Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Кузин, Об отсутствии счетного множества решений у некоторых эллиптических задач с правой частью и суперкритическим показателем нелинейности, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 452–457

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1849>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:53:21

ОБ ОТСУТСТВИИ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ У НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ И СУПЕРКРИТИЧЕСКИМ ПОКАЗАТЕЛЕМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

И. А. Кузин

Формулировка результатов. В данной работе мы рассматриваем “антикоэрцитивную” задачу

$$\begin{aligned} \Delta u + |u|^{p-1}u &= h(\mathbf{x}) \quad \text{в } \Omega, \\ u(\partial\Omega) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где Ω — гладкая ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $N > 2$, $p+1 \geq 2^*$, $2^* \equiv 2N/(N-2)$ — критический показатель нелинейности.

Известно, что если $h \equiv 0$, то задача (1) имеет при $2 < p+1 < 2^*$ счетное множество различных решений из $H_1^0(\Omega)$, если же $p+1 \geq 2^*$ и область Ω звездная (например, шар), то задача (1) с $h \equiv 0$ не имеет решений, отличных от тривиального (С. И. Похожаев [1]).

Интерес представляет случай нетривиальных правых частей. Известно, что если $2 < p+1 < (2N-2)/(N-2)$, то для любой функции $h \in L_2(\Omega)$ задача (1) имеет счетное множество решений из $H_1^0(\Omega)$ (А. Бари, П.-Л. Лионс [2], М. Стuve [3], А. Бари, Х. Берестичкий [4]).

Возникает закономерный вопрос о существовании решений для критического и суперкритического случаев $p+1 \geq 2^*$ при нетривиальной правой части.

Исследуем этот вопрос, когда Ω — шар и h — радиальная функция.

В работах С. И. Похожаева (см., например, [5]) приведены некоторые достаточные условия на h , при которых радиальная задача (1) не имеет положительных или отрицательных решений.

Мы покажем, что для многих h высокой гладкости задача (1) в критическом или суперкритическом случаях, в отличие от докритического случая, не допускает счетного множества радиальных решений.

Итак, в радиальном случае и случае нечетных p задача (1) представима в виде

$$\begin{aligned} u'' + \frac{N-1}{r}u' + |u|^{p-1}u &= h(r), \quad 0 \leq r \leq R, \\ u'(0) &= 0, \quad u(R) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $r = |\mathbf{x}|$, а $R > 0$ есть радиус шара Ω .

С целью изучения задачи (2) на предмет существования или несуществования решений мы будем исследовать вспомогательную задачу Коши

$$\begin{aligned} u'' + \frac{N-1}{r}u' + |u|^{p-1}u &= h(r), \quad 0 \leq r < +\infty, \\ u'(0) &= 0, \quad u(0) = a, \end{aligned} \quad (3)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 93-011-197, и Международного научного фонда, гранты NMT000, NMT300.

при разных значениях a . Стандартные рассуждения показывают, что если $h \in C_{\text{loc}}([0, +\infty))$, то задача (3) для каждого a имеет единственное решение из $C_{\text{loc}}^2([0, +\infty))$, которое мы будем обозначать u_a .

Аналогично, решение задачи

$$\begin{aligned} u'' + \frac{N-1}{r} u' + |u|^{p-1} u &= h(r), \quad R \leq r < +\infty, \\ u(R) &= a, \quad u'(R) = b, \end{aligned}$$

будем обозначать $u_{R,a,b}$. Для $p+1 > 2^*$ обозначим также

$$U(R) = \min_{\sigma=\pm 1} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} \inf_{\substack{M\sigma/\delta^\tau - \varepsilon \leq a \leq M\sigma/\delta^\tau + \varepsilon \\ -M\sigma\tau/\delta^{\tau+1} - \varepsilon \leq b \leq -M\sigma\tau/\delta^{\tau+1} + \varepsilon}} |u_{\delta,a,b}(R)|,$$

где $\tau = 2/(p-1)$, $M = (\tau(N-\tau-2))^{\tau/2}$.

Будем считать, что h — действительная радиальная голоморфная функция на некотором открытом шаре $B_{R+\varepsilon}$.

