Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Горохова, Внутренняя характеристика пространства $c_0(A)$ в классе банаховых решеток, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 445–448

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1846>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:26:37

ВНУТРЕННЯЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА $c_0(A)$ В КЛАССЕ БАНАХОВЫХ РЕШЕТОК

С. Г. Горохова

Возьмем какое-либо множество A . Символом $c_0(A)$ обозначается множество всех функций $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих при каждом $\varepsilon > 0$ условию $\text{card}\{x \in A : |f(x)| \geq \varepsilon\} < \infty$. Легко видеть, что $c_0(A)$ является банаховой решеткой относительно поточечных операций и sup -нормы.

Рассмотрим следующие свойства произвольной нормированной векторной решетки.

- (*) Для любой сети (x_α) и любого элемента x условие $x_\alpha \xrightarrow{(\circ)} x$ равносильно $\|x_\alpha - x\| \rightarrow 0$.
- (**) Для любой последовательности (x_n) и любого элемента x условие $x_n \xrightarrow{(\circ)} x$ равносильно $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ – банахова решетка. Тогда равносильны следующие условия:

- а) E линейно и решеточно изоморфна $c_0(A)$, где A – некоторое множество;
- б) $(E, \|\cdot\|)$ имеет счетный тип и обладает свойством (**).

Для доказательства теоремы нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 1. Банахова решетка с порядково непрерывной нормой является K -пространством, в котором всякая порядково ограниченная последовательность попарно дизъюнктивных элементов сходится к нулю по норме.

Утверждение леммы непосредственно вытекает из [1, 103.4, 103.9 и 104.2].

ЛЕММА 2. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ – банахова решетка с порядково непрерывной нормой, e – какой-либо положительный безатомный элемент E . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное дизъюнктивное разбиение $e = \sum_{k=1}^n e_k$ элемента e такое, что $\|e_k\| \leq \varepsilon$ при всех $k = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы определим отображение $\delta: E_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$\delta(y) := \inf_{\pi \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(y)} \max\{\|x\| : x \in \pi\} \quad (y \in E_+)$$

(здесь и далее символом $\mathcal{P}_{\text{fin}}(y)$ обозначается множество всех конечных дизъюнктивных разбиений элемента y). Достаточно проверить, что $\delta(e) = 0$.

Условимся для каждого $x \in E_+$ обозначать символом $\mathcal{P}_2(x)$ множество всех упорядоченных пар $(x_1, x_2) \in E_+^2$ таких, что $x_1 + x_2 = x$, $x_1 \wedge x_2 = 0$ и $\delta(x_1) = \delta(x)$. Образует последовательности $(e_n)_{n=1}^\infty$, $(z_n)_{n=1}^\infty \subseteq E_+$ и $(\alpha_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}_+$. Положим $e_1 := e$, $z_1 := 0$ и $\alpha_1 := \delta(e)$. Пусть элементы $e_1, \dots, e_n$, $z_1, \dots, z_n$ и числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ уже выбраны. Возьмем $\alpha_{n+1} := \sup\{\delta(y_2) : (y_1, y_2) \in \mathcal{P}_2(e_n)\}$. Тогда найдется элемент $z_{n+1} \in E$, удовлетворяющий условиям $(x, z_{n+1}) \in \mathcal{P}_2(e_n)$ и $\delta(z_{n+1}) \geq \alpha_{n+1}/2$. Пусть $e_{n+1} := e_n - z_{n+1}$. Построение последовательностей

(e_n) , (z_n) и (α_n) завершается по индукции. По построению, последовательность (z_n) порядково ограничена и состоит из попарно дизъюнктивных элементов. Следовательно, в силу леммы 1 $\|z_n\| \rightarrow 0$. Поэтому из условия $\|z_n\| \geq \delta(z_n) \geq \alpha_n/2$ вытекает, что $\alpha_n \rightarrow 0$. Поскольку согласно лемме 1 E — K -пространство, найдется элемент $e_0 \in E$ такой, что $e_0 = \inf\{e_k\}_{k=1}^\infty$. Тогда $e_n = e_0 + \sum_{k=n+1}^\infty z_k$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим дизъюнктное разбиение

$$e_n = e_0 + \sum_{k=n+m+1}^\infty z_k + \sum_{k=1}^{n+m} z_k$$

элемента e_n . Легко видеть, что

$$\delta\left(\sum_{k=n+m+1}^\infty z_k\right) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \delta\left(\sum_{k=n+1}^{n+m} z_k\right) \leq \max_{k \geq n+1} \delta(z_k) = \alpha_{n+1} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\delta(e_n) = \max\left(\delta(e_0), \delta\left(\sum_{k=n+m+1}^\infty z_k\right), \delta\left(\sum_{k=1}^{n+m} z_k\right)\right) \rightarrow \delta(e_0).$$

Вместе с тем по построению последовательности (e_n) при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\delta(e_n) = \delta(e)$. Таким образом, $\delta(e) = \delta(e_0)$.

