Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Р. Мамедов, О полноте и минимальности половины собственных функций, отвечающих бигармоническому уравнению в полуполосе, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 460–462

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1851>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:25:04

О ПОЛНОТЕ И МИНИМАЛЬНОСТИ ПОЛОВИНЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ БИГАРМОНИЧЕСКОМУ УРАВНЕНИЮ В ПОЛУПОЛОСЕ

Х. Р. Мамедов

Рассмотрим уравнение установившихся колебаний упругой пластинки

$$\Delta^2 u(x, y) - \rho \omega^2 u(x, y) = 0 \quad (1)$$

в полуполосе $Q = \{x, y \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < \infty\}$ с краевыми условиями защепления на сторонах полуполосы

$$u(0, y) = u'_x(0, y) = u(1, y) = u'_x(1, y) = 0 \quad (2)$$

и начальными условиями

$$u''_y(x, 0) = \varphi(x), \quad u'''_y(x, 0) = \psi(x), \quad (3)$$

где $\varphi(x) \in W_{2,U}^{3/2}$, $\psi \in W_{2,U}^{1/2}$.

Здесь ρ – плотность пластинки, ω – частота упругой силы (в статическом случае $\omega = 0$), а $W_{2,U}^\theta$ – замыкание по норме соболевского пространства $W_2^\theta[0, 1]$ ($0 \leq \theta \leq 4$) всех функций из $W_2^4[0, 1]$, удовлетворяющих краевым условиям (2).

Целью этой заметки является показать возможность решения этой задачи с помощью разложения по собственным функциям. Различные вопросы, связанные с уравнением (1), изучались во многих работах, близкие по постановке проблемы изучались в работах [1]–[8].

Разделив переменные $u(x, y) = v(x)e^{i\lambda y}$, перейдем к спектральной задаче

$$\lambda^4 v - 2\lambda v'' + v^{(4)} - \omega^2 v = 0, \quad (4)$$

$$v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0. \quad (5)$$

Для простоты, далее, предположим, что все вещественные собственные значения задачи (4), (5) простые, т.е. ω не является резонансной частотой. Отметим, что в статическом случае $\omega = 0$ вещественные собственные значения отсутствуют вовсе. При $\omega > 0$ на вещественной оси находится не более конечного числа собственных значений (см. [7, §9]). Пусть $\{\lambda_k^+\}_1^N$ – положительные собственные значения, а $v_k^+(x)$ – собственные функции задачи (4), (5). Обозначим через M_+ конечномерное подпространство, состоящее из незатухающих по y элементарных решений вида $u_k^+(x)e^{i\lambda_k^+ y}$.

ТЕОРЕМА 1. *Задача (1)–(3) имеет, причем единственное, решение $u(x, y) \in W^4(Q)$, представимое в виде*

$$u(x, y) = u_0(x, y) + u^+(x, y),$$

где $u_0(x, y)$ убывает по y экспоненциально, а $u^+(x, y) \in M_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно результатам §8 работы [1] достаточно доказать существование и единственность убывающего решения задачи (1)–(3) при $\omega = 0$, когда вещественные собственные значения задачи (4), (5) отсутствуют. Далее, повторив прием, примененный в предложении 9.3 работы [7], сведем доказательство к оценке

$$|||u(x, y)||| \leq C(\|u_x^{(4)}(x, y)\| + \|u_y^{(4)}(x, y)\|) + C_1\|u(x, y)\|, \quad (6)$$

где $||| \cdot |||$ – норма в $W_2^4(Q)$, $\| \cdot \|$ – норма в $L_2(Q)$, а оценка предполагается выполненной для функций $u \in W_2^4(Q)$, удовлетворяющих краевым условиям (2) и нулевым начальным условиям $u_y''(x, 0) = u_y'''(x, 0) = 0$.

Согласно теореме 9.1 работы [7] оценки (6) при $\omega = 0$ выполнены в том и только том случае, когда нули вспомогательных задач В. А. Кондратьева, построенных для задачи (1), (3) в угловых точках полуполосы Q не имеют нулей на прямой $\text{Im } \sigma = 3$ в комплексной σ -плоскости (см. [9, §9]). Угловые точки Q для рассматриваемой задачи симметричны, поэтому для доказательства теоремы остается доказать следующий результат.

