Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Галахов, О достаточных условиях существования полугрупп Феллера, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 442–444

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1845>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:45:10

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛУГРУПП ФЕЛЛЕРА

Е. И. Галахов

Вопрос о существовании неотрицательных сжимающих полугрупп для одномерных диффузионных процессов с нелокальными краевыми условиями рассматривался в работе В. Феллера [1]. А. Д. Вентцелем [2] было доказано, что если эллиптический дифференциальный оператор второго порядка является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера, то его область определения состоит из функций, удовлетворяющих нелокальным краевым условиям. Достаточные условия того, чтобы эллиптический оператор с такой областью определения был инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера, изучались в работах [3]–[5] и др. При этом авторами предполагалось, что порядок нелокальных членов меньше порядка граничного оператора. Наиболее трудный случай, когда граничные и нелокальные операторы имеют один и тот же порядок, впервые рассматривался А. Л. Скубачевским [6]–[8] при условии убывания нелокальных членов вблизи границы. В настоящей заметке получены достаточные условия существования полугрупп Феллера в предположении, что условие убывания нелокальных членов может нарушаться вблизи некоторого множества точек границы.

1. Пусть X – замкнутое линейное подпространство $C(\bar{Q})$, где $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $n \geq 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Полугруппа $\{T_t\}_{t \geq 0}$ линейных ограниченных операторов, действующих на X , называется *полугруппой Феллера*, если при $t \geq 0$ $\|T_t\| \leq 1$, а из условия $f(x) \geq 0$ ($x \in \bar{Q}$) следует $(T_t)f(x) \geq 0$ ($x \in \bar{Q}$, $t \geq 0$).

Следуя [8], будем рассматривать интегро-дифференциальный оператор A вида

$$Au = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} x_j(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i}(x) + a(x) u(x) - \int_{\bar{Q}} [u(x) - u(y)] m(x, dy) \quad (x \in Q) \quad (1)$$

с областью определения $\mathcal{D}(A) = \{u \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q}) : Au \in C(\bar{Q})\}$. Здесь a_{ij} , a_i , $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, – вещественнозначные функции, $a_{ij} = a_{ji}$; $m(x, \cdot)$ – неотрицательная борелевская мера на $\bar{Q}$.

Обозначим

$$A^0 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} x_j(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x) u_{x_i}(x) + a(x) u(x),$$

$$A^1 u = \int_{\bar{Q}} u(y) m(x, dy).$$

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

- 1) $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0$, $a(x) \leq 0$ для всех $x \in \bar{Q}$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$;
- 2) линейный оператор A^1 ограничен в пространстве Гёльдера $C^\sigma(\bar{Q})$, где $0 < \sigma < 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из условия 2) следует, что $c_m = \sup_{x \in \bar{Q}} m(x, \bar{Q}) < \infty$. Более того, $m(x, \bar{Q}) \in C^\sigma(\bar{Q})$.

Рассмотрим нелокальное граничное условие

$$Bu = \gamma(x)u(x) + \int_{\bar{Q}} [u(x) - u(y)] \mu(x, dy) = 0 \quad (x \in \partial Q), \quad (2)$$

где $\gamma(x) \geq 0$, $\mu(x, \cdot)$ — неотрицательная борелевская мера на $\bar{Q}$, $\gamma \in C^\sigma(\partial Q)$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

- 3) $\gamma(x) + \mu(x, \bar{Q}) > 0$ ($x \in \partial Q$);
- 4) $\partial Q = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, где $\Gamma_2 = \{x \in \partial Q : \mu(x, \bar{Q}) = 0\}$ и внутренность Γ_2 (в топологии границы) непуста;
- 5) существует такое $\Delta > 0$, что для любого $0 < \delta < \Delta$ и любого $v \in C^\sigma(\bar{Q})$

$$\int_{\bar{Q} \setminus \Gamma_1^\delta} v(y) \mu(x, dy) \in C^\sigma(\partial Q), \quad \int_{\Gamma_1^\delta} v(y) \mu(x, dy) \in C^\sigma(\partial Q)$$

и

$$\left\| \int_{\bar{Q} \setminus \Gamma_1^\delta} v(y) \mu(x, dy) \right\|_{C^\sigma(\partial Q)} \leq c_1 \|v\|_{C^\sigma(\bar{Q} \setminus \Gamma_1^\delta)},$$

$$\left\| \int_{\Gamma_1^\delta} v(y) \mu(x, dy) \right\|_{C^\sigma(\partial Q)} \leq c_2(\delta) \|v\|_{C^\sigma(\bar{\Gamma}_1^\delta)},$$

где $\Gamma_1^\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, \Gamma_1) < \delta\}$, $c_1 > 0$ не зависит от δ , $c_2(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, $0 < \sigma < 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $v(y) \equiv 1$. Тогда из условия 5) следует, что

$$c_\mu = \sup_{x \in \partial Q} \mu(x, \bar{Q}) < \infty, \quad \mu(x, \bar{Q}) \in C^\sigma(\partial Q).$$

Следовательно, множество Γ_2 замкнуто, а Γ_1 — открыто в ∂Q .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В силу условия 5) $\sup_{x \in \partial Q} \mu(x, \Gamma_1^\delta) \leq c_2(\delta)$. Так как $c_2(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, то $\mu(x, \Gamma_1) = 0$ ($x \in \partial Q$).

