Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Томилин, Кусочно-параболические сплайн-кривые с узлами в вершинах выпуклого четырехугольника, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 3, 474–477

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1855>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 11:41:10

КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ СПЛАЙН-КРИВЫЕ С УЗЛАМИ В ВЕРШИНАХ ВЫПУКЛОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

А. В. Томили

Пусть $Q(\Delta)$ - класс замкнутых кусочно-параболических кривых гладкости C^2 по натуральному параметру без самопересечений с множеством узлов Δ , $\Delta = \{f_1, \dots, f_n\}$, $f_i \in \mathbb{R}^2$, $f_i \neq f_{i+1}$, при $i = \overline{1, n}$, $f_{n+1} = f_1$. Класс $Q(\Delta)$ был рассмотрен в статье [1]. Доказательство существования кривых из $Q(\Delta)$, где Δ - набор вершин неправильного выпуклого четырехугольника, в [1] дано не было и будет изложено здесь. Вопрос о единственности в этом случае остается открытым.

Пусть $f_1 f_2 f_3 f_4$ - выпуклый четырехугольник, $\Delta = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, γ_i - внешний угол при вершине f_i , $h_i = |f_i f_{i+1}|$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_i \in (0, \gamma_i)$, $\alpha_i + \gamma_{i+1} - \alpha_{i+1} < \pi$, $i = \overline{1, 4}$, $f_5 = f_1$, $\alpha_5 = \alpha_1$, $\gamma_5 = \gamma_1$. Набор α однозначно определяет замкнутую кусочно-параболическую кривую $p(\alpha, \Delta)$ гладкости C^1 по натуральному параметру с множеством узлов Δ такую, что угол между касательной к кривой в узле f_i и стороной $f_i f_{i+1}$, отсчитываемый от стороны, равен α_i . Обозначим: $\text{cur}_i(\alpha, \Delta)$, $\text{cur}_i^-(\alpha, \Delta)$ - кривизны кривой $p(\alpha, \Delta)$ в узле f_i справа и слева соответственно $i = \overline{1, 4}$. Кривизны определяются по формулам:

$$\begin{aligned}\text{cur}_i(\alpha, \Delta) &= \frac{1}{2h_i} (\text{ctg } \alpha_i + \text{ctg}(\gamma_{i+1} - \alpha_{i+1}))^2 \sin^3 \alpha_i, \\ \text{cur}_i^-(\alpha, \Delta) &= \frac{1}{2h_{i-1}} (\text{ctg } \alpha_{i-1} + \text{ctg}(\gamma_i - \alpha_i))^2 \sin^3(\gamma_i - \alpha_i).\end{aligned}$$

Существование кривых из $Q(\Delta)$ достаточно доказать с точностью до аффинных преобразований, так как при аффинных преобразованиях гладкость не нарушается и параболы переходят в параболы.

Любой выпуклый четырехугольник можно аффинными преобразованиями привести к виду $f_1^0 f_2^0 f_3^0 f_4^0$:

$$\begin{aligned}\Delta^0 &= \{f_1^0, f_2^0, f_3^0, f_4^0\}, \quad \gamma_1^0 \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right), \quad \gamma_2^0 = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_3^0 \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right), \quad \gamma_4^0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right], \\ h_1^0 &= h_2^0 = 1, \quad h_3^0 \in (0; \sqrt{2}), \quad h_4^0 \in (0; \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Выберем точку f так, что $f_1^0 f_2^0 f_3^0 f$ будет квадратом. Если $f_4^0 = f$, то класс $Q(\Delta^0)$ не пуст и состоит из единственной кривой (это доказано в [1]).

