Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев, А. Аль-Обейд,
Об осцилляционности спектра краевой задачи
на графе, *Матем. заметки*, 1996, том 60, вы-
пуск 3, 468–470

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1853>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:41:25

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИОННОСТИ СПЕКТРА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ

Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев, А. Аль-Обейд

В работе показывается, что осцилляционные спектральные свойства Штурма для задачи

$$-(pu')' + qu = \lambda ru \quad (1)$$

на отрезке при $u(a) = 0 = u(b)$ допускают перенос на случай существенно неоднородной задачи, когда уравнение (1) задается не на интервале (a, b) , а на геометрическом графе (пространственной сети) Γ при условиях

$$u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (2)$$

где $\partial\Gamma$ – множество граничных (тупиковых) вершин Γ .

1. Краевые задачи на графах (пространственных сетях) предметом систематического анализа стали лишь с начала 80-х годов. В первых работах [1]–[3] уравнение вида (1) на графе Γ интерпретировалось в виде набора (системы) обыкновенных скалярных уравнений, каждое из которых задавалось на одном из ребер γ_i графа Γ . При этом условие связи между решениями уравнений на смежных ребрах, примыкающих к одной внутренней вершине, истолковывались как краевые. В качестве таких условий согласования в каждой внутренней вершине a обычно выступают условия непрерывности, т.е. $u_i(a) = u_j(a)$ ($i \neq j$) (здесь $u_i(\cdot)$ – сужение решения на ребро γ_i) и условия баланса вида

$$\sum_i \alpha_i(a) u'_i(a+0) \quad (\alpha_i(a) > 0), \quad (3)$$

где $u'_i(a+0)$ обозначает производную $u_i(\cdot)$ вдоль ребра γ_i в направлении “от a ”. Достаточно глубокая аналогия с классическими скалярными задачами была установлена в результате применения другого подхода [4], [5], при котором уравнение (1) рассматривается в классе скалярнозначных функций, определенных в целом на Γ при естественном условии их непрерывности во всех внутренних вершинах (т.е. в целом на Γ); условия (3) переносятся в определение решения. При таком подходе к определению решения уравнение (1) на Γ превращается в промежуточный объект между скалярным уравнением на отрезке и уравнением второго порядка на многомерной области, что позволяет считать задачу вида (1), (2) аналогом задачи Дирихле. Ниже используется этот скалярный взгляд на задачу (1), (2) на графе; точный смысл используемых понятий см. в [4], [5].

2. Пусть Γ – открытый связный геометрический граф (в дальнейшем – просто граф) из $\mathbb{R}^n$, $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ – набор всех его ребер (прямолинейных интервалов). Как и в [4], [5], через $\partial\Gamma$ обозначается множество граничных, через $J(\Gamma)$ – множество внутренних для Γ вершин (каждая из внутренних вершин принадлежит Γ , причем к ней примыкает не менее двух ребер; каждая граничная вершина графу не принадлежит, т.е. $\partial\Gamma \cap \Gamma = \emptyset$). Подмножество Γ_0 из Γ называется *подграфом* Γ , если оно связно и открыто в топологии на Γ , индуцируемой из $\mathbb{R}^n$.

Всюду, далее, мы предполагаем, что Γ является деревом, т.е. не содержит циклов (подмножеств, гомеоморфных окружности). Это значит, что при выбрасывании из Γ любой точки $x_0 \in \Gamma$ оставшееся множество $\Gamma \setminus \{x_0\}$ распадается на две или более

Работа выполнена в рамках программы “Университеты России”.

компоненты связности, каждая из которых является подграфом Γ . Ниже предполагается, что функции $q(\cdot)$, $r(\cdot)$ и $p'(\cdot)$ равномерно непрерывны на каждом ребре γ_i , причем $p(\cdot)$ и $r(\cdot)$ имеют строго положительные нижние грани.

Для описания основного результата нам потребуется понятие общности положения графа Γ для уравнения (1). Для всякой внутренней вершины $a \in J(\Gamma)$ и любого примыкающего к этой вершине ребра γ_i обозначим через $\Gamma_i(a)$ подграф Γ , являющийся компонентой связности множества $\Gamma \setminus \{a\}$ и содержащий γ_i . Обозначим через $\Lambda_i(a)$ спектр задачи

$$\begin{aligned} -(pu')' + qu &= \lambda ru \quad (x \in \Gamma_i(a)), \\ u|_{\partial\Gamma_i(a)} &= 0. \end{aligned}$$

Скажем, что граф Γ находится в общем положении для уравнения (1), если для любой внутренней вершины a спектры $\Lambda_i(a)$ и $\Lambda_j(a)$ при $i \neq j$ не пересекаются.

ТЕОРЕМА. Пусть Γ находится в общем положении для уравнения (1). Тогда спектр Λ задачи (1), (2) состоит из неограниченной последовательности $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ вещественных простых собственных значений. При этом собственная функция $u_k(\cdot)$, отвечающая собственному значению λ_k , имеет в Γ точно k нулей, в каждом из которых она меняет знак.

