Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, Четная и нечетная простота динамических систем с инвариантной мерой, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 470–473

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1854>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 03:56:25

ЧЕТНАЯ И НЕЧЕТНАЯ ПРОСТОТА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИНВАРИАНТНОЙ МЕРОЙ

В. В. Рыжиков

Динамической системой в заметке называется сохраняющее меру μ действие $\Phi = \{T_g : g \in G\}$ некоторой группы G на пространстве Лебега (X, μ) , $\mu(X) = 1$. Говорим, что мера ν , заданная на декартовом кубе X^n , принадлежит классу $M(n-1, n)$, $n > 2$, если проекции ν на $(n-1)$ -мерные грани куба X^n равны μ^{n-1} . Говорим, что действие Φ обладает свойством $S(n-1, n)$ (или говорим, что действие принадлежит классу $S(n-1, n)$), если μ^n — единственная мера класса $M(n-1, n)$, инвариантная относительно действия $\Phi \otimes \Phi \otimes \dots \otimes \Phi$ (n сомножителей).

Свойства $S(n-1, n)$ рассматривались в работах [1]–[6]. Интерес к ним возник в связи с некоторыми задачами теории джойнингов [3] и исследованием кратного перемешивания (если коммутативная перемешивающая система класса $S(n, n+1)$ перемешивает с кратностью $n-1$, то она перемешивает и с кратностью n , см. [5]). Известно (см. [4], [6]), что

- i) все (четные) свойства $S(2p-1, 2p)$, $p > 1$, эквивалентны между собой;
- ii) свойство $S(3, 4)$ влечет за собой любое из свойств $S(2q, 2q+1)$, $q = 1, 2, \dots$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96–01–00713.

В заметке приводится пример некоммутативного действия Ψ , обладающего свойством $S(2q, 2q + 1)$, но не обладающего свойством $S(2p - 1, 2p)$. В этом случае говорим, что действие Ψ обладает *нечетной тензорной простотой*. Терминология объясняется следующим. Динамической системе Ψ отвечает группа $\hat{\Psi}$ унитарных операторов, действующих на пространстве $L_2(X, \mu)$. Нечетная тензорная простота означает, что $\hat{\Psi}$ не допускает нетривиальных марковских сплетений с четными тензорными степенями системы $\hat{\Psi}$.

Определим действие Ψ . Предварительно отметим, что автоморфизмы группы $X = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \dots$ и сдвиги на X сохраняют меру Хаара μ на X . Для перестановки σ натурального ряда $\mathbb{N}$ определим автоморфизм T_σ группы X равенством $T_\sigma(\{x_i\}) = \{x_{\sigma(i)}\}$. Последовательности $\alpha = \{a_i\} \in X$ сопоставим сдвиг: $S_\alpha(x) = x + \alpha$, где '+' обозначает групповую операцию в X . В качестве Ψ рассмотрим действие, порожденное всевозможными T_σ и $S_\alpha(x)$.

ТЕОРЕМА 1. При $q > 1$ действие Ψ обладает свойствами $S(2q, 2q + 1)$, но не обладает свойствами $S(2q + 1, 2q + 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО случая $q = 1$. $\Psi \notin S(3, 4)$, так как мера η , определенная формулой

$$\eta(A \times B \times C \times D) = \mu^3 \left(\{(a, b, c) : a \in A, b \in B, c \in C, a + b + c \in D\} \right),$$

отлична от μ^4 , инвариантна относительно $\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi \otimes \Psi$ и принадлежит классу $M(3, 4)$.

Покажем, что Ψ не обладает свойством $S(2, 3)$. Пусть мера $\nu \in M(2, 3)$ инвариантна относительно $\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi$:

$$\forall \psi \in \Psi \quad \int \psi \chi_A \otimes \psi \chi_B \otimes \psi \chi_C \, d\nu = \int \chi_A \otimes \chi_B \otimes \chi_C \, d\nu.$$

Отметим свойства действия $\hat{\Psi}$: $S_\alpha \chi_n = -\chi_n$ при $a_n = 1$; $S_\alpha \chi_n = \chi_n$ при $a_n \neq 1$; $\chi_{\sigma(n)}(x) = \chi_n(T_\sigma(x))$. Если $A \cap B \cap C \neq \varnothing$ и $j \in A \cap B \cap C$, то для сдвига S_j , определенного формулой $(S_j(x))_i = x_i + \delta_{i,j}$, имеем

$$\int (\chi_A \otimes \chi_B \otimes \chi_C) \, d\nu = \int (S_j \chi_A \otimes S_j \chi_B \otimes S_j \chi_C) \, d\nu = - \int (\chi_A \otimes \chi_B \otimes \chi_C) \, d\nu = 0.$$

То же самое получим при $j \in A$, когда $j \notin B \cup C$.