Основной результат следующий.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p+1 \geq 2^*$ — целое нечетное число, h как описано выше. Пусть $u_0(R) \neq 0$ при $p+1 = 2^*$ и $U(R) \neq 0$ при $p+1 > 2^*$. Тогда задача (2) имеет не более конечного числа классических решений $u \in C^2([0, R]) \cap C([0, R])$.

Доказательство. Покажем, как теорема 1 доказывается для случая $p+1 = 2^*$. Случай $p+1 > 2^*$ аналогичен.

Тогда теорема 1 основывается на следующем результате.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p+1 = 2^*$, $h \in C_{\text{loc}}([0, \infty))$ и $u_0(R) \neq 0$. Пусть для любого a_0 существует не более конечного числа значений $|a| \leq a_0$, при которых решение u_a задачи (3) является решением задачи (2). Тогда задача (2) имеет не более конечного числа классических решений $u \in C^2([0, R]) \cap C([0, R])$.

Теорема 2 в свою очередь основывается на следующей лемме.

ЛЕММА 1. Пусть $p+1 = 2^*$, $h \in C_{\text{loc}}([0, \infty))$. Тогда для любых $0 < r_0 \leq R_0 < \infty$

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} \max_{r_0 \leq r \leq R_0} |u_a(r) - u_0(r)| + |u'_a(r) - u'_0(r)| = 0.$$

Представим на время, что лемма 1 верна, и докажем теоремы 2 и 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В силу предположения $u_0(R) \neq 0$. Тогда вследствие леммы 1 $u_a(R) \neq 0$ для достаточно больших $|a|$. Но согласно условию теоремы, коль скоро выбрано некоторое a_0 , существует не более конечного числа значений $|a| \leq a_0$, при которых решение u_a задачи (3) является решением задачи (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для нечетных p функция u^p голоморфна. В силу голоморфности h для любых конечных $a_0 > 0$ функция $u.(R)$, рассмотренная на отрезке $[-a_0, a_0]$, не может иметь бесконечного числа нулей. В противном случае $u.(R) \equiv 0$ (см., например, [6], [7]), что не так хотя бы потому, что $u_0(R) \neq 0$. Следовательно, мы можем применить теорему 2.

Теорема 1 доказана.

Далее для удобства обозначений мы ограничимся рассмотрением случая $a > 0$, $p + 1 = 2^*$ – нечетное целое, всегда так полагая и часто не оговаривая это особо.

Итак, нам осталось доказать лемму 1. Для этого вместе с задачей (3) рассмотрим также следующую вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} v'' + \frac{N-1}{r} v' + v^p &= 0, & 0 \leq r < +\infty, \\ v'(0) &= 0, & v(0) = a. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение этой задачи с заданным a будем обозначать v_a . Очевидно, что $v_a \in C_{\text{loc}}^2([0, +\infty))$.

ЛЕММА 2. Для любых $0 < r_0 \leq R_0 < \infty$

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} \max_{r_0 \leq r \leq R_0} |v_a(r)| + |v'_a(r)| = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно показать (см., например, [8]), что для $p + 1 = 2^*$

$$v_a(r) = av_1(|a|^{(p-1)/2} r), \quad (5)$$

где

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (|v_1(r)| + |v'_1(r)|) r^{2/(p-1)} = 0. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Хорошо известно (см., например, [8]), что $v_1 > 0$ и $v'_1 \leq 0$.

В основе доказательства леммы 1 лежит следующее наблюдение.

ЛЕММА 3. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $a_0 > 0$ такое, что для всех $a \geq a_0$

$$\max_{\{0 \leq r < +\infty : v_a(r) \geq a_0\}} (|u_a(r) - v_a(r)|^2 + |u'_a(r) - v'_a(r)|^2) \leq \varepsilon. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $w = u_a - v_a$. Тогда

$$\begin{aligned} w'' + \frac{N-1}{r} w' + (v_a + w)^p - v_a^p &= h(r), & 0 \leq r < +\infty, \\ w(0) &= 0, & w'(0) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что $(v_a + w)^p - v_a^p = f(v_a, w)w^2 + pv_a^{p-1}w$, где

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \max_{|s| \leq 1} f(t, s) t^{1-p} = 0. \quad (9)$$

Домножим уравнение (8) на w' и проинтегрируем от 0 до R с учетом начальных условий. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}((w')^2 + p v_a^{p-1} w^2)(R) = & -(N-1) \int_0^R \frac{(w')^2}{r} dr + \frac{p}{2} \int_0^R (v_a^{p-1})' w^2 dr \\ & - \int_0^R f(v_a, w) w^2 w' dr + \int_0^R h w' dr. \end{aligned} \quad (10)$$

Первые два слагаемые в правой части (10) неположительны. Для первого слагаемого это очевидно сразу. Второе же является таковым вследствие того, что $v_a > 0$, $v'_a \leq 0$.

