Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Рыбаков, Еще один класс пространств Намиоки, *Матем. заметки*, 2003, том 73, выпуск 2, 263–268

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:43:00

УДК 517.982

ЕЩЕ ОДИН КЛАСС ПРОСТРАНСТВ НАМИОКИ

В. И. Рыбаков

Устанавливается принадлежность некоторого класса топологических пространств к классу пространств Намиоки. Результат формулируется в терминах топологических игр.

Библиография: 7 названий.

Введем некоторые обозначения и напомним необходимые понятия. В заметке линейные пространства рассматриваем над полем $\mathbb{R}$, а топологические пространства считаются отделимыми. Топологическое пространство T называют $\mathcal{H}$ -счётно-определённым, если имеется подмножество S в топологическом пространстве $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и существует отображение (многозначное) $F: S \rightarrow \mathcal{H}(T)$ ($\mathcal{H}(T)$ – семейство компактных подмножеств в T) такое, что для всякого открытого в T множества U множество $\{s \in S : F(s) \subset U\}$ открыто в S и $T = \bigcup \{F(s), s \in S\}$ (см. [1, с. 96]). Если K – компактное множество, то $C(K)$ – пространство вещественных непрерывных функций на K , наделённое $\sup$ -нормой; для топологического пространства T обозначим через $C_p(T)$ пространство вещественных непрерывных на T функций с топологией поточечной сходимости на T .

Топологическое пространство T называется *бэровским*, если пересечение всякого счётного семейства всюду плотных открытых в T множеств всюду плотно в T .

Будем использовать символ I для обозначения отрезка $[0; 1]$. Для элемента $t = (t_\gamma) \in I^\Gamma$ (= декартово произведение Γ экземпляров отрезка I с тихоновской топологией) обозначим $s(t) = \{\gamma \in \Gamma : t_\gamma > 0\}$, а для $Z \subset I^\Gamma$ обозначим $s(Z) = \bigcup \{s(t) : t \in Z\}$. Положим

$$\Sigma(\Gamma) = \{t \in I^\Gamma : s(t) \text{ не более чем счётно}\}.$$

Для $\Gamma \subset \Gamma_1$ можно вложить $C(I^\Gamma)$ в $C(I^{\Gamma_1})$ с помощью следующего отображения p : для $u \in C(I^\Gamma)$ положим $(p(u))(t) = u(\text{pr}_\Gamma t)$, $t \in I^{\Gamma_1}$ (где pr_Γ – каноническая проекция I^{Γ_1} на I^Γ). В дальнейшем символ p будем опускать и, рассматривая элемент $u \in C(I^\Gamma)$ как функцию из $C(I^{\Gamma_1})$, будем ее также обозначать через u (из контекста будет ясно, элементом какого пространства рассматривается u).

Введем в этом абзаце обозначения отображений, которыми будем пользоваться на протяжении всего доказательства теоремы. Если K – компактное пространство и E – $\mathcal{H}$ -счётно-определённое множество в $C_p(K)$, то обозначим через g_E непрерывное отображение из K в $C_p(E)$ такое, что

$$(g_E(y))(h) = h(y), \quad y \in K, \quad h \in E.$$

Множество $g_E(K)$ (рассматриваемое с топологией поточечной сходимости на E) является компактом Корсона и, следовательно, существует множество Γ_E и гомеоморфизм ξ_E пространства $g_E(K)$ на некоторое подпространство в I^{Γ_E} такие, что $\xi_E(g_E(K)) \subset \Sigma(\Gamma_E)$ (см. [2, теорема 3.7] и [3, гл. VI, теорема 7.2, (ii) $\implies$ (iii)]). Таким образом, для всякого множества E указанного вида определяются отображения g_E , ξ_E и непрерывное отображение $\varphi_E = \xi_E \circ g_E$ пространства K в $\Sigma(\Gamma_E) \subset I^{\Gamma_E}$.

Для какого-либо счетного множества $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ условимся, что

$$\sigma_n(A) = \{a_1, \dots, a_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Говорят, что топологическое пространство X является *пространством Намиоки*, если для всяких компактного пространства K и произвольного непрерывного отображения $f: X \rightarrow C_p(K)$ существует всюду плотное в X множество G такое, что $f: X \rightarrow C(K)$ непрерывно в каждой точке из G (см. [4, п. 2.2], [5]).

