Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, О. Ю. Шведов, Приближенные несимметричные решения многочастичных уравнений и некоторые тождества для матрицы плотности, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 463–467

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1852>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:06:05

ПРИБЛИЖЕННЫЕ НЕСИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОЧАСТИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ

В. П. Маслов, О. Ю. Шведов

В работах [1]–[4] рассмотрено построение аппроксимаций при $N \rightarrow \infty$ для симметричных функций N аргументов по норме пространства $L^2(X^N)$, где X – пространство с мерой. В частности, в работе [1] построены приближенные спектральные серии

$$E^{(\nu)} = N\mathcal{E}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \nu_k + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \dots), \quad \nu_k \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad (1)$$

N -частичного оператора Шрёдингера H_N , действующего в $L^2(X^N)$.

Аналогичным образом можно построить [3] приближенные стационарные решения многочастичного уравнения Вигнера

$$[H_N, \rho] = \lambda \rho, \quad (2)$$

где ρ – оператор в $L^2(X^N)$. Уравнение (2) имеет приближенные решения $\rho^{(\mu\nu)}$ вида

$$\rho^{(\mu\nu)} f = \psi^{(\mu)}(\psi^{(\nu)}, f), \quad f \in L^2(X),$$

где $\psi^{(\mu)}, \psi^{(\nu)}$ – асимптотические собственные функции оператора H_N , отвечающие собственным значениям $E^{(\mu)}, E^{(\nu)}$. Величина λ имеет вид

$$\lambda^{(\mu\nu)} = E^{(\mu)} - E^{(\nu)} + O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (3)$$

Оказывается, что метод работы [3] дает, помимо спектра (3), другие асимптотические собственные значения задачи (2). В этой работе мы покажем, что они выражаются через приближенные собственные значения оператора H_N , которым отвечают собственные функции, не являющиеся симметричными по всем N аргументам. Мы найдем также связь собственных векторов задачи (2) и оператора H_N .

Не ограничивая общности, будем считать $X = \mathbb{N}$. Напомним результат [1]. Рассмотрим оператор H_N вида

$$(H_N \psi)_{I_1 \dots I_N} = \sum_{k=0}^L N^{1-k} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} \sum_{J_{i_1}, \dots, J_{i_k}=1}^{\infty} H_{I_{i_1} \dots I_{i_k}; J_{i_1} \dots J_{i_k}}^{(k)} \psi_{I_1 \dots I_{i_1-1} J_{i_1} I_{i_1+1} \dots I_{i_k-1} J_{i_k} I_{i_k+1} \dots I_N}, \quad (4)$$

где $I_1, \dots, I_N = \overline{1, \infty}$, $\psi: \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $L \in \mathbb{N}$, $\sum_{I_1, \dots, I_N \in \mathbb{N}} |\psi_{I_1 \dots I_N}|^2 < \infty$. Обозначим

$$H(\varphi^*, \varphi) = \sum_{k=0}^L \frac{1}{k!} \sum_{I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_k \in \mathbb{N}} H_{I_1 \dots I_k; J_1 \dots J_k}^{(k)} \varphi_{I_1}^* \dots \varphi_{I_k}^* \varphi_{J_1} \dots \varphi_{J_k},$$

$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Спектральные серии оператора H_N отвечают решениям уравнения типа Хартри

$$\Omega \varphi_I = \frac{\partial H}{\partial \varphi_I^*}. \quad (5)$$

Асимптотические собственные значения H_N выражаются через спектр системы в вариациях

$$\begin{aligned} (\beta_l + \Omega) G_{Ml} &= \sum_{J=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_M \partial \varphi_J^*} G_{Jl} + \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_M \partial \varphi_J} F_{Jl} \right), \\ -(\beta_l - \Omega) F_{Ml} &= \sum_{J=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_M^* \partial \varphi_J^*} G_{Jl} + \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_M^* \partial \varphi_J} F_{Jl} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть $\beta_l, F_{Ml}, G_{Ml}, l = \overline{0, \infty}$, – решение системы (6), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} F^T G &= G^T F, \quad F_{M0} = -\varphi_M, \quad G_{M0} = \varphi_M^*, \\ \sum_{M=1}^{\infty} (G_{M\alpha}^* G_{M\beta} - F_{M\alpha}^* F_{M\beta}) &= \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = \overline{1, \infty}, \end{aligned}$$

