карлесона [3] и Р. Ханта [4]. Если $p = 1$, то ОЛ в одномерном случае справедлива в классе L_1 на измеримом множестве $\Omega \subset T^1$, $\mu\Omega > 0$, тогда и только тогда, когда это множество является открытым п.в.

Достаточность этого факта следует из классического принципа локализации Римана, необходимость доказана И. Л. Блошанским (см. [5, теорема 2 для $N = 1$]). (Множество E будем называть (см. [5]) *открытым почти всюду*, если существует открытое множество E_1 такое, что $\mu(E \Delta E_1) = 0$.) В кратном случае исследования ОЛ были также проведены И. Л. Блошанским в работах [1], [2], [5]–[7]. Так в случае $N = 2$ в работе [2] был доказан обобщенный принцип локализации п.в., заключающийся в том, что для функций $f \in L_p(T^N)$, $p > 1$, сходимость или расходимость двойного ряда Фурье (функции f) п.в. в некотором круге не зависит от поведения f вне этого круга. (В силу результатов по равносходимости разложений в двойной ряд и интеграл Фурье функций из L_p , $p > 1$, (см. [2], а также обзор, данный ниже) указанный принцип верен и для двойных интегралов Фурье.) Таким образом, для двойных рядов Фурье (суммируемых по прямоугольникам) на открытых п.в. множествах ОЛ справедлива в классах L_p , $p > 1$.

Заметим, что усилить последний результат, доказав его в случае $N = 2, p > 1$ для произвольного измеримого множества, оказалось невозможным, так как в работе [6] было построено измеримое множество $\Omega \subset T^2$ (с мерой, сколь угодно мало отличающейся от меры квадрата T^2), на котором ОЛ не справедлива в классе $L_\infty(T^2)$ (при суммировании по прямоугольникам).

Что касается $N \geq 3$, то (см. [7]) ОЛ в этом случае уже не справедлива ни на каком измеримом множестве $\Omega \subset T^N$, не являющемся плотным в T^N , ($\overline{\Omega} \not\subset T^N$, $\overline{\Omega}$ — замыкание множества Ω), при суммировании кратного ряда Фурье по прямоугольникам даже в классе $C(T^N)$.

Если же рассматривать класс $L_1(T^N)$, то (см. [5]), уже начиная с двумерного случая, ОЛ не справедлива вообще ни на каком измеримом множестве $\Omega \subset T^N$, $0 < \mu\Omega < (2\pi)^N$, $N \geq 2$, даже при суммировании кратного ряда Фурье по квадратам.

Сформулированные выше результаты естественно ставят вопрос о справедливости ОЛ (на открытых множествах) в классах $\Phi(L)(T^N)$ при $N = 2$.

3. Если $f \in L(\ln^+ L)^2 \ln^+ \ln^+ L(T^2)$, то как следует из работы П. Шёлина [8], ряд Фурье функции f сходится п.в. на T^2 при суммировании по квадратам. В случае суммирования по прямоугольникам, как известно [9], двойной ряд Фурье функции f может неограниченно расходиться п.в. на T^2 , даже если $f \in C(T^2)$.

Таким образом, в классе $L(\ln^+ L)^2 \ln^+ \ln^+ L(T^2)$ ОЛ для двойных рядов Фурье справедлива на любых измеримых множествах (в случае суммирования по квадратам). При $N = 1$ ОЛ справедлива на любых измеримых множествах в классе $L \ln^+ L \ln^+ \ln^+ L$ (это следует из той же работы П. Шёлина [8]).

4. В настоящей работе нами получен следующий результат, касающийся ОЛ в классе $L(\ln^+ L)^2(T^2)$ при суммировании двойного ряда Фурье по прямоугольникам.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Ω — произвольное (непустое) открытое множество $\Omega \subset T^2$, и пусть $f \in L(\ln^+ L)^2(T^2)$, $f(x) = 0$ на Ω . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f) = 0 \quad \text{для почти всех } x \in \Omega.$$

Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, $\mu\Omega_\varepsilon > \mu\Omega - \varepsilon$, и постоянная $C_\varepsilon > 0$ такие, что

$$\left\| \sup_{n \in \mathbb{Z}_0^2} |S_n(x; f)| \right\|_{L_1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_\varepsilon \int_{T^2} |f(x)| (\ln^+ |f(x)|)^2 dx + C_\varepsilon.$$

Таким образом, сформулированный результат показывает, что (при $N = 2$) ОЛ справедлива на любом открытом п.в. множестве $\Omega \subset T^2$ в классе $L(\ln^+ L)^2$.

Далее естественно встает вопрос о справедливости ОЛ в “более широком”, чем $L(\ln^+ L)^2$, классе.

Некоторый ответ на поставленный вопрос дает следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть Ω — произвольное измеримое множество $\Omega \subset T^2$, $\mu\Omega > 0$ (μ — мера Лебега), не являющееся плотным в T^2 ($\overline{\Omega} \not\subset T^2$). Тогда существуют подмножество $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mu\Omega_0 > 0$ и функция $f \in L(\ln^+ \ln^+ L)^{1-\varepsilon}(T^2)$, $0 < \varepsilon < 1$, $f(x) = 0$ на Ω такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(x; f)| = +\infty$ для почти всех $x \in \Omega_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Результат теорем 1 и 2 интересно сравнить с фактом существования функций из класса $L(\ln^+ L)^{1-\varepsilon}(T^2)$, $0 < \varepsilon < 1$, с расходящимся п.в. по квадратам двойным рядом Фурье. Этот факт, в частности, следует из работ С. В. Конягина [10] и Р. Д. Гецадзе [11].