Следовательно, будем иметь

$$\frac{1}{2}((w')^2 + p v_a^{p-1} w^2)(R) \leq - \int_0^R f(v_a, w) w^2 w' dr + \int_0^R h w' dr. \quad (11)$$

Выберем некоторым образом $\varepsilon > 0$. Не теряя общности, положим $\varepsilon \leq 1/2$. В силу начальных условий задачи (8), а также регулярности v_a и h , для любого $a_0 > 0$ и каждого $a \geq a_0$ существует такое δ_a с $1 \geq \delta_a > 0$, что

$$\max_{\{0 \leq r \leq \delta_a : v_a(r) \geq a_0\}} (|w(r)|^2 + |w'(r)|^2) \leq 1.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} h_M = \max_{|r| \leq 1} |h(r)|, \quad w'_R = \max_{|r| \leq R} |w'(r)|, \quad w_R = \max_{|r| \leq R} |w(r)|, \\ (w^2 v_a^{p-1})_R = \max_{|r| \leq R} (w^2 v_a^{p-1})(r). \end{aligned}$$

Получим при $R \in \{0 \leq r \leq \delta_a : v_a(r) \geq a_0\}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^R h w' dr \right| & \leq h_M w'_R R, \\ \left| \int_0^R f(v_a, w) w^2 w' dr \right| & \leq \frac{p}{2} \int_0^R \left| v_a^{p-1} w^2 w' \right| dr \\ & \leq \frac{p}{2} (w^2 v_a^{p-1})_R w'_R R dr, \quad a_0 \text{ велико.} \end{aligned} \quad (12)$$

Вторая оценка (12) следует из (9) для достаточно больших a_0 в силу $|w_R| \leq 1$. Из (11), (12) следует

$$\frac{1}{2} (w'_R)^2 + \frac{p}{2} (w^2 v_a^{p-1})_R \leq \left(h_M + \frac{p}{2} (w^2 v_a^{p-1})_R \right) w'_R R. \quad (13)$$

Следовательно, выбирая

$$R_1 \equiv \frac{\varepsilon/2}{h_M/p + \varepsilon/2},$$

получим для $R \in \{0 \leq r \leq \min\{\delta_a, R_1\} : v_a(r) \geq a_0\}$ вследствие $|w'_R| \leq 1$:

$$(w^2 v_a^{p-1})_R \leq \varepsilon. \quad (14)$$

Вследствие $v_a(r) \geq a_0$ для рассматриваемых r мы имеем из (14) при $a_0 \geq 1$

$$w_R^2 \leq \varepsilon. \quad (15)$$

Сопоставляя (13) и (14), получим

$$\frac{1}{2}w'_R \leq \left(h_M + \frac{p}{2}\varepsilon\right)R,$$

откуда для

$$R = \min\{R_2, \delta_a\}, \quad R_2 = \min\left\{R_1, \frac{1}{2p}, \frac{\varepsilon}{4h_M}\right\} \quad (16)$$

следует

$$w'^2_R \leq \varepsilon. \quad (17)$$

Итак, если $\varepsilon \leq 1/2$, то, выбирая R согласно (16), мы получим априорные оценки (15), (17). В силу выбора ε из (15), (17) следует, в частности, что $|w_R| < 1$, $|w'_R| < 1$. Значит, эти оценки верны на самом деле для $R = R_2$.