Теперь рассмотрим случай, когда $j \notin A$ и $j \in B \cap C$. Найдется перестановка σ , удовлетворяющая условиям:

- a) $\sigma(i) = i$, если $i \in A$;
- b) $\sigma^n(j) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда, учитывая инвариантность меры ν и свойства a), b), получим

$$\begin{aligned} \int (\chi_A \otimes \chi_B \otimes \chi_C) \, d\nu &= \int (T_\sigma \chi_A \otimes T_\sigma \chi_B \otimes T_\sigma \chi_C) \, d\nu \\ &= \int (\chi_A \otimes T_\sigma \chi_B \otimes T_\sigma \chi_C) \, d\nu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left(\chi_A \otimes \sum_{n=1}^N \frac{1}{N} (T_\sigma^n \chi_B \otimes T_\sigma^n \chi_C) \right) \, d\nu = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство вытекает из попарной ортогональности функций

$$Y_n = T_\sigma^n \chi_B \otimes T_\sigma^n \chi_C = \chi_{\sigma^n(B)} \otimes \chi_{\sigma^n(C)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Подводя итог сказанному выше, заключаем, что неравенство $\nu(\chi_A \otimes \chi_B \otimes \chi_C) \neq 0$ может иметь место только в случае $A = B \sqcup C$ (дизъюнктное объединение). Однако, по тем же причинам получим $B = C \sqcup A$, следовательно, $A = (C \sqcup A) \sqcup C = A \sqcup C$, что невозможно. Доказано, что $\nu(\chi_A \otimes \chi_B \otimes \chi_C) = 0$ для всех наборов χ_A, χ_B, χ_C , следовательно, $\nu = \mu^3$. Таким образом, $\Psi \in S(2, 3)$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\Psi \in S(2q, 2q+1)$.

Действие Ψ содержит много поддействий класса $S(2q, 2q+1) \setminus S(3, 4)$. В частности, к ним относится действие счетной подгруппы, порожденной всеми финитными перестановками ($\text{supp}(\sigma)$ – конечное множество) и финитными сдвигами (сдвигами, для которых последовательности $\alpha = \{a_i\}$ финитны).

Действия с минимальным и простым централизатором. Джойнингом пары (Φ, Φ) называется мера ν на $X \times X$, инвариантная относительно $\Phi \otimes \Phi$ и имеющая проекции на сомножители в $X \times X$, совпадающие с μ .

Следуя терминологии [3], действие Φ называем 2-простым, если любой эргодический джойнинг (Φ, Φ) есть мера $\mu \otimes \mu$ или мера вида $(\text{Id} \otimes R)\Delta$, где R – обратимое преобразование, коммутирующее с Φ , а Δ – диагональная мера на $X \times X$. Напомним, что $\Delta(A \times B) = \mu(A \cap B)$. Действие Φ называется n -простым, если Φ является 2-простым и принадлежит классу $\bigcap_{m=3}^n S(m-1, m)$.

Если все эргодические джойнинги пары (Φ, Φ) есть $\mu \otimes \mu$ и меры вида $(\text{Id} \otimes T_h)\Delta$, где T_h входит в действие $\Phi = \{T_g : g \in G\}$, а h лежит в центре группы G , говорят, что действие Φ имеет минимальный марковский централизатор. В теории джойнингов принято писать в этом случае $\Phi \in \text{MSJ}(2)$. Обозначим $\text{MSJ}(n) = \text{MSJ}(2) \cap \bigcap_{m=3}^n S(m-1, m)$.

Для $\mathbb{Z}$ -действий выполнено $\text{MSJ}(3) = \text{MSJ}(4)$, для них имеет место также более общий факт: 3-простота влечет за собой n -простоту (см. [1], [4], [6]). Однако, для некоммутативных динамических систем аналогичное утверждение, как будет показано, вообще говоря, неверно.

ТЕОРЕМА 2. 1) Действие Ψ , порожденное всеми автоморфизмами группы $Y = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \dots$ и всеми групповыми сдвигами на Y , принадлежит классу $\text{MSJ}(2)$, но не принадлежит классу $\text{MSJ}(3)$. Действие Φ , порожденное всеми автоморфизмами группы $X = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \dots$ и всеми сдвигами на группе X , принадлежит классу $\text{MSJ}(3) \setminus \text{MSJ}(4)$. Эргодическими джойнингами как (Φ, Φ) так и (Ψ, Ψ) являются только меры Δ и $\mu \otimes \mu$.