матрица G обратима, ряд $\sum_{M \in \mathbb{N}} \sum_{l=0}^{\infty} |F_{Ml}|^2$ сходится. Обозначим

$$\begin{aligned} R_{IJ} &= (FG^{-1})_{IJ}, \quad M_{IJ} = R_{IJ} + \varphi_I \varphi_J, \\ \mathcal{E}_0 &= H(\varphi^*, \varphi) + \frac{1}{2N} \sum_{I, J=1}^{\infty} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi_I \partial \varphi_J} R_{IJ}, \end{aligned}$$

$$\psi_{I_1 \dots I_N}^{(0)N} = \sum_{l=0}^{[N/2]} \frac{1}{(2N)^l l!} \sum_{1 \leq i_1 \neq \dots \neq i_{2l} \leq N} M_{I_{i_1} I_{i_2}} \dots M_{I_{i_{2l-1}} I_{i_{2l}}} \prod_{\substack{i \neq i_s \\ s=1, 2l}} \varphi_{I_i}.$$

Рассмотрим операторы $A_{\alpha}^+, \alpha = \overline{1, \infty}$, вида

$$(A_{\alpha}^+ \psi)_{I_1 \dots I_N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N T_{I_i J_i}^{\alpha} \psi_{I_1 \dots I_{i-1} J_i I_{i+1} \dots I_N},$$

где

$$T_{IJ}^{\alpha} = \left(G_{I\alpha}^* - \varphi_I \sum_{P=1}^{\infty} G_{P\alpha}^* \varphi_P^* \right) \varphi_J^* - \varphi_I \left(F_{J\alpha}^* - \varphi_J^* \sum_{P=1}^{\infty} F_{P\alpha}^* \varphi_P \right).$$

Обозначим

$$\psi^{(\nu)N} = (A_1^+)^{\nu_1} (A_2^+)^{\nu_2} \dots \psi^{(0)N}. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 1. *Выполнено соотношение*

$$\|\psi^{(\nu)N}\|_{L^2} = O(1), \quad \|(H_N - E^{(\nu)})\psi^{(\nu)N}\|_{L^2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Сопоставим оператору ρ его ядро $\rho_{I_1 \dots I_N; J_1 \dots J_N}$, будем обозначать

$$\|\rho\|_{L^2} = \sum_{I_1, \dots, I_N, J_1, \dots, J_N \in \mathbb{N}} |\rho_{I_1 \dots I_N; J_1 \dots J_N}|^2.$$

Оператор в левой части уравнения (2), действующий на ρ , относится к типу (4). Поэтому спектральные серии этого оператора могут быть найдены с помощью теоремы 1.

Обозначим

$$\mathcal{H}(\Phi^*, \Phi) = \sum_{k=0}^L \frac{1}{k!} \sum_{I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_k, L_1, \dots, L_k, M_1, \dots, M_k=1}^{\infty} [H_{I_1 \dots I_k; J_1 \dots J_k}^{(k)} \delta_{L_1 M_1} \dots \delta_{L_k M_k} - H_{M_1 \dots M_k; L_1 \dots L_k}^{(k)} \delta_{I_1 J_1} \dots \delta_{I_k J_k}] \times \Phi_{I_1 L_1}^* \dots \Phi_{I_k L_k}^* \Phi_{J_1 M_1} \dots \Phi_{J_k M_k}, \quad \Phi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (8)$$

ЛЕММА 1. Функция $\Phi_{IJ} = \varphi_I \varphi_J^*$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_{IJ}^*} = 0. \quad (9)$$

Отметим, что уравнение (9) является аналогом уравнения (5), а аналогом системы (6) является система

$$\begin{aligned} \gamma_{lm} \mathcal{Y}_{MKlm} &= \sum_{I, J=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_{MK} \partial \Phi_{IJ}^*} \mathcal{Y}_{IJlm} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_{MK} \partial \Phi_{IJ}} \mathcal{F}_{IJlm} \right), \\ -\gamma_{lm} \mathcal{F}_{MKlm} &= \sum_{I, J=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_{MK}^* \partial \Phi_{IJ}^*} \mathcal{Y}_{IJlm} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_{MK}^* \partial \Phi_{IJ}} \mathcal{F}_{IJlm} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначим через W_{IJ} матрицу вида

$$\begin{aligned} W_{IJ} &= \sum_{k=1}^L \frac{1}{(k-1)!} \sum_{I_1, \dots, I_{k-1}, J_1, \dots, J_{k-1} \in \mathbb{N}} \varphi_{I_1}^* \dots \varphi_{I_{k-1}}^* \\ &\times H_{I_1 \dots I_{k-1}; J_1 \dots J_{k-1}}^{(k)} \varphi_{J_1} \dots \varphi_{J_{k-1}}, \end{aligned}$$