Пусть $\mathcal{P}$ – какое-либо семейство подмножеств топологического пространства X . Топологическая игра $G_{\mathcal{P}}$ определяется следующим образом (см. [4, п. 2.3]): имеются два игрока α и β , они поочередно выбирают непустые открытые в X множества. Первым начинает игрок β , выбирая открытое в X множество V_1 ; далее, игрок α выбирает открытое $U_1 \subset V_1$ и множество $A_1 \in \mathcal{P}$. После того, как каждый произвел n выборов, $n \geq 1$, игрок β выбирает открытое $V_{n+1} \subset U_n$, а затем игрок α выбирает открытое $U_{n+1} \subset V_{n+1}$ и $A_{n+1} \in \mathcal{P}$ и т.д. Выигрывает α , если

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right) \cap \left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \right) \neq \emptyset$$

($\overline{B}$ – замыкание в X множества B); в противном случае побеждает β . Говорят, что пространство X *β -неблагоприятно* для игры $G_{\mathcal{P}}$, если игрок β не имеет выигрышной стратегии (т.е. какой бы стратегии выбора множеств V_n игрок β не придерживался, игрок α может так выбирать пары (U_n, A_n) , что выиграет).

Как установлено в [6, теорема 10], пространство, являющееся β -неблагоприятным для игры G_a (где G_a – такая игра $G_{\mathcal{P}}$, когда $\mathcal{P}$ – семейство $\mathcal{X}$ -аналитических множеств) будет пространством Намиоки (см. также [4, п. 2.15]).

В нашей заметке устанавливается, что пространством Намиоки является и всякое X из более широкого класса топологических пространств, именно: когда X β -неблагоприятно для игры G_{cd} (где G_{cd} – топологическая игра $G_{\mathcal{P}}$, когда в качестве семейства $\mathcal{P}$ берется совокупность всех $\mathcal{X}$ -счетно-определенных подмножеств в X).

ТЕОРЕМА. *Всякое топологическое пространство, являющееся β -неблагоприятным для игры G_{cd} , будет пространством Намиоки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – β -неблагоприятное пространство для игры G_{cd} . Тогда X является β -неблагоприятным для игры G (где G – такая игра $G_{\mathcal{P}}$, что семейство $\mathcal{P}$ состоит из одного множества X); следовательно, X – бэровское пространство [4, п. 2.3]. Возьмем произвольное компактное множество K и какое-либо непрерывное отображение $f: X \rightarrow C_p(K)$. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$O_{\varepsilon} = \cup \{U : U \text{ открыто в } X \text{ и } \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \varepsilon \text{ для всех } x_1, x_2 \in U\}$$

(норма в пространстве $C(K)$). Если при каждом $\varepsilon > 0$ открытое множество O_ε всюду плотно в X , то множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_{1/n}$, являющееся всюду плотным (ибо X бэровское), и будет всюду плотным в X множеством точек непрерывности отображения $f: X \rightarrow C(K)$.

Допустим, что заключение теоремы неверно. Тогда найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такое непустое открытое в X множество V , что $O_\varepsilon \cap V = \emptyset$.

Начиная игру G_{cd} , игрок β выбирает непустое открытое множество $V_1 \subset V$ и какую-либо точку $y_0 \in K$; положим $F_1 = \{y_0\}$. Пусть в ответ игрок α выбрал открытое множество $U_1 \subset V_1$ и $\mathcal{H}$ -счетно-определенное множество A_1 в X . Прежде чем указать следующий выбор открытого множества игроком β (который следует определенной стратегии игры), сделаем некоторые построения.

Положим $E_1 = f(A_1)$; множество E_1 является, очевидно, $\mathcal{H}$ -счетно-определенным в $C_p(K)$. Если $g_1 = g_{E_1}$, то функция $g_1: K \rightarrow C_p(E_1)$ непрерывна (для всякого $\mathcal{H}$ -счетно-определенного в $C_p(K)$ множества E еще до формулировки теоремы определены связанные с E отображения g_E, ξ_E и φ_E) и существуют множество Γ_1 и гомеоморфизм $\xi_1 = \xi_{E_1}$ компакта $g_1(K)$ на некоторый компакт в I^{Γ_1} такие, что $\xi_1(g_1(K)) \subset \Sigma(\Gamma_1)$. Пусть $\varphi_1 = \varphi_{E_1}$ (напомним: $\varphi_{E_1} = \xi_{E_1} \circ g_{E_1}$) и пусть $J_{1,1} = s(\varphi_1(y_0))$. Пусть $\Phi_1 = \{\psi_n^{(1)}, n \in \mathbb{N}\}$ всюду плотно в $C(T_1)$, $T_1 = I^{J_{1,1}}$. Рассматривая $\psi_1^{(1)}$ как элемент из $C(I^{\Gamma_1})$ (именно: как ранее уже сказано, для $u \in C(I^{J_{1,1}})$ и $t \in I^{\Gamma_1}$ $u(t) = u(\text{pr}_{J_{1,1}} t)$, где $\text{pr}_{J_{1,1}}$ — каноническая проекция I^{Γ_1} на $I^{J_{1,1}}$), определим функцию $\psi^{(1)} \in C(K)$ такую, что