Предположим, что $\delta(e_0) > 0$. Тогда для любого разбиения $\pi \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(e_0)$ существует единственный элемент $x \in \pi$, удовлетворяющий условию $\delta(x) = \delta(e_0)$. В самом деле, иначе найдется пара $(x_1, x_2) \in \mathcal{P}_2(e_0)$, для которой $\delta(x_2) = \delta(e_0)$. Поскольку $\alpha_n \rightarrow 0$, можно подобрать номер m так, чтобы $\alpha_{(m+1)} < \delta(e_0)$. Тогда выполняется

$$\begin{aligned} \delta(e_0) = \delta(x_1) = \delta(x_2) &\leq \sup\{\delta(y_2) : (y_1, y_2) \in \mathcal{P}_2(e_0)\} \\ &\leq \sup\{\delta(y_2) : (y_1, y_2) \in \mathcal{P}_2(e_m)\} \leq \alpha_{(m+1)} < \delta(e_0), \end{aligned}$$

что невозможно. Обозначим через x_π тот единственный элемент дизъюнктного разбиения $\pi \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(e_0)$, для которого $\delta(x_\pi) = \delta(e_0)$. Тогда, как нетрудно убедиться, $(x_\pi)_{\pi \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(e_0)}$ — монотонно убывающая к нулю сеть. В силу порядковой непрерывности нормы, $\|x_\pi\| \rightarrow 0$. Получили противоречие с тем, что $\|x_\pi\| \geq \delta(x_\pi) = \delta(e_0) > 0$ при всяком $\pi \in \mathcal{P}_{\text{fin}}(e_0)$. Следовательно, $\delta(e) = \delta(e_0) = 0$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Импликация а) $\Rightarrow$ б) фактически установлена в [2, VII.6].

б) $\Rightarrow$ а). Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — банахова решетка, удовлетворяющая условию б). Тогда норма $\|\cdot\|$ порядково непрерывна и, следовательно, E — K -пространство. По лемме Цорна в решетке E найдется максимальное семейство A , состоящее из попарно дизъюнктивных атомов. Без ограничения общности, можно считать, что $\|a\| = 1$ для любого $a \in A$. Покажем, что семейство A является порядковым базисом решетки E . Достаточно установить, что в решетке E нет ненулевых безатомных элементов. Возьмем произвольный безатомный элемент $e \in E$. Можно считать, что $e \geq 0$. Опираясь на установленную выше лемму 2, построим последовательность $(e_m) \subseteq E$ и строго возрастающую последовательность $(k(n))_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{N}$ такую, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $\{e_m\}_{m=k(n)+1}^{k(n+1)}$ является дизъюнктивным разбиением

элемента e , причем $\|e_m\| \leq 1/n$ при $m \geq k(n) + 1$. Последовательность (e_m) сходится к нулю по норме. В силу эквивалентности сходимостей, выполняется $e_m \xrightarrow{(\circ)} 0$. Тогда найдется последовательность $(u_m) \subseteq E$, $u_m \downarrow 0$, элементы которой удовлетворяют при каждом m условию $|e_m| \leq u_m$. Очевидно, что $u_m \geq e$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, $e = 0$. Таким образом, установлено, что A – порядковый базис K -пространства E . Определим отображение $\psi: E \times A \rightarrow \mathbb{R}$ правилом:

$$\psi(x, a) := \|\operatorname{pr}_a(x_+) \| - \|\operatorname{pr}_a(x_-)\| \quad ((x, a) \in E \times A)$$