2) Классу $\text{MSJ}(3) \setminus \text{MSJ}(4)$ принадлежит действие Φ' , порожденное (бернуллиевским) автоморфизмом T на $\dots \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \dots$ и инволюциями R, S , определенными следующим образом:

$$\begin{aligned} T(x)_i &= x_{i+1}, \\ S(\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots) &= (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_1, x_0, x_2, \dots), \\ R(\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots) &= (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1 + x_0, x_2, \dots). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Простота порядка 2, вообще говоря, не влечет простоту порядка 3. Простота порядка 3, вообще говоря, не влечет простоту порядка 4.

Почти простые действия. Марковским оператором $Q: L_2(X, \mu) \rightarrow L_2(X, \mu)$ называется оператор, который переводит неотрицательные функции в неотрицательные, а постоянные функции – в себя, причем сопряженный оператор Q^* также обладает этими свойствами. Будем говорить, что действие Ψ имеет почти простой марковский централизатор $\text{SC}(\Psi)$, если для некоторого $a > 0$ найдется конечный набор марковских операторов $\{Q_i\}$, $Q_i \in \text{SC}(\Psi)$, удовлетворяющих условиям:

$$1) Q_i^* Q_i > aI, Q_i Q_i^* > aI;$$

- 2) каждый марковский оператор $J \neq \Theta$, коммутирующий с действием Ψ , имеет вид

$$J = a\Theta + \sum_i a_i Q_i \int_{C(\Psi)} R d\lambda_i(R), \quad a + \sum_i a_i = 1,$$

где Θ обозначает оператор ортопроекции на пространство постоянных функций, R – автоморфизмы из группового централизатора $C(\Psi)$ действия Ψ , а λ_i есть некоторые вероятностные меры на $C(\Psi)$, (I – тождественный оператор).

ТЕОРЕМА 3. *Если централизатор почти простого действия содержит слабо перемешивающий, но не перемешивающий автоморфизм, то это действие принадлежит классу $S(3, 4)$. Для почти простого $\mathbb{Z}^n$ -действия для любого $m \geq 1$ свойство $S(2m, 2m + 1)$ эквивалентно свойству $S(3, 4)$.*

Косые произведения, сохраняющие тензорную простоту. Известно, что перемешивающие групповые расширения сохраняют ряд свойств динамической системы, среди которых – свойство тензорной простоты. Как показано ниже, имеются другие естественные типы расширений, сохраняющие свойства $S(n - 1, n)$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $R: X \times X \rightarrow X \times X$ – косое произведение, заданное равенством $R(x, y) = (S(x), T_{s(x)}(y))$, где T_t – перемешивающий поток и $\int s(x) d\mu(x) = 0$. Пусть R сохраняет меру $\nu = \mu \otimes \mu$ и обладает свойством перемешивания.*

Тогда, а) если S из класса $S(p - 1, p)$, то косое произведение R также принадлежит классу $S(p - 1, p)$, б) если S перемешивает с кратностью k , то R также перемешивает с кратностью k , т.е. при $n_1, n_2, \dots, n_k \rightarrow \infty$ и $|n_i - n_j| \rightarrow \infty$ ($1 \leq i < j \leq k$), выполнено

$$\nu(B_0 \mid R^{n_1} B_1 \cap R^{n_2} B_2 \cap \dots \cap R^{n_k} B_k) \rightarrow \nu(B_0)$$

для любых множеств $B_0, B_1, B_2, \dots, B_k$ положительной ν -меры.

Автор обязан А. М. Стёпину за обсуждение заметки и ценные замечания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: vryz@nw.math.msu.su

Поступило
29.03.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Glasner E., Host B., Rudolph D. // Israel J. Math. 1992. V. 78. P. 131–142.
2. Host B. // Israel J. Math. 1991. V. 76. P. 289–298.
3. del Junco A., Rudolph D. // Ergod. Th. Dynam. Sys. 1987. V. 7. P. 531–557.
4. King J. // Israel J. Math. 1992. V. 80. P. 65–86.
5. Рыжиков В. В. // УМН. 1989. Т. 44. № 1. С. 205–206.
6. Ryzhikov V. V. // J. Dynamical Control Sys. 1996. V. 2. № 1. P. 1–19.