а через $\varepsilon^{(m)}$ и $\chi_J^{(m)}$ — ее собственные значения и собственные функции

$$\sum_{J=1}^{\infty} W_{IJ} \chi_J^{(m)} = \varepsilon^{(m)} \chi_I^{(m)}, \quad m = \overline{0, \infty},$$

причем

$$\chi_J^{(0)} = \varphi_J, \quad \varepsilon^{(0)} = \Omega.$$

ЛЕММА 2. Система (10) имеет решения вида

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{MK\alpha\rho} &= 0, \quad \mathcal{Y}_{MK\alpha\rho} = \chi_M^{(\alpha)*} \chi_K^{(\rho)}, \quad \alpha, \rho = \overline{1, \infty}, \quad \gamma_{\alpha\rho} = \varepsilon^{(\alpha)} - \varepsilon^{(\rho)}, \\ \mathcal{F}_{MK0\rho} &= \varphi_M^* F_{K\rho}^*, \quad \mathcal{Y}_{MK0\rho} = \varphi_M^* G_{K\rho}^*, \quad \gamma_{0\rho} = -\beta_\rho, \\ \mathcal{F}_{MK\alpha 0} &= F_{M\alpha} \varphi_K^*, \quad \mathcal{Y}_{MK\alpha 0} = G_{M\alpha} \varphi_K, \quad \gamma_{\alpha 0} = \beta_\alpha, \\ \mathcal{F}_{MK00} &= -\varphi_M \varphi_K^*, \quad \mathcal{Y}_{MK00} = \varphi_M^* \varphi_K, \quad \gamma_{00} = 0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{I_1 J_1; I_2 J_2} &= M_{I_1 I_2} \varphi_{J_1}^* \varphi_{J_2}^* + \varphi_{I_1} \varphi_{I_2} M_{I_1 I_2}^*, \\ (\mathcal{A}_{mn}^+ \rho)_{I_1 \dots I_N, J_1 \dots J_N} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N L_{I_i J_i; M_i K_i}^{(mn)} \rho_{I_1 \dots M_i \dots I_N; J_1 \dots K_i \dots J_N}, \\ L_{IJ; MK}^{(mn)} &= \left(\mathcal{Y}_{IJmn}^* - \sum_{P, Q=1}^{\infty} \Phi_{IJ} \Phi_{PQ}^* \mathcal{Y}_{PQmn}^* \right) \Phi_{MK}^* \\ &\quad - \Phi_{IJ} \left(\mathcal{F}_{MKmn}^* - \sum_{P, Q=1}^{\infty} \Phi_{MK}^* \Phi_{PQ} \mathcal{F}_{PQmn}^* \right), \\ \nu &= (\nu_1, \nu_2, \dots), \quad \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots), \quad \varkappa = (\varkappa_{11}, \varkappa_{12}, \dots, \varkappa_{21}, \varkappa_{22}, \dots), \\ \rho^{(\mu\nu\varkappa)} &= \prod_{\alpha=1}^{\infty} (\mathcal{A}_{\alpha 0}^+)^{\mu_\alpha} \prod_{\beta=1}^{\infty} (\mathcal{A}_{0\beta}^+)^{\nu_\beta} \prod_{\rho, \sigma=1}^{\infty} (\mathcal{A}_{\rho\sigma}^+)^{\varkappa_{\rho\sigma}} \rho^{(0)},\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\rho_{I_1 \dots I_N; J_1 \dots J_N}^{(0)} &= \sum_{l=0}^{[N/2]} \frac{1}{(2N)^l l!} \sum_{1 \leq i_1 \neq \dots \neq i_{2l} \leq N} \mathcal{M}_{I_{i_1} J_{i_1}; I_{i_2} J_{i_2} \dots} \\ &\quad \times \mathcal{M}_{I_{i_{2l-1}} J_{i_{2l-1}}; I_{i_{2l}} J_{i_{2l}}} \prod_{i \neq i_s} \Phi_{I_i J_i},\end{aligned}\quad (12)$$

$$\lambda^{(\mu\nu\varkappa)} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \beta_\alpha (\mu_\alpha - \nu_\alpha) + \sum_{\rho, \sigma=1}^{\infty} \varkappa_{\rho\sigma} (\varepsilon^{(\rho)} - \varepsilon^{(\sigma)}). \quad (13)$$