(где $x_+ := x \vee 0$, $x_- := (-x) \vee 0$, $\operatorname{pr}_a(x) := \sup\{x \wedge na : n \in \mathbb{N}\}$) и положим

$$\varphi(x) := \psi(x, \cdot) \quad (x \in E).$$

Простая проверка показывает, что φ – линейный решеточный изоморфизм E в $c_0(A)$. Для завершения доказательства теоремы остается проверить, что $\varphi(E) = c_0(A)$. Возьмем произвольно элемент $f \in c_0(A)$. Обозначим $A_f := \{a \in A : f(a) \neq 0\}$. Легко видеть, что множество A_f не более чем счетно. Опуская тривиальный случай $\operatorname{card}(A_f) < \infty$, можем считать, что $A_f = \{a_n\}_{n=1}^\infty$, причем $a_k \neq a_p$ при $k \neq p$. Рассмотрим элементы $f(a_n) \cdot a_n \in E$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда $\|f(a_n) \cdot a_n\| = |f(a_n)| \rightarrow 0$ и по условию б) теоремы $f(a_n) \cdot a_n \xrightarrow{(\circ)} 0$. В частности, множество $\{f(a_n) \cdot a_n\}_{n=1}^\infty$ порядково ограничено в решетке E . Поскольку E является K -пространством, существует такой элемент $e \in E$, что $x = (o) - \sum_{n=1}^\infty f(a_n) \cdot a_n$. Из построения отображения φ ясно, что $\varphi(x) = f$. Таким образом, $\varphi(E) = c_0(A)$. Теорема полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Для произвольной банаховой решетки E равносильны следующие условия:

- E линейно и решеточно изоморфна банаховой решетке c_0 всех сходящихся к нулю вещественнозначных последовательностей;
- E – бесконечномерная банахова решетка счетного типа со слабой единицей, в которой сходимость последовательностей по норме равносильна порядковой сходимости.

Примечания и дополнения. Следует отметить, что в формулировке теоремы 1 нельзя заменить условие б) условием: E – порядково сепарабельная банахова решетка со свойством (*). А именно, верно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Нормированная решетка обладает свойством (*) тогда и только тогда, когда она конечномерна.

Достаточность очевидна. Установим необходимость. Пусть $(E, \|\cdot\|)$ – нормированная решетка, удовлетворяющая свойству (*). Тогда, согласно [3], единичный шар порядково ограничен в E . Возьмем произвольно множество $D \subseteq E \setminus \{0\}$ попарно дизъюнктивных элементов и положим $D' := \{a/\|a\| : a \in D\}$. Множество D' лежит в единичном шаре. Тем самым D' порядково ограничено. Поскольку норма в $(E, \|\cdot\|)$ порядково непрерывна, $\operatorname{card}(D) = \operatorname{card}(D') < \infty$ (см., например, [1, 104.2]). Следовательно, всякое семейство попарно дизъюнктивных ненулевых элементов E конечно. В силу известной теоремы Юдина (см., например, [2, III.14]) отсюда вытекает, что $\dim(E) < \infty$. Предложение доказано.

Приведем пример, показывающий, что в условии б) теоремы 1 нельзя опустить требование счетности типа. Пусть T – какое-либо несчетное множество и $c(T) := \{\lambda \mathbf{1} + f : \lambda \in \mathbb{R}, f \in c_0(T)\}$, где $\mathbf{1}: T \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, тождественно равная

единице на T . Тогда $c(T)$ – банахова решетка, обладающая свойством (**), но не имеющая счетного типа. $c(T)$ не может быть изоморфна банаховой решетке вида $c_0(A)$, поскольку последняя всегда имеет счетный тип.

Отметим, что доказательство леммы 2 можно сократить, проводя его на менее элементарном уровне, с использованием представления банаховой решетки с порядково непрерывной нормой в виде идеального пространства измеримых функций.

Из леммы 2 немедленно вытекает следующее известное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Безатомная банахова решетка с порядково непрерывной нормой не имеет ненулевых решеточных гомоморфизмов.

Для банаховой решетки $\ell_1(A)$ суммируемых с модулем последовательностей на некотором множестве A характеристика, аналогичная данной в теореме 1, установлена в работе [4]. В этой работе, при некоторых дополнительных условиях пространство $\ell_1(A)$ выделяется в классе банаховых решеток с помощью свойства Шура: произвольная последовательность слабо сходится тогда и только тогда, когда эта последовательность сходится по норме.

Институт математики
Сибирского отделения РАН

Поступило
20.07.94
Исправленный вариант
19.01.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zaanen A. C. Riesz spaces. V. II. Amsterdam: North-Holland, 1983.
2. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.
3. Вулих Б.З., Корсакова О.С. // Матем. заметки. 1973. Т. 13. № 2. С. 259–268.
4. Yuanhui X. // Acta Math. Sci. 1993. V. 13. № 1. P. 99–101.