Если $f_4^0 \neq f$, то параметризуем сегмент $f_4^0 f$: $\varphi(t) = (1-t)f_4^0 + tf$, $t \in [0; 1]$, $\varphi: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Для $\Delta(t) = \{f_1^0, f_2^0, f_3^0, \varphi(t)\}$, $t \in [0; 1]$, имеем

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &\in \left[\frac{\pi}{2}; \gamma_1^0\right], \quad \gamma_2(t) = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_3(t) \in \left[\frac{\pi}{2}; \gamma_3^0\right], \quad \gamma_4(t) \in \left[\gamma_4^0; \frac{\pi}{2}\right], \\ h_1(t) &= h_2(t) = 1, \quad h_3(t) \in [a; \sqrt{2}), \quad h_4 \in [a; \sqrt{2}), \quad a = \min\{h_3^0, h_4^0\}.\end{aligned}$$

Положим $\omega_\varepsilon(t) = \{\alpha \mid \alpha_i \in (\varepsilon; \gamma_i(t) - \varepsilon), \alpha_i + \gamma_{i+1} - \alpha_{i+1} < \pi, i = \overline{1, 4}\}$, где ε – малое положительное число, $t \in [0; 1]$;

$$F: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad F(\alpha, t) = (F_1(\alpha, t), F_2(\alpha, t), F_3(\alpha, t), F_4(\alpha, t)),$$

где $F_i(\alpha, t) = \text{cur}_i(\alpha, \Delta(t)) - \text{cur}_i^-(\alpha, \Delta(t))$, $i = \overline{1, 4}$, $t \in [0; 1]$.

ЛЕММА. *Существует постоянная ε_0 , $\varepsilon_0 > 0$, такая, что для любого ε из $(0; \varepsilon_0]$ и для любого t из $[0; 1]$ верно: если $\alpha \in \partial\omega_\varepsilon(t)$, то $F(\alpha, t) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $\alpha_i + \gamma_{i+1}(t) - \alpha_{i+1} = \pi$ для некоторого i , $1 \leq i \leq 4$, и некоторого t , $t \in [0; 1]$, тогда $\text{cur}_i(\alpha, \Delta(t)) = 0$.

С другой стороны,

$$\alpha_i > \pi - \gamma_{i+1}(t), \quad \alpha_{i-1} + \gamma_i(t) - \alpha_i < \gamma_{i-1}(t) + \gamma_i(t) + \gamma_{i+1}(t) - \pi < \pi,$$

откуда следует, что $\text{cur}_i^-(\alpha, \Delta(t)) \neq 0$, $F_i(\alpha, t) \neq 0$, $F(\alpha, t) \neq 0$.

б) Пусть $\alpha_1 = \varepsilon$ для некоторого t , $t \in [0; 1]$. Предположим, что $F(\alpha, t) = 0$. Из предположения, в частности, следует:

$$\begin{aligned} \text{cur}_2(\alpha, t) &= \text{cur}_2^-(\alpha, t), \\ \left(\text{ctg } \alpha_2 + \text{ctg}(\gamma_3(t) - \alpha_3) \right)^2 \sin^3 \alpha_2 &= (\text{ctg } \varepsilon + \text{tg } \alpha_2)^2 \cos^3 \alpha_2, \\ \text{ctg}(\gamma_3(t) - \alpha_3) &= \text{ctg } \alpha_2 (\text{ctg } \varepsilon \text{ctg}^{1/2} \alpha_2 + \text{tg}^{1/2} \alpha_2 - 1), \end{aligned}$$

откуда для достаточно малых ε имеем

$$\text{ctg}(\gamma_3(t) - \alpha_3) > \text{ctg } \alpha_2, \quad \gamma_3(t) - \alpha_3 < \alpha_2, \quad (1)$$

причем выбор ε не зависит от t .

С другой стороны,

$$\text{cur}_1(\alpha, \Delta(t)) = \frac{1}{2}(\text{ctg } \varepsilon + \text{tg } \alpha_2)^2 \sin^3 \varepsilon = \frac{1}{2}(\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \text{tg } \alpha_2)^2 \sin \varepsilon,$$

$\text{cur}_1(\alpha, \Delta(t)) \asymp \varepsilon$ для малых ε (независимо от t).