3. Поясним доказательство теоремы. Вещественность спектра Λ задачи (1), (2) следует из отсутствия у Γ циклов: индуктивными рассуждениями несложно показывается, что домножением уравнения (1) на константу на каждом ребре γ_i можно преобразовать задачу (1), (2) к эквивалентной так, что в условиях (3) окажется $\alpha_i(a) = p_i(a)$. Последняя задача является самосопряженной в естественном смысле.

Так как замена $\lambda = \mu - \mu_0$ при $\mu_0 > 0$ сдвигает спектр вправо, не меняя заявленных в теореме его свойств, то мы можем считать коэффициент $q(\cdot)$ в уравнении (1) положительным на Γ . Согласно [5] при $q(\cdot) > 0$ оператор $Lu \equiv -(pu')' + qu$ с условиями (2) имеет строго положительную функцию Грина, так что задача (1), (2) оказывается эквивалентной задаче

$$u(x) = \lambda \int_{\Gamma} G(x, s) r(s) u(s) ds \stackrel{\text{def}}{=} \lambda (G_r u)(x) \quad (4)$$

с компактным и сильно положительным (в смысле естественной упорядоченности в $C(\Gamma)$) оператором G_r . Отсюда следует дискретность спектра Λ и простота и строгая положительность минимального по модулю собственного значения λ_0 , а также отсутствие нулей в Γ у соответствующей собственной функции $u_0(\cdot)$.

Пусть $u_k(\cdot)$ — одна из собственных функций задачи (1), (2). Если она хотя бы на одном из ребер γ_i имеет неизолированный или кратный нуль, то $u_k(\cdot) \equiv 0$ на этом γ_i . Поэтому $u_k(a) = 0$ на том из концов γ_i , который является внутренней для Γ вершиной, т.е. лежит в $J(\Gamma)$. Из условия (3) тогда следует, что не менее чем для двух подграфов $\Gamma_{j_1}(a)$, $\Gamma_{j_2}(a)$ сужение $u_k(\cdot)$ нетривиально, т.е. λ_k принадлежит обоим спектрам $\Lambda_{j_1}(a)$, $\Lambda_{j_2}(a)$, что противоречит предположению об общности положения. Таким образом, каждая собственная функция $u_k(\cdot)$ задачи (1), (2) имеет в Γ лишь конечное число нулей и не обращается в нуль на $J(\Gamma)$; каждая из имеющихся в Γ нулевых точек простая, т.е. $u_k(\cdot)$ меняет в нем знак.

Покажем теперь, что каждая точка λ_k спектра Λ является простой и строго положительной. Выбрасывая из Γ все нули $u_k(\cdot)$, обозначим через Γ_0 любую компоненту связности оставшегося множества. Для сужения на Γ_0 задачи (1), (2) функция $u_k(\cdot)$, не имеющая в Γ_0 нулей и равная нулю на $\partial\Gamma_0$, оказывается собственной функцией, являясь собственной функцией и аналогичного (4) оператора, вследствие

чего λ_k является простым и строго положительным собственным значением. Простота λ_k относительно любой другой (подобной Γ_0) компоненты связности означает простоту λ_k и для исходной задачи (1), (2).

Покажем теперь, что $u_k(\cdot)$ имеет в Γ не менее k нулей. При $k = 0$ это свойство очевидно. Предполагая, что $u_{k_0}(\cdot)$ имеет $\nu_0 (> k_0)$ нулей в Γ , и выбрасывая из Γ все эти нулевые точки $u_{k_0}(\cdot)$, обозначим компоненты связности оставшегося множества через $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{\nu_0}$. Так как $\lambda_{k_0+1} > \lambda_{k_0}$, то в каждом из множеств Γ_k ($k = \overline{0, \nu_0}$) собственная функция $u_{k_0+1}(\cdot)$ по теореме сравнения (теорема 8 из [5]) меняет знак, т.е. имеет в Γ различных нулей не менее, чем $\nu_0 + 1 \geq k_0 + 1$. Доказательство того, что таких нулей не более $k_0 + 1$, требует значительно более тонких рассуждений (как и неограниченность Λ), на которых мы здесь не останавливаемся.

Институт математики
Воронежского государственного университета

Поступило
13.12.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nicaise S. // Lecture Notes in Math. V. 1771. N.Y.: Springer Verlag, 1985. P. 532–541.
2. Павлов Б. С., Фадеев М. Д. // ТМФ. 1983. Т. 55. № 2. С. 257–269.
3. Пенкин О. М., Покорный Ю. В., Провоторова Е. Н. Об одной векторной краевой задаче // Краевые задачи. Пермь, 1983. С. 64–70.
4. Покорный Ю. В., Пенкин О. М. // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. № 6. С. 1306–1309.
5. Покорный Ю. В., Пенкин О. М. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 7. С. 1141–1150.