Из теоремы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 2. *Выполнено соотношение*

$$\|\rho^{(\mu\nu\varkappa)}\|_{L^2} = O(1), \quad \|[H_N, \rho^{(\mu\nu\varkappa)}] - \lambda^{(\mu\nu\varkappa)} \rho^{(\mu\nu\varkappa)}\|_{L^2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Рассмотрим связь функций (7) и матриц плотности (11).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\varkappa_{\rho\sigma} = 0$, $\rho, \sigma = \overline{1, \infty}$. Тогда*

$$\|\rho^{(\mu\nu 0)} - \rho^{(\mu\nu)}\|_{L^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (14)$$

Отметим, что функции $\rho_{I_1 \dots I_N; J_1 \dots J_N}^{(\mu\nu)}$ обладают свойством симметрии отдельно по $I_1, \dots, I_N$ и отдельно по $J_1, \dots, J_N$. Оказывается, что при $\varkappa \neq 0$ построенные асимптотики таким свойством не обладают.

ЛЕММА 3. *Пусть функция $\rho_{I_1 \dots I_N; J_1 \dots J_N}^{(\mu\nu\varkappa)}$ симметрична отдельно по $I_1, \dots, I_N$ и отдельно по $J_1, \dots, J_N$. Тогда $\varkappa = 0$.*

Таким образом, для построения матрицы плотности ρ при $\varkappa \neq 0$ необходимо использовать несимметричные собственные функции гамильтониана H_N .

Рассмотрим функции вида

$$\psi_{I_1 \dots I_N}^{\{\alpha_1 \dots \alpha_p\}(\mu)} = \chi_{I_1}^{(\alpha_1)} \dots \chi_{I_p}^{(\alpha_p)} \psi_{I_{p+1} \dots I_N}^{(\mu)N-p}, \quad \alpha_j = \overline{1, \infty}. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 4. *Выполнено соотношение*

$$\left\| \psi^{\{\alpha_1 \dots \alpha_p\}}(\mu) \right\|_{L^2} = O(1),$$

$$\left\| \left(H_N - E^{(\mu)} - \sum_{j=1}^p (\varepsilon^{(\alpha_j)} - \Omega) \right) \psi^{\{\alpha_1 \dots \alpha_p\}}(\mu) \right\|_{L^2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Обозначим через P оператор симметризации вида

$$(P\rho)_{I_1 \dots I_N; J_1 \dots J_N} = \frac{1}{N!} \sum_{1 \leq \sigma_1 \neq \dots \neq \sigma_N \leq N} \rho_{I_{\sigma_1} \dots I_{\sigma_N}; J_{\sigma_1} \dots J_{\sigma_N}}.$$

Рассмотрим матрицу плотности

$$\tilde{\rho}_{I_1 \dots I_N; J_1 \dots J_N}^{(\mu\nu\kappa)} = P \psi_{I_1 \dots I_N}^{\{\alpha_1 \dots \alpha_p\}}(\mu) \psi_{J_1 \dots J_N}^{*\{\beta_1 \dots \beta_p\}}(\nu), \quad (16)$$

где κ_{ij} – количество пар (i, j) в наборе из p пар $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_p, \beta_p)$.

ЛЕММА 4. *Справедливы свойства*

$$\left\| \tilde{\rho}^{(\mu\nu\kappa)} \right\|_{L^2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{N^p}}\right),$$

$$\left\| [H_N, \tilde{\rho}^{(\mu\nu\kappa)}] - \lambda^{(\mu\nu\kappa)} \tilde{\rho}^{(\mu\nu\kappa)} \right\|_{L^2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{N^{p+1}}}\right).$$

Оказывается, что матрица плотности (16) после умножения на нормировочный фактор $\sqrt{N^p}/p!$ приближенно совпадает с (11).

ТЕОРЕМА 5. *Выполняется соотношение*

$$\left\| \rho^{(\mu\nu\kappa)} - \frac{\sqrt{N^p}}{p!} \tilde{\rho}^{(\mu\nu\kappa)} \right\|_{L^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом, мы выразили приближенные собственные функции задачи (2) через, вообще говоря, несимметричные асимптотические собственные функции оператора H_N .

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30.04.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маслов В. П., Шведов О. Ю. // ТМФ. 1994. Т. 98. № 2. С. 266–288.
2. Maslov V. P., Shvedov O. Yu. // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. № 2. P. 217–234.
3. Maslov V. P., Shvedov O. Yu. // Russian J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 1. P. 65–80.
4. Maslov V. P., Shvedov O. Yu. Geometric quantization in Fock space // Advances in Soviet Mathematics. Berezin memorial volume. Providence: AMS, 1996.