5. Пусть функция $g \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $p \geq 1$, разложена в кратный интеграл Фурье:

$$g(x) \sim \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Для любого вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_0^N$ рассмотрим собственный интеграл

$$J_\alpha(x; g) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \dots \int_{-\alpha_N}^{\alpha_N} \tilde{g}(\xi) e^{i(x_1\xi_1 + \dots + x_N\xi_N)} d\xi_1 \dots d\xi_N. \quad (3)$$

Частным случаем “прямоугольной частичной суммы” (3) является “квадратная частичная сумма” $J_{\alpha_0}(x; g)$, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = \alpha_0$.

Пусть $g(x) = f(x)$ при $x \in T^N$. Обозначим через $R_\alpha(x; f)$ следующую разность:

$$R_\alpha(x; f) = R_\alpha(x; f, g) = S_{[\alpha]}(x; f) - J_\alpha(x; f), \quad (4)$$

где $[\alpha] = ([\alpha_1], \dots, [\alpha_N]) \in \mathbb{Z}_0^N$, $[\alpha_j]$ — целая часть $\alpha_j \in \mathbb{R}^1$. Будем предполагать при этом, что

$$g(x) = 0 \quad \text{вне } T^N. \quad (5)$$

6. При $N = 1$ для функций $f \in L_1(T^1)$ на любом сегменте, целиком лежащем внутри интервала $(-\pi, \pi)$, разность $R_\alpha(x; f)$ (4) стремится равномерно к нулю при $\alpha \rightarrow \infty$ (при этом условие финитности (5) для функций g несущественно) (см. [12, с. 362–363]). В работе [2] И. Л. Блошанский доказал, что для $N = 2$ и $p > 1$ $R_\alpha(x; f) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$ (т.е. $\min_{1 \leq j \leq N} \alpha_j \rightarrow \infty$) для п.в. $x \in T^2$ (условие (5) в данном случае несущественно). В этой же работе была выяснена сущность вида сходимости $R_\alpha(x; f)$ и условий $N = 2$, $p > 1$. В работе были построены непрерывные функции: функция $f_1 \in C(T^2)$ такая, что $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} |R_\alpha(0, f_1)| = +\infty$, и функция $f_2 \in C(T^N)$, $N > 2$, такая, что $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} |R_\alpha(x; f_2)| = +\infty$ всюду внутри T^N . В свою очередь, для $p = 1$ приведен пример функции $f_3 \in L_1(T^N)$ такой, что $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} |R_\alpha(x; f_3)| = +\infty$ в каждой точке $x \in T^N$.

Далее, в работах [13] и [14] И. Л. Блошанский продолжил исследование вопросов равносходимости разложений в кратный ряд и интеграл Фурье, но уже при суммировании по квадратам. Так в работе [14] были построены две суммируемые функции f и g : $f \in L_1(T^N)$, $g \in L_1(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 2$, совпадающие на T^N , кратный ряд Фурье одной из которых (функции f) неограниченно расходится п.в. (по некоторым подпоследовательностям), в то время как кратный интеграл другой (функции g) сходится п.в. (по тем же самым подпоследовательностям).

Сформулированные выше результаты ставят вопрос о равносходимости (рассматриваемых разложений) так же, как и для исследуемой в настоящей работе ОЛ, в классах $\Phi(L)$, т.е. в классах, “лежащих между” L_1 и L_p , $p > 1$.

7. В настоящей работе нами получены следующие результаты, касающиеся поведения разности (4) при $N = 2$ в указанных классах.

ТЕОРЕМА 3. Если $f \in L(\ln^+ L)^2(T^2)$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} R_\alpha(x; f) = 0 \quad \text{для почти всех } x \in T^2.$$

Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C_\varepsilon > 0$ такая, что

$$\left\| \sup_{\alpha \in \mathbb{R}_0^2} |R_\alpha(x; f)| \right\|_{L_1(T_\varepsilon^2)} \leq C_\varepsilon \int_{T^2} |f(x)| (\ln^+ |f(x)|)^2 dx + C_\varepsilon,$$

где $T_\varepsilon^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : -\pi + \varepsilon \leq x_j \leq \pi + \varepsilon, j = 1, 2\}$.

ТЕОРЕМА 4. Существует функция $f \in L(\ln^+ \ln^+ L)^{1-\varepsilon}(T^2)$, $0 < \varepsilon < 1$, такая, что $\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow \infty} |R_\alpha(x; f)| = +\infty$ для почти всех $x \in T^2$.

Московский педагогический университет

Поступило

06.04.96

Исправленный вариант

22.04.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блошанский И. Л. // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242. № 1. С. 11–13.
2. Блошанский И. Л. // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 2. С. 153–168.
3. Carleson L. // Acta Math. 1966. V. 116. P. 135–157.
4. Hunt R. A. // Proc. Conf. Edwardsville, 1967: SIU Press Carbondale, 1968. P. 235–255.
5. Блошанский И. Л. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 4. С. 675–707.
6. Bloshanskii I. L. // Anal. Math. 1981. V. 7. № 1. P. 3–36.
7. Блошанский И. Л. // Автореферат дисс. . . . д. ф.-м. н. М.: МИАН, 1991.
8. Sjölin P. // Ark. Mat. 1971. V. 9. № 1. P. 65–90.
9. Fefferman C. // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. № 2. P. 191–195.
10. Конягин С. В. // Тр. МИАН. 1989. Т. 190. С. 102–116.
11. Гепадзе Р. Д. // Сообщ. АН ГССР. 1986. Т. 122. № 2. С. 269–271.
12. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
13. Блошанский И. Л. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 3. С. 685–705.
14. Блошанский И. Л. // Сиб. матем. ж. 1990. Т. 31. № 1. С. 39–52.