Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Лернер, О сильных максимальных функциях Харди–Литтлвуда и Феффермана–Стейна, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 458–460

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1850>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:15:04

О СИЛЬНЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА И ФЕФФЕРМАНА–СТЕЙНА

А. К. Лернер

Интервалом в $\mathbb{R}^N$ будем называть множество вида

$$I = \{x : a_i < x_i < a_i + h_i, i = 1, \dots, N\} \quad (h_i > 0),$$

если $h_1 = \dots = h_N$, то интервал I называем кубом.

Пусть $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Для произвольного интервала $I \subset \mathbb{R}^N$ обозначим

$$\Omega(f; I) = \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| dx, \quad f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt.$$

Равенствами

$$M_s f(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y)| dy, \quad (1)$$

$$f_s^\#(x) = \sup_{I \ni x} \Omega(f; I) \quad (2)$$

определяются сильные максимальные функции Харди–Литтлвуда и Феффермана–Стейна соответственно (верхняя грань берется по всем интервалам $I \subset \mathbb{R}^N$, содержащим точку x). Если в (1) и (2) брать верхнюю грань только по кубам, содержащим точку x , то получим обычные максимальные функции $Mf(x)$, $f^\#(x)$ (см. [1], [2]).

Ясно, что $f_s^\#(x) \leq 2M_s f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$. Вместе с тем справедлива следующая

ТЕОРЕМА ФЕФФЕРМАНА–СТЕЙНА [2]. Если $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^N)$ и $f^\#(x) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ($1 < p < \infty$, $1 \leq p_0 \leq p$), то $Mf(x) \in L^p$, причем

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f^\#\|_p. \quad (3)$$

Поскольку оператор $M_s f$ ограничен в $L^p(\mathbb{R}^N)$ ($1 < p < \infty$) [3, с. 460], то неравенство (3) справедливо и для сильных максимальных функций.

Невозрастающей перестановкой измеримой на $\mathbb{R}^N$ функции f называется невозрастающая на $(0, +\infty)$ функция $f^*(t)$, равноизмеримая с $|f(x)|$ [4, с. 39]. Нетрудно видеть, что если функция f конечна п.в. и для некоторого $t_0 \in (0, +\infty)$ $f^*(t_0) < \infty$, то для всех $t \in (0, +\infty)$ $f^*(t) < \infty$. В дальнейшем через C будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от размерности N . Полагаем также

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(\tau) d\tau, \quad 0 < t < \infty.$$

В работах [5] и [6], по существу, были доказаны следующие неравенства: если $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, то

$$f^{**}(t) \leq c(f^\#)^*(t) + f^*(t), \quad 0 < t < \infty, \quad (4)$$

и

$$(Mf)^*(t) \leq c(f^\#)^*(2t) + (Mf)^*(2t), \quad 0 < t < \infty. \quad (5)$$

Из неравенства (5) следует (3) (см. [6]).

В данной заметке устанавливается оценка перестановки функции $M_s f(x)$ через перестановку $f_s^\#(x)$. При доказательстве будем использовать легко проверяемые свойства средних колебаний $\Omega(f; I)$: для всех $I \subset \mathbb{R}^N$

$$\Omega(|f|; I) \leq 2\Omega(f; I), \quad (6)$$

$$\Omega(\max(f, 0); I) \leq \Omega(f; I). \quad (7)$$

Основным результатом заметки является следующая

ТЕОРЕМА. Для любой функции $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ справедливо неравенство

$$(M_s f)^*(t) \leq c(f_s^\#)^*(t/2) + f^*(2t), \quad 0 < t < \infty. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства (6) можно считать, что $f \geq 0$. Пусть $\lambda > 0$ и I – такой интервал, что $(1/|I|) \int_I f(x) dx > \lambda$.

Если $\Omega(f; I) > \lambda/4$, то $I \subset \{x : f_s^\#(x) > \lambda/4\}$. Пусть $\Omega(f; I) \leq \lambda/4$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} \left| \left\{ x \in I : f(x) \leq \frac{\lambda}{2} \right\} \right| &\leq \int_{\{x \in I : f(x) \leq \lambda/2\}} |f(x) - f_I| dx \\ &\leq \int_I |f(x) - f_I| dx \leq \frac{\lambda}{4} |I|. \end{aligned}$$

Отсюда $|\{x \in I : f(x) \leq \lambda/2\}| \leq |I|/2$ и, следовательно, $|\{x \in I : f(x) > \lambda/2\}| \geq |I|/2$. Значит, $I \subset \{x : M_s \chi_{E_\lambda}(x) \geq 1/2\}$, где $E_\lambda = \{x : f(x) > \lambda/2\}$. Таким образом, мы доказали, что

$$\{x : M_s f(x) > \lambda\} \subset \left\{ x : f_s^\#(x) > \frac{\lambda}{4} \right\} \cup \left\{ x : M_s \chi_{E_\lambda}(x) \geq \frac{1}{2} \right\}, \quad \lambda > 0. \quad (9)$$

Будем предполагать, что правая часть (8) конечна, поскольку в противном случае нечего доказывать. Согласно неравенству слабого типа для $M_s f$ [7]

$$\left| \left\{ x : M_s \chi_{E_\lambda}(x) \geq \frac{1}{2} \right\} \right| \leq c_N |E_\lambda|. \quad (10)$$

Пусть $t > 0$. Положим $\lambda_t = \max(4(f_s^\#)^*(t/2), 2f^*(t/2c_N))$. Из (9) и (10) получаем $|\{x : M_s f(x) > \lambda_t\}| \leq t$. Следовательно,

$$(M_s f)^*(t) \leq \max(4(f_s^\#)^*(t/2), 2f^*(t/2c_N)), \quad t > 0.$$

Теперь доказательство теоремы завершаем стандартным путем. Обозначим

$$E = \{x : f(x) > f^*(2t)\}, \quad g(x) = (f(x) - f^*(2t)) \chi_E(x).$$

Легко видеть, что $\|g\|_1 = 2t(f^{**}(2t) - f^*(2t))$. Согласно неравенству (7) $\Omega(g; I) \leq \Omega(f - f^*(2t); I) = \Omega(f; I)$ для любого I . Значит, $(g_s^\#)^*(t/2) \leq (f_s^\#)^*(t/2)$. С другой стороны, из неравенства (4) вытекает, что

$$g^*(t/2c_N) \leq c\|g\|_1/t \leq c(f^{**}(2t) - f^*(2t)) \leq c(f^\#)^*(2t).$$

Используя (8), имеем $(M_sg)^*(t) \leq c(f_s^\#)^*(t/2)$. Отсюда

$$(M_sf)^*(t) \leq (M_sg)^*(t) + f^*(2t) \leq c(f_s^\#)^*(t/2) + f^*(2t).$$

Теорема доказана.

Автор благодарен В. И. Коляде, под руководством которого выполнена данная работа.

Одесский государственный университет

Поступило
14.03.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. // Acta Math. 1930. V. 54. P. 81–116.
2. Fefferman C., Stein E. M. // Acta Math. 1972. V. 129. P. 137–193.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
4. Bennett C., Sharpley R. Interpolation of operators. N. Y.: Acad. Press, 1988.
5. Bennett C., DeVore R., Sharpley R. // Ann. of Math. 1981. V. 113. P. 601–611.
6. DeVore R., Sharpley R. Maximal functions measuring smoothness // Mem. Amer. Math. Soc.. V. 47. № 293, 1984.
7. Cordoba A., Fefferman R. // Ann. of Math. 1975. V. 102. P. 95–101.