$$\psi^{(1)}(y) = \psi_1^{(1)}(\varphi_1(y)), \quad y \in K.$$

Множество

$$W = f^{-1}\left(\psi^{(1)} + \left\{h \in C(K) : \|h\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

замкнуто в X . Кроме того, W нигде не плотно в V , ибо в противном случае существовало бы такое открытое в X непустое множество $U \subset V$, что $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \varepsilon$ для любых $x_1, x_2 \in U$, а это противоречит допущению, что $O_\varepsilon \cap V = \emptyset$. Вследствие указанных свойств W найдутся $x_1 \in U_1 \setminus W$, $y_1 \in K$ и $\delta > 0$ такие, что $|(f(x_1))(y_1) - \psi^{(1)}(y_1)| = \varepsilon/2 + \delta$.

При этих условиях игрок β выбирает теперь непустое открытое в X множество

$$V_2 = \left\{x \in U_1 : |(f(x))(y_1) - (f(x_1))(y_1)| < \frac{\delta}{2}\right\}$$

в совокупности с конечным подмножеством $F_2 = \{y_0, y_1\}$ в K . Очевидно, $|(f(x))(y_1) - \psi^{(1)}(y_1)| > \varepsilon/2$ (и, следовательно, $|(f(x))(y_1) - \psi_1^{(1)}(\varphi_1(y_1))| > \varepsilon/2$) для всякого $x \in V_2$.

Пусть далее игрок α выбрал открытое $U_2 \subset V_2$ и $\mathcal{H}$ -счетно-определенное A_2 (можно считать, что $A_1 \subset A_2$). Если $E_2 = f(A_2)$, то пусть $\varphi_2 = \varphi_{E_2}$ — непрерывное отображение K в I^{Γ_2} со значениями в $\Sigma(\Gamma_2)$, заданное подобно тому, как построенное выше отображение φ_1 (которое является композицией двух отображений), при этом множество Γ_2 можно так выбрать, чтобы оно не пересекалось с Γ_1 . Положим

$$J_{1,2} = s(\varphi_1(y_0)) \cup s(\varphi_1(y_1)), \quad J_{2,1} = s(\varphi_2(y_0)) \cup s(\varphi_2(y_1))$$

и обозначим через $\Phi_2 = \{\psi_n^{(2)}, n \in \mathbb{N}\}$ множество, всюду плотное в $C(T_2)$, $T_2 = I^{J_{1,2}} \times I^{J_{2,1}}$. Пусть $\Phi^{(2)} = \sigma_2(\Phi_1) \cup \sigma_2(\Phi_2)$.

Если для $u \in \Phi^{(2)}$ через $u^{(2)}$ обозначить такую функцию из $C(K)$, что

$$u^{(2)}(y) = u(\varphi_1(y), \varphi_2(y)), \quad y \in K,$$

то, как и выше, найдем точку

$$x_2 \in U_2 \setminus \bigcup \left[f^{-1} \left(u^{(2)} + \left\{ h \in C(K) : \|h\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) \right], \quad u \in \Phi^{(2)}.$$

В этом случае можно выбрать такое непустое открытое $V_3 \subset U_2$, что для каждого $u \in \Phi^{(2)}$ существует $y_u \in K$ такие, что

$$|(f(x))(y_u) - u(\varphi_1(y_u), \varphi_2(y_u))| > \frac{\varepsilon}{2}$$

при любом $x \in V_3$.

Игрок β выбирает теперь это множество V_3 вместе с конечным множеством $F_3 = \{y_u : u \in \Phi^{(2)}\} \cup F_2$ из K , а игрок α – открытое множество $U_3 \subset V_3$ и $\mathcal{H}$ -счетно-определенное $A_3 \supset A_2$.