ЛЕММА. *Нули вспомогательной спектральной задачи В. А. Кондратьева, отвечающей угловой точке $(0, 0)$ задачи (1)–(3), не имеют собственных значений на прямой $\text{Im } \sigma = 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко убедиться, что вспомогательная задача В. А. Кондратьева для (1)–(3), отвечающая угловой точке $(0, 0)$, имеет вид (см. [8])

$$\begin{aligned} (\sigma^4 - 4i\sigma^3 - 4\sigma^2)\tilde{u} + (4 + 4i\sigma - 2\sigma^2)\tilde{u}'' + \tilde{u}^{(4)} &= 0, \\ \begin{cases} \tilde{u}(0) = 0, \\ \tilde{u}'(0) = 0, \end{cases} &\quad \begin{cases} \tilde{u}''(\pi/2) - i\sigma\tilde{u}(\pi/2) = 0, \\ \tilde{u}'''(\pi/2) - i\sigma\tilde{u}'(\pi/2) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Положив $z = i\sigma + 1$, можно явно вычислить характеристический определитель указанной задачи, а именно

$$\Delta(\sigma) = (z - 1) \left[-2z^5 - 10z^4 - 20z^3 - 40z^2 - 2z + 2 - 2(z^5 - z^4 - 6z^3 - 4z^2 + 9z - 3) \sin^2 \frac{z\pi}{2} \right].$$

Положим $\sigma = b + 3i$ и обозначим через $T(b)$ выражение в квадратных скобках, получающееся после подстановки $z = -2 + ib$. Легко убедиться, что

$$T(b) = T_1(b) + iT_2(b) = 10b^4 - 90 + c(b)(-11b^4 + 72b^2 - 37) + i(-2b^5 + 20b^3 + 78b + c(b)(b^5 - 42b^3 + 65b)),$$

где $c(b) = -1 + \operatorname{ch} b\pi$.

Равенство $T(b) = 0$ при $b \in \mathbb{R}$ влечет

$$(10b^4 - 90)(b^4 - 42b + 65) = -(11b^4 + 72b^2 - 37)(-2b^4 + 20b^2 + 78).$$

Но последнее уравнение эквивалентно

$$3b^8 + 14b^6 + 24b^4 + 274b^2 + 741 = 0,$$

которое вещественных корней не имеет.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Λ^+ — множество собственных значений задачи (4), (5), лежащих в открытой верхней полуплоскости и вещественных положительных. Тогда система производных по М. В. Келдышу цепочек

$$\hat{v}_k^+ = (v_k, \lambda_k, v_k), \quad \lambda_k \in \Lambda^+,$$

отвечающих половине собственных функций, образует полную и минимальную систему в пространстве $W_{2,U}^{3/2} \times W_{2,U}^{1/2}$.

Доказательство получается применением теоремы 1, а также теорем 8.6 и 8.7 работы [7].

ЗАМЕЧАНИЕ. Учитывая предложение 9.3 из [7] и теорему 2 с помощью теоремы интерполяции получим полноту и минимальность системы $\{v_k^+\}$ в пространствах $W_{2,u}^{\theta+1} \times W_{2,u}^\theta$ при $1/2 \leq \theta \leq 5/2$.

В заключение автор благодарит профессора А. А. Шкаликова за постановку задачи и ценные замечания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29.04.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ворович И. И. // Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Вып. 3. М.: Наука, 1966. С. 116–136.
2. Ворович И. И., Ковальчук В. Е. // ПММ. 1967. Т. 31. № 5. С. 861–869.
3. Ковальчук В. Е. // ПММ. 1969. Т. 33. № 3. С. 511–518.
4. Устинов Ю. А., Юдович Ю. И. // ПММ. 1973. Т. 73. № 4. С. 706–714.
5. Шкаликов А. А. // Неклассические задачи уравнений математической физики. Новосибирск, 1982. С. 171–174.
6. Шкаликов А. А. // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.
7. Шкаликов А. А. // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1989. Т. 41. С. 140–224.
8. Гомилко А. М., Милешко В. А. // Изв. АН СССР. Механика тв. тела. 1986. № 4. С. 48–53.