Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Бифуркация периодических движений при резонансе $1 : 1$ с клетками Жордана, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 450–451

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1848>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:56:14

БИФУРКАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ПРИ РЕЗОНАНСЕ 1 : 1 С КЛЕТКАМИ ЖОРДАНА

А. Ю. Колесов

1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{z} &= iz + w, \\ \dot{w} &= iw + \varepsilon_1 \alpha z + \varepsilon_2 \beta w + a_1 |z|^2 z + a_2 |z|^2 w + a_3 z^2 \bar{w} \\ &\quad + a_4 |w|^2 z + a_5 w^2 \bar{z} + a_6 |w|^2 w + \Phi(z, \bar{z}, w, \bar{w}, \varepsilon_1, \varepsilon_2),\end{aligned}\quad (1)$$

являющуюся нормальной формой Пуанкаре–Дюлака четырехмерной автономной системы дифференциальных уравнений, для нулевого состояния равновесия которой реализуется критический случай двукратной пары чисто мнимых корней $\pm i$ с клетками Жордана. Здесь z, w – комплексные переменные; $0 < \varepsilon_j \ll 1$, $j = 1, 2$; α, β, a_j , $j = 1, \dots, 6$, – комплексные коэффициенты нормальной формы; Φ – достаточно гладкая по совокупности переменных (в смысле вещественного анализа) комплекснозначная функция, определенная в некоторой окрестности начала координат и допускающая оценку

$$|\Phi| \leq N[(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|)(|z| + |w|)^3 + (|z| + |w|)^5]$$

с независящей от $(z, w, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ постоянной $N > 0$.

В монографии [1] доказана неустойчивость нулевого состояния равновесия системы (1) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ и $a_1 \neq -b$, $b > 0$. Поэтому естественно возникают вопросы об устойчивости этого состояния равновесия при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $a_1 = -b$, а также о существовании и устойчивости циклов, бифурцирующих из него при $\varepsilon_j \neq 0$, $j = 1, 2$, и

$$a_1 = -b + i\mu, \quad 0 < \mu \ll 1, \quad b > 0, \quad (2)$$

(случай $\mu < 0$ сводится к данному посредством перехода в (1) к комплексному сопряжению).

2. В формулируемом ниже утверждении считаем, что

$$\mu = \varepsilon, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon^3, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon^2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (3)$$

Положим, далее, $x = \operatorname{Re} a_2$, $y = \operatorname{Re} a_3$ и введем в рассмотрение многочлен

$$P(\xi) = \sqrt{b}(x - y)\xi^3 + \xi^2 + \sqrt{b} \operatorname{Re} \beta \cdot \xi + \operatorname{Im} \alpha. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть многочлен (4) имеет корень $\xi_0 \neq 0$ и отличен от нуля числа

$$s_1 = -(x\xi_0^2 + \operatorname{Re} \beta), \quad s_2 = -P'(\xi_0), \quad s_3 = 6\sqrt{b}s_1 - s_2. \quad (5)$$

Тогда при условиях (2), (3) и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ этому корню соответствует цикл $L(\varepsilon)$ системы (1) амплитуды порядка ε и периода $T(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$, экспоненциально орбитально устойчивый при $s_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, и неустойчивый, если хотя бы одно из чисел (5) отрицательно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы выполним в (1) последовательно замены

$$z \exp(-it) \rightarrow z, \quad w \exp(-it) \rightarrow w, \quad \frac{z}{\varepsilon} \rightarrow z, \quad \frac{w}{\varepsilon^2} \rightarrow w, \quad \varepsilon t \rightarrow t.$$

В результате после отбрасывания слагаемых порядка малости ε^2 и выше получаем так называемую укороченную нормальную форму

$$\begin{aligned} \dot{z} &= w, \\ \dot{w} &= -b|z|^2 z + \varepsilon(\alpha z + \beta w + i|z|^2 z + a_2|z|^2 w + a_3 z^2 \bar{w}). \end{aligned} \quad (6)$$

Несложная проверка показывает, что каждому простому корню $\xi_0 \neq 0$ многочлена (4) соответствует автомодельный цикл

$$z = \xi(\varepsilon) \exp(i\sigma(\varepsilon)t), \quad w = i\sigma(\varepsilon) \exp(i\sigma(\varepsilon)t) : \quad (\xi(0), \sigma(0)) = (\xi_0, \sqrt{b}\xi_0) \quad (7)$$

системы (6), свойства устойчивости которого совпадают с описанными в теореме. А отсюда очевидным образом следует, что исходная система (1) также имеет грубый цикл $L(\varepsilon)$, отличающийся от (7) на величины порядка ε^2 и имеющий те же свойства устойчивости.

Отметим, что при подходящем выборе параметров теорема 1 доставляет три цикла — два устойчивых и один неустойчивый. Заметим также, что при $\alpha = \beta = 0$, т.е. в чисто критическом случае, многочлен (4) имеет при $x - y \neq 0$ единственный ненулевой корень $\xi_0 = -1/\sqrt{b}(x - y)$, причем

$$s_1 = -x\xi_0^2, \quad s_2 = \xi_0, \quad s_3 = -\sqrt{b}\xi_0^2(5x + y).$$

Поэтому соответствующий цикл системы (1) устойчив при $x - y < 0$, $5x + y < 0$ и неустойчив при $x - y > 0$, $5x + y > 0$ или при $(x - y)(5x + y) < 0$.

3. В заключение приведем критерий устойчивости нулевого решения системы (1) при

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \quad a_1 = -b, \quad b > 0. \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (8). Тогда нулевое состояние равновесия системы (1) асимптотически устойчиво при $x \pm y < 0$ и неустойчиво при $x \pm y > 0$ или при $(x - y)(x + y) < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы в части устойчивости достаточно взять функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{b}{2}|z|^4 + |w|^2 + |z|^2(\gamma z \bar{w} + \bar{\gamma} \bar{z} w) - \Delta|w|^2(w \bar{z} + \bar{w} z),$$

где $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\gamma_2 = -\operatorname{Im} a_3$, параметр $\gamma_1 > 0$ выбран так, что

$$x + y + 3\gamma_1 < 0, \quad x - y + \gamma_1 < 0,$$

а $\Delta > 0$ достаточно велико. Для доказательства же неустойчивости можно применить простейшие геометрические теоремы из [1].

Ярославский государственный университет

Поступило
19.02.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хазин Л. Г., Шноль Э. Э. Устойчивость критических положений равновесия. Пушкино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985.