Поскольку в силу леммы 2 $\{0 \leq r < +\infty : v_a(r) \geq a_0\} \subset [0, R_2]$ для достаточно больших a_0 , лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $a_1 > 0$, что для любого $a \geq a_1$ существует $R_1 \leq \varepsilon$ такое, что

$$|u_a(R_1)| + |u'_a(R_1)| \leq 2\varepsilon. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем, не теряя общности, некоторое $0 < \varepsilon \leq 1/2$. В силу лемм 2, 3 для любого такого ε существует $a_0 > 0$ такое, что для любого $a \geq a_0$ в точке r_0 , в которой $v_a(r_0) = a_0$, выполнено

$$|w(r_0)| + |w'(r_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad r_0 \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (19)$$

В силу уравнения (8)

$$\begin{aligned} w(R) = & \frac{1}{N-2} \int_{r_0}^R (v_a^p - (v_a + w)^p + h)r \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{N-2}\right) dr \\ & + w'(r_0) \int_{r_0}^R \frac{r_0^{N-1}}{r^{N-1}} dr + w(r_0). \end{aligned}$$

Имеем в силу (19) для $1 \geq R > r_0$

$$|w(R)| \leq \int_{r_0}^R |f(v_a, w)w^2 + pv_a^{p-1}w| \frac{r}{N-2} dr + \frac{h_M}{2} \frac{R^2 - r_0^2}{N-2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, если $|w| \leq 1$, и $a_0 \geq 1$ достаточно велико, то в силу (9) и $v_a \leq a_0$ при $1 \geq R > r_0$

$$|w(R)| \leq \frac{2}{N-2} a_0^{p-1} p \int_{r_0}^R r dr + \frac{h_M}{2} \frac{R^2 - r_0^2}{N-2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Иначе, для $1 \geq R_0 > r_0$, для которых $|w| \leq 1$,

$$\max_{r_0 \leq R \leq R_0} |w(R)| \leq a_0^{p-1} p \frac{R_0^2 - r_0^2}{N-2} + \frac{h_M}{2} \frac{R_0^2 - r_0^2}{N-2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем максимальное $R_0 \leq 1$ среди тех, для которых выполнено

$$\frac{R_0^2 - r_0^2}{N - 2} \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4pa_0^{p-1}}, \frac{\varepsilon}{2h_M} \right\}, \quad R_0 - r_0 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\max_{r_0 \leq R \leq R_0} |w(R)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad R_0 \leq \varepsilon.$$

Аналогичные рассуждения для производной и соответствующее переобозначение для ε приводят для соответствующего $1 \geq R_0 > r_0$ к оценке

$$\max_{r_0 \leq R \leq R_0} (|u_a(R) - v_a(R)| + |u'_a(R) - v'_a(R)|) \leq \varepsilon, \quad R_0 \leq \varepsilon. \quad (20)$$

Аналогично лемме 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует $a_1 \geq a_0$ такое, что для каждого $a \geq a_1$ существует R_1 с $r_0 < R_1 \leq R_0$ и

$$|v_a(R_1)| + |v'_a(R_1)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (21)$$

Тогда из (20), (21) следует, что для достаточно больших a_1 выполнено (18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ 1. В силу начальных данных для любого $\varepsilon > 0$ существует такое R , что

$$\max_{0 \leq r \leq R} |u_0(r)| + |u'_0(r)| \leq \varepsilon.$$

С другой стороны, в силу леммы 4 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое a_0 , что для любого $a \geq a_0$ существует $r_1 \leq R$ такое, что $|u_a(r_1)| + |u'_a(r_1)| \leq \varepsilon$, т.е.

$$|u_0(r_1) - u_a(r_1)| + |u'_0(r_1) - u'_a(r_1)| \leq 2\varepsilon.$$

По теореме о непрерывной зависимости от начальных данных мы получаем утверждение леммы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства следует, что мы можем обобщить утверждения леммы 1 и теоремы 2 на случай, когда $p + 1 = 2^*$ — любое и вместо u^p стоит достаточно гладкая функция g с $g(v + w) - g(v) = f(v, w)w^2 + p|v|^{p-1}vw$, где f удовлетворяет (9).

Отдел теоретических проблем РАН

Поступило

31.10.95

Исправленный вариант

18.03.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Похожаев С. И. // Докл. АН СССР. Т. 165, № 1. С. 36–39.
2. Bahri A., Lions P.-L. // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1985. V. 301. P. 145–147.
3. Struwe M. // Manuscr. Math. 1980. V. 32. P. 335–364.
4. Bahri A., Berestycki H. // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 267. P. 1–32.
5. Похожаев С. И. // Тр. МИАН. 1993. Т. 201. С. 324–341.
6. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
7. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука. 8. Chandrasekhar S. An introduction to the study of stellar structure. N.Y.: Dover, 1957.