По предположению $\text{cur}_1(\alpha, \Delta(t)) = \text{cur}_1^-(\alpha, \Delta(t))$, следовательно, для малых ε $\text{cur}_1^-(\alpha, \Delta(t)) \asymp \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \text{cur}_1^-(\alpha, \Delta(t)) &= \frac{1}{2h_4(t)} \left(\text{ctg } \alpha_4 + \text{ctg}(\gamma_1(t) - \varepsilon) \right)^2 \sin^3(\gamma_1(t) - \varepsilon) \\ &= \frac{\sin^2(\alpha_4 + \gamma_1(t) - \varepsilon) \sin(\gamma_1(t) - \varepsilon)}{2h_4(t) \sin^2 \alpha_4}, \end{aligned}$$

откуда получаем для малых ε $\pi - \gamma_1(t) - \alpha_4 = O(\sqrt{\varepsilon})$ и, поскольку $\gamma_4(t) \leq \pi - \gamma_1(t)$, то

$$\gamma_4(t) - \alpha_4 = O(\sqrt{\varepsilon}) \quad \text{для малых } \varepsilon \quad \text{независимо от } t. \quad (2)$$

По предположению $\text{cur}_3(\alpha, \Delta(t)) = \text{cur}_3^-(\alpha, \Delta(t))$:

$$\frac{1}{2h_3(t)} \left(\text{ctg } \alpha_3 + \text{ctg}(\gamma_4(t) - \alpha_4) \right)^2 \sin^3 \alpha_3 = \frac{1}{2} (\text{ctg } \alpha_2 + \text{ctg}(\gamma_3(t) - \alpha_3))^2 \times \sin^3(\gamma_3(t) - \alpha_3),$$

$$\text{ctg } \alpha_2 + \text{ctg}(\gamma_3(t) - \alpha_3) = \frac{1}{\sqrt{h_4(t)}} \left(\text{ctg } \alpha_3 + \text{ctg}(\gamma_4(t) - \alpha_4) \right) \times \left(\frac{\sin \alpha_3}{\sin(\gamma_3(t) - \alpha_3)} \right)^{3/2},$$

$$\sin \alpha_3 = \sin \gamma_3(t) \cos(\gamma_3(t) - \alpha_3) - \cos \gamma_3(t) \sin(\gamma_3(t) - \alpha_3) > \frac{\cos(\gamma_3(t) - \alpha_3)}{\sqrt{2}},$$

$$\text{ctg } \alpha_2 > \frac{\text{ctg}(\gamma_3(t) - \alpha_3)}{\sqrt{2h_3(t)}} \left(\text{ctg } \alpha_3 + \text{ctg}(\gamma_4(t) - \alpha_4) \right) \left(\frac{\sin \alpha_3}{\sin(\gamma_3(t) - \alpha_3)} \right)^{1/2} - \text{ctg}(\gamma_3(t) - \alpha_3).$$

Из последнего неравенства и условия (2) получаем: для малых ε независимо от t $\text{ctg } \alpha_2 > \text{ctg}(\gamma_3(t) - \alpha_3)$, что противоречит неравенствам (1).

Таким образом, в случае б) предположение $F(\alpha, t) = 0$ приводит к противоречию при малых ε .

в) Пусть $\alpha_2 = \varepsilon$ для некоторого t , $t \in [0; 1]$.

Тогда $\text{cur}_2(\alpha, \Delta(t)) \asymp \varepsilon$ для малых ε независимо от t . Предположим, что $\text{cur}_2(\alpha, \Delta(t)) = \text{cur}_2^-(\alpha, \Delta(t))$, получим

$$\text{cur}_2^-(\alpha, \Delta(t)) \asymp \varepsilon, \quad \text{cur}_2^-(\alpha, \Delta(t)) = \frac{1}{2} (\text{ctg } \alpha_1 + \text{tg } \varepsilon)^2 \cos \varepsilon, \\ \text{ctg } \alpha_1 \asymp \sqrt{\varepsilon}, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \asymp \sqrt{\varepsilon} \quad \text{для малых } \varepsilon. \quad (3)$$

Из (3), в частности, следует, что при малых ε $\alpha_1 < \pi/2 - \varepsilon$, а так как

$$\frac{\text{cur}_1(\alpha, \Delta(t))}{\text{cur}_2^-(\alpha, \Delta(t))} = \frac{\sin^3 \alpha_1}{\sin^3(\pi/2 - \varepsilon)},$$