Обозначим $C_B(\bar{Q}) = \{u \in C(\bar{Q}) : Bu = 0\}$.

Введем оператор $A_B : C_B(\bar{Q}) \rightarrow C_B(\bar{Q})$ с помощью формул

$$A_B u = Au \quad (u \in \mathcal{D}(A_B)), \quad \mathcal{D}(A_B) = \{u \in C^2(Q) \cap C_B(\bar{Q}) : Au \in C_B(\bar{Q})\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия 1)–5).

Тогда оператор $\bar{A}_B : C_B(\bar{Q}) \rightarrow C_B(\bar{Q})$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы Феллера на $C_B(\bar{Q})$, которая однозначно определяется оператором A_B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы основано на использовании теоремы Хилле–Иосиды и дальнейшем развитии метода отделения нелокальных членов, использованного в работе [8].

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующее граничное условие:

$$u(x) - \sum_{s=1}^N b_s(x) u(\omega_s(x)) - \int_{\Omega} c(x, y) u(y) dy = 0 \quad (x \in \partial Q). \quad (3)$$

Здесь $b_s \in C^\sigma(\partial Q)$, $c \in C^\sigma(\partial Q \times \bar{\Omega})$, ω_s — непрерывно дифференцируемые невырожденные отображения некоторой окрестности V границы ∂Q на $\omega_s(V)$, такие, что $\omega_s(\partial Q) \subset \bar{Q} \setminus \bar{\Gamma}_1$, $\Omega \subset Q$ — открытая область, $\Gamma_2 \subset \partial Q$ — замкнутое множество, имеющее непустую внутренность (в топологии границы), $\Gamma_1 = \partial Q \setminus \Gamma_2$, $b_s(x) = 0$, $c(x, y) = 0$ ($x \in \Gamma_2$, $y \in \Omega$). В частности, можно рассмотреть случай, когда $\Omega = Q$.

Предположим, что $b_s(x)$, $c(x, y)$ неотрицательны и

$$\sum_{s=1}^N b_s(x) + \int_{\Omega} c(x, y) dy \leq 1 \quad (x \in \partial Q).$$

Тогда (3) может быть представлено в виде (2), и условия 3)–5) выполняются.

Действительно, пусть

$$\gamma(x) = 1 - \sum_{s=1}^N b_s(x) - \int_{\Omega} c(x, y) dy, \quad \mu(x, G) = \sum_{s \in J(x, G)} b_s(x) + \int_{G \cap \Omega} c(x, y) dy$$

для любого борелевского множества $G \subset \bar{Q}$, где $J(x, G) = \{s : \omega_s(x) \in G\}$. Тогда нелокальное условие (3) примет вид (2), т.е.

$$\left(1 - \sum_{s=1}^N b_s(x) - \int_{\Omega} c(x, y) dy\right) u(x) + \sum_{s=1}^N \left(u(x) - u(\omega_s(x))\right) b_s(x) + \int_{\Omega} (u(x) - u(y)) c(x, y) dy = 0 \quad (x \in \partial Q).$$

Так как $\gamma(x) + \mu(x, \bar{Q}) \equiv 1$ ($x \in \partial Q$), условие 3) выполняется. Пусть

$$\Delta = \min_{1 \leq s \leq N} \rho(\omega_s(\Gamma_1), \Gamma_1).$$

Тогда выполнены условия 4), 5).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В работе [8] рассматривался оператор A с нелокальным условием (2). Предполагалось, что выполняются условия 1)–3), 5) и $\Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_1 = \partial Q$. Соответственно, в примере относительно нелокальных условий (3) накладывались следующие ограничения: $\Omega \subset Q$, $\omega_s(\partial Q) \subset Q$.

Автор благодарит А. Л. Скубачевского за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Московский государственный авиационный институт
E-mail: skub@k803mainet.msk.su

Поступило
26.04.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Feller W. // Ann. of Math. 1952. V. 55. P. 468–519.
2. Вентцель А. Д. // Теория вероятн. и ее применения. 1959. Т. 4. С. 172–185.
3. Sato K., Ueno T. // J. Math. Kyoto Univ. 1965. V. 4. P. 529–605.
4. Taira K. Diffusion Processes and Partial Differential Equations. N. Y., London: Acad. Press, 1988.
5. Taira K. // Mem. Amer. Math. Soc. 1992. V. 99. P. 1–65.
6. Скубачевский А. Л. // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. С. 287–292.
7. Скубачевский А. Л. // Докл. РАН. 1995. Т. 341. С. 173–176.
8. Skubachevskii A. L. // Russian J. Math. Phys. 1995. V. 3. P. 327–360.