Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, Плотностная теорема и поведение аргумента дзета-функции Римана, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 448–449

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1847>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:30:27

ПЛОТНОСТНАЯ ТЕОРЕМА И ПОВЕДЕНИЕ АРГУМЕНТА ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

А. А. Карацуба

Введем известные в теории дзета-функции Римана функции $N(\sigma, T), S(T), S_1(T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $N(\sigma, T)$ – количество нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 < \text{Im } s \leq T, \text{Re } s > \sigma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. При вещественном T , не равном мнимой части нуля $\zeta(s)$,

$$S(T) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right),$$

где $\arg \zeta(1/2 + iT)$ получается непрерывным продолжением $\arg \zeta(s)$ вдоль ломаной линии, начинающейся в точке $s = 2$ ($\arg \zeta(2) = 0$), идущей к точке $s = 2 + iT$ и затем к точке $s = 1/2 + iT$. Если же T – мнимая часть нуля $\zeta(s)$, то

$$S(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \{S(T + \varepsilon) + S(T - \varepsilon)\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-01-00002.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. При положительном числе T функция $S_1(T)$ определяется равенством

$$S_1(T) = \int_0^T S(t) dt.$$

Далее, считаем, что a – фиксированное число, причем

$$\frac{27}{82} < a \leq 1, \quad T \geq T_1(a) > 0, \quad H = T^a.$$

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. При $1/2 \leq \sigma \leq 1$ выполняется оценка

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) = O\left(H(T^{27/82}H^{-1})^{0,0001(2\sigma-1)} \log T\right),$$

где постоянная в знаке O зависит только от a .

ТЕОРЕМА 2. Пусть k – натуральное число. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\int_T^{T+H} |S(t)|^{2k} dt = \frac{(2k)!}{k!(2\pi)^{2k}} H(\log \log T)^k + O(H(\log \log T)^{k-0,5}),$$

где постоянная в знаке O зависит только от a и k .

ТЕОРЕМА 3. Пусть k – натуральное число. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\int_T^{T+H} |S_1(t)|^{2k} dt = c_k H + O(H \log^{-1} T),$$

где c_k – положительная постоянная, зависящая только от k , и постоянная в знаке O зависит только от a и k .

ТЕОРЕМА 4. Существует положительная постоянная $A = A(a)$ такая, что функция $S(t)$ меняет знак на промежутке $(T, T+H)$ не менее, чем K раз, где

$$K = \left[H(\log T)^{1/3} \exp\left(-A\sqrt{\log \log T}\right) \right].$$

Основой доказательства теорем 1–4 служит метод А. Сельберга [1] и метод работы автора [2].

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
02.04.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Selberg A. // Archiv für Mathematik og Naturvidenskab. 1946. V. 48. № 5. P. 89–155.
2. Карацуба А. А. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 3. С. 569–584.