то

$$\text{cur}_1(\alpha, \Delta(t)) < \text{cur}_2^-(\alpha, \Delta(t)). \quad (4)$$

С другой стороны, учитывая, что $\gamma_1(t) - \alpha_1 < \pi/2$, $\alpha_4 < \pi/2$, получаем

$$\text{cur}_1^-(\alpha, \Delta(t)) = \frac{1}{2h_4(t)} \left(\text{ctg } \alpha_4 + \text{ctg}(\gamma_1(t) - \alpha_1) \right)^2 \sin^3(\gamma_1(t) - \alpha_1) \\ > \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos^2(\gamma_1(t) - \alpha_1) \sin(\gamma_1(t) - \alpha_1).$$

При малых ε независимо от t , учитывая (3), имеем

$$\cos(\gamma_1(t) - \alpha_1) > \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin(\gamma_1(t) - \alpha_1) > \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right), \\ \text{cur}_1^-(\alpha, \Delta(t)) > \frac{\sin(\pi/2 - \alpha_1)}{4\sqrt{2}}, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \asymp \sqrt{\varepsilon}. \quad (5)$$

Таким образом, в случае в) предположение $\text{cur}_2(\alpha, \Delta(t)) = \text{cur}_2^-(\alpha, \Delta(t))$ для малых ε влечет, учитывая (4) и (5), $\text{cur}_1(\alpha, \Delta(t)) < \text{cur}_1^-(\alpha, \Delta(t))$, следовательно, $F(\alpha, t) \neq 0$.

Случаи $\gamma_3(t) - \alpha_3 = \varepsilon$, $\alpha_4 = \varepsilon$, $\gamma_4(t) - \alpha_4 = \varepsilon$ доказываются аналогично случаю б).

Случаи $\gamma_1(t) - \alpha_1 = \varepsilon$, $\gamma_2(t) - \alpha_2 = \varepsilon$, $\alpha_3 = \varepsilon$ доказываются аналогично случаю в). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. Для любого выпуклого четырехугольника $f_1 f_2 f_3 f_4$ класс $Q(\Delta)$, $\Delta = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, не пуст.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно принятым обозначениям, достаточно доказать, что существует набор α^0 такой, что $F(\alpha^0, 0) = 0$. В этом случае α^0 определяет кривую из класса $Q(\Delta^0)$, а, значит, класс $Q(\Delta)$ тоже не пуст.

Существование решения уравнения $F(\alpha, 0) = 0$ доказывается посредством теоремы Лере–Шаудера [2].

Действительно, проверим выполнение условий теоремы: $F: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$, F определено на $\overline{\Omega}_\varepsilon$ – замыкании области Ω_ε , где $\Omega_\varepsilon = \{(\alpha, t) \mid \alpha \in \omega_\varepsilon(t), t \in [0; 1]\}$, где ε удовлетворяет утверждению леммы; F – непрерывное отображение на $\overline{\Omega}_\varepsilon$; на границе области Ω_ε , согласно лемме, уравнение $F(\alpha, t) = 0$ не имеет решений; при $t = 1$ уравнение $F(\alpha, 1) = 0$ имеет единственное решение и степень отображения F при $t = 1$ отлична от нуля:

$$\begin{aligned} \deg[F, \omega_\varepsilon(1), 0] &= \sum_{\alpha \in F^{-1}(0) \cap \omega_\varepsilon(1)} \text{sgn}[\det F'(\alpha, 1)] \\ &= \text{sgn}[\det F'(\alpha^1, 1)] = -1, \end{aligned}$$

здесь $\alpha^1 = (\pi/4, \pi/4, \pi/4, \pi/4)$.

Таким образом, все условия теоремы Лере–Шаудера выполнены и уравнение $F(\alpha, t) = 0$ имеет решения для любого t , $t \in [0; 1]$, в частности, для $t = 0$. Теорема доказана.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27.05.96

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Томилин А. В. // Фундам. и прикл. матем. 1996. Т. 1. С. 251–266.
2. Лерэ́й Ж., Шаудер Ю. // УМН. 1946. Т. 1. № 3, 4. С. 71–96.