После выполнения каждым из игроков по n шагов будем иметь: непустые открытые в X множества $V_1 \supset U_1 \supset \dots \supset V_n \supset U_n$, конечные множества $F_1 \subset \dots \subset F_n$ в K , $\mathcal{H}$ -счетно-определенные множества $A_1 \subset \dots \subset A_n$ в X и $E_i = f(A_i)$, $i = 1, \dots, n$, в $C_p(K)$.

Тогда, как и выше, определив множество Γ_n , непересекающееся ни с одним из множеств $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$, и непрерывное отображение $\varphi_n : K \rightarrow \Sigma(\Gamma_n) \subset I^{\Gamma_n}$, где $\varphi_n = \varphi_{E_n}$, положим

$$J_{1,n} = s(\varphi_1(F_n)) \subset \Gamma_1, \quad \dots, \quad J_{n-1,2} = s(\varphi_{n-1}(F_n)) \subset \Gamma_{n-1}, \quad J_{n,1} = s(\varphi_n(F_n)) \subset \Gamma_n.$$

Пусть в этом случае $\Phi_n = \{\psi_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}\}$ всюду плотно в $C(T_n)$, $T_n = I^{J_{1,n}} \times \dots \times I^{J_{n,1}}$, и $\Phi^{(n)} = \bigcup_{k=1}^n \sigma_n(\Phi_k)$.

Тогда устанавливается (подобно тому, как и выше) существование такого непустого открытого множества $V_{n+1} \subset U_n$, что для каждого $u \in \Phi^{(n)}$ имеется $y_u \in K$ такое, что

$$|f(x)(y_u) - u(\varphi_1(y_u), \dots, \varphi_n(y_u))| > \frac{\varepsilon}{2}$$

при любом $x \in V_{n+1}$. Игрок β выбирает теперь это открытое множество V_{n+1} вместе с конечным подмножеством $F_{n+1} = \{y_u : u \in \Phi^{(n)}\} \cup F_n$ в K . Игрок α , в свою очередь, выбирает открытое $U_{n+1} \subset V_{n+1}$ и $\mathcal{H}$ -счетно-определенное $A_{n+1} \supset A_n$ и т.д.

По условию игрок β не имеет выигрышной стратегии, поэтому игрок α может так выбирать пары (U_n, A_n) , что выиграет. В таком случае, существует точка

$$x_0 \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right) \cap \left(\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \right).$$

Положим $E_n = f(A_n)$, $J_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_{n,k}$, $n = 1, 2, \dots$, и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Множество E является $\mathcal{H}$ -счетно-определенным в $C_p(K)$, поэтому имеется ранее описанное отображение $g_E : K \rightarrow C_p(E)$; в качестве соответствующего гомеоморфизма ξ_E можно взять следующее отображение:

$$\xi_E(z) = (\varphi_1(y_z), \varphi_2(y_z), \dots) \in \Sigma(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots) \subset I^{\Gamma_1} \times I^{\Gamma_2} \times \dots, \quad z \in g_E(K),$$

где $y_z \in K$ такова, что $z = g_E(y_z)$. Отображение $\varphi_E = \xi_E \circ g_E$ обозначим через φ .

Семейство функций $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} C(T_n)$ разделяет точки компакта $T = I^{J_1} \times I^{J_2} \times \dots$. Действительно, если t_1, t_2 – различные точки из T , то существует такой номер n , что $\bar{t}_1 \neq \bar{t}_2$ (если $\bar{t}_1 = \text{pr}_n t_1$, $\bar{t}_2 = \text{pr}_n t_2$, где pr_n – естественная проекция T на T_n); в таком случае, существует функция $u \in C(T_n)$, которая принимает различные значения в точках $\bar{t}_1, \bar{t}_2$. Тогда функция u (рассматриваемая теперь как элемент из $C(T)$) в точках t_1 и t_2 будет принимать различные значения. Так как семейство $\mathcal{F}$ образует подалгебру функций в $C(T)$ и содержит постоянные, то $\mathcal{F}$ всюду плотно в $C(T)$; тогда семейство $\Phi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi^{(n)}$ также всюду плотно в $C(T)$.

Если для $y_1, y_2 \in K$ выполняется равенство $h(y_1) = h(y_2)$ при любом $h \in E$, то, очевидно, выполняется равенство $(f(x_0))(y_1) = (f(x_0))(y_2)$; это влечет существование такой функции $u_0 \in C(\varphi(K))$, что $(f(x_0))(y) = u_0(\varphi(y))$, $y \in K$ (естественно, $\varphi(K)$ наделяется топологией, индуцированной из пространства $I^{\Gamma_1} \times I^{\Gamma_2} \times \dots$). Пусть

$$L = \{y \in K : s(\varphi_n(y)) \subset J_n, n \in \mathbb{N}\}$$

и $M = \varphi(L)$; множество M является компактным подмножеством в $\varphi(K)$. Через $\tilde{u}$ будем обозначать сужение на M функции u , определенной на $\varphi(K)$ или на $I^{\Gamma_1} \times I^{\Gamma_2} \times \dots$. Семейство $\tilde{\Phi} = \{\tilde{u} : u \in \Phi\}$, очевидно, всюду плотно в $C(M)$.

Рассмотрим функцию $\tilde{u}_0$ (u_0 определена выше) и какую-либо функцию $\tilde{u} \in \tilde{\Phi}$. Пусть $u \in \Phi^{(n)}$. Найдется $y_u \in F_{n+1}$ такой, что

$$|(f(x_0))(y_u) - u(\varphi_1(y_u), \dots, \varphi_n(y_u))| > \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Но $\varphi(y_u) \in M$, $(f(x_0))(y_u) = \tilde{u}_0(\varphi(y_u))$ и

$$u(\varphi_1(y_u), \dots, \varphi_n(y_u)) = u(\varphi(y_u)) = \tilde{u}(\varphi(y_u));$$

следовательно, из (1) заключаем: в нормированном пространстве $C(M)$ расстояние между $\tilde{u}_0$ и любым элементом из $\tilde{\Phi}$ не меньше $\varepsilon/2$; это противоречит плотности в $C(M)$ семейства $\tilde{\Phi}$.

Полученное противоречие доказывает, что O_ε всюду плотно в X при любом $\varepsilon > 0$ и, тем самым, тогда (как отмечено в начале доказательства теоремы) устанавливается, что отображение $f: X \rightarrow C(K)$ имеет всюду плотное в X множество точек непрерывности.

Значит действительно, всякое β -неблагоприятное для игры $G_{\text{сд}}$ пространство является пространством Намиоки.

Следующее утверждение усиливает результат, установленный в [6, следствие 11].

СЛЕДСТВИЕ. *Всякое бэровское пространство, содержащее всюду плотное $\mathcal{K}$ -счетно-определенное множество (в частности, всякое сепарабельное бэровское пространство), является пространством Намиоки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – бэрдовское пространство и A – всюду плотное в X $\mathcal{H}$ -счетно-определенное множество. Рассмотрим игру G_{cd} на X . Пусть t – стратегия игрока β в этой игре, и пусть игрок α на n шаге, выбирая пару (U_n, A_n) , берет $A_n = A$, $n = 1, 2, \dots$.

Пусть s – такая стратегия игрока β в игре G (игра G описана в начале доказательства теоремы), что если в игре G_{cd} $V_{n+1} = t((U_1, A), \dots, (U_n, A))$, то $s(U_1, \dots, U_n) = V_{n+1}$. Так как X бэрдовское, то X β -неблагоприятно для G (см. [4, п. 2.3], либо [7, теорема 2]), поэтому игрок α может так выбирать множества $U_1, U_2, \dots$ в игре G , что выиграет в этой игре. В таком случае существует $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$; при этом $x_0 \in \overline{A}$ (и, значит, $x_0 \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$). Таким образом, если игрок β следует стратегии t , то игрок α может выиграть и в G_{cd} ; следовательно, X является β -неблагоприятным для G_{cd} и согласно теореме X – пространство Намиоки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Rogers C. A., Jayne J. E. K -analytic sets // Analytic Sets. New York–London: Academic Press, 1980. P. 1–181.
- [2] Talagrand M. Espaces de Banach faiblement $\mathcal{H}$ -analytiques // Ann. of Math. 1979. V. 110. P. 407–438.
- [3] Deville R., Godefroy G., Zizler V. Smoothness and Renormings in Banach Spaces. Pitman Monographs and Surveys. V. 64: Longman Sci. Tech., 1993.
- [4] Mercourakis S., Negrepontis S. Banach spaces and topology, II // Recent Progress in General Topology, 1992. P. 493–536.
- [5] Debs G. Pointwise and uniform convergence on a Corson compact space // Topology Appl. 1986. V. 23. P. 299–303.
- [6] Debs G. Points de continuité d'une fonction séparément continue // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. V. 97. № 1. P. 167–176.
- [7] Saint-Raymond J. Jeux topologiques et espaces de Namioka // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. V. 87. № 3. P. 499–504.

Тульский государственный педагогический университет

Поступило
14.07.2001