Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Кабанов, А. А. Махнев, Кореберно регулярные графы без 3-лап, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 4, 495–503

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1857>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:53:39

КОРЕБЕРНО РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ БЕЗ 3-ЛАП

В. В. Кабанов, А. А. Махнев

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $[a]$ ($[a]'$) обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех смежных с a (не смежных с a и отличных от a) вершин. Соответствующий подграф называется *окрестностью* (*антиокрестностью*) вершины a .

Граф Γ называется *регулярным валентности k* , если $[a]$ содержит k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *короберно регулярным с параметрами (v, k, μ)* , если Γ – регулярный граф валентности k на v вершинах, в котором каждая пара a, b несмежных вершин имеет μ общих смежных с ними вершин, т.е. $|[a] \cap [b]| = \mu$.

В данной работе классифицированы короберно регулярные графы, в которых антиокрестности вершин – короберно регулярные графы, с тем же значением параметра μ .

Через (t, n) обозначим полный двудольный граф с долями порядка t и n . Тогда $(t, 1)$ называется *t -лапой*, если $t \geq 2$. В лемме 1 будет доказано, что класс исследуемых нами графов лежит в обширном классе графов без 3-лап. Как следствие основной теоремы в статье получена классификация короберно регулярных графов, не содержащих 3-лап.

Граф на множестве пар $X \times Y$ называется *$t \times n$ -графом*, если $|X| = t$, $|Y| = n$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Граф $t \times n$ называется *прямоугольной решеткой*. При $t = n$ граф Γ называется *решетчатым графом* и обозначается $L_2(t)$. *Треугольным графом $T(t)$* называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = t$ и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны только, если они имеют общий элемент. Короберно регулярный граф с параметрами (v, k, μ) , у которого каждая пара смежных вершин a, b имеет λ общих смежных с ними вершин, т.е. $|[a] \cap [b]| = \lambda$, называется

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 93–01–01529 и № 94–01–00802а.

сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) . Пусть A, B и C – множества. Будем говорить, что B и C расщепляют A , если $A \subseteq B \cup C$ и $B \cap C$ не содержит элементов из A . Далее подграф из Γ будет означать индуцированный подграф. Под α -расширением графа Γ будем понимать граф, полученный заменой каждой вершины a из Γ на полный подграф (a) , содержащий α вершин (такой подграф называется α -кликкой), причем вершины из (a) и (b) смежны тогда и только тогда, когда a и b смежны в Γ .

ТЕОРЕМА. Пусть Γ – кореберно регулярный граф, в котором антиокрестность любой вершины является кореберно регулярным графом с тем же значением параметра μ . Тогда Γ является α -расширением ($\alpha \geq 1$) одного из следующих графов:

- (1) вполне несвязного графа с числом вершин t ($t \neq 2$);
- (2) прямоугольной решетки $t \times n$ при $t \geq 3$, $n \geq 3$ или треугольного графа $T(t)$ при $t \geq 6$;
- (3) графа Шлефли (сильно регулярного графа с параметрами $(27, 16, 10, 8)$, являющегося дополнительным графом к точечному графу обобщенного четырехугольника $GQ(2, 4)$).

СЛЕДСТВИЕ. Koreберно регулярный граф без 3-лап является либо дополнительным графом к регулярному графу без треугольников, либо графом из заключения теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ – кореберно регулярный граф, не являющийся дополнительным графом к регулярному графу без треугольников. Тогда для любой вершины a из Γ существуют несмежные вершины из $[a]'$ и для любой пары несмежных вершин b, c из $[a]'$ верно включение $[b] \cap [c] \subset [a]'$. В противном случае существует вершина d из $[a] \cap [b] \cap [c]$ и подграф на множестве $\{a, b, c, d\}$ является 3-лапой в Γ , что противоречит условию следствия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть Γ – кореберно регулярный граф, который является контрпримером к теореме и имеет наименьшее число вершин. Если Γ не содержит несмежных вершин, то Γ – полный граф, в котором значение μ не определено, но в этом случае антиокрестность любой вершины – пустой граф. Если Γ содержит несмежные вершины и $\mu = 0$, то Γ – объединение t ($t \geq 2$) полных подграфов. В этом случае антиокрестность вершины – объединение $t - 1$ полных подграфов и $t - 1 \geq 2$. Значит, Γ – кореберно регулярный граф с параметрами (v, k, μ) и $\mu > 0$. Если $\mu = k$, то антиокрестность вершины – клика, поэтому $\mu = 0$ и Γ – вполне несвязный граф. Итак, $0 < \mu < k$.

ЛЕММА 1. Если a, b – смежные вершины из Γ , то $[a] \cap [b]'$ и $[a]'$ $\cap$ $[b]$ являются кликами. Более того, Γ не содержит 3-лап.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть c и d – несмежные вершины из $[a] \cap [b]'$. По условию $[c] \cap [d] \subseteq [b]'$. Но это противоречит тому, что $[c] \cap [d]$ содержит вершину a из $[b]$.

Пусть $\Delta = \{a, b, c, d\}$ – 3-лапа из Γ и a – вершина из Δ валентности 3. Тогда $[a] \cap [b]'$ содержит несмежные вершины c и d , что противоречит предыдущему утверждению.

ЛЕММА 2. Пусть a и b – несмежные вершины из Γ .

- (1) Если $c \in [a]' \cap [b]'$, то $[c]$ не пересекает $[a] \cap [b]$.
- (2) Если $w \in [a] \cap [b]$, то $[a] \cap [b]' \cap [w]$ и $[a] \cap [b]' \cap [w]'$ – клики.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $[a] \cap [b] \subset [c]'$, что дает нам утверждение (1). По лемме 1 $[w] \cap [b]'$ и $[a] \cap [w]'$ – клики, что дает нам утверждение (2).

ЛЕММА 3. Если Γ – сильно регулярный граф, то наименьшее собственное значение Γ не может равняться -2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть наименьшее собственное значение графа Γ равно -2 . По теореме Зейделя [1] Γ – треугольный граф $T(m)$, решетчатый граф $L_2(m)$, граф Шрикханде с параметрами графа $L_2(4)$, у которого окрестность любой вершины является шестиугольником, один из трех графов Чанга с параметрами графа $T(8)$, графы Петерсена, Клебша или Шлефли. Но графы Шрикханде и Петерсена содержат 3-лапы. В графе Клебша антиокрестность вершины является 5-кликой. В графах Чанга антиокрестности вершин не являются кореберно регулярными. Остальные графы не противоречат теореме. Лемма доказана.

Для несмежных вершин a и b через $\Lambda_{a,b}$ обозначим подграф $[a]' \cap [b]'$ из Γ , $\beta = |\Lambda_{a,b}|$. Тогда значение β не зависит от выбора несмежных вершин a, b и $\beta = v - 2k + \mu - 2$.

ЛЕММА 4. Если $\Lambda_{a,b}$ – клика, то $\beta = k - 2\mu + 1$ и $\Lambda_{x,y}$ – клика для любых несмежных вершин x, y из Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $e \in \Lambda_{a,b}$, то по лемме 2 $[e]$ содержит по μ вершин из $[a] \cap [b]'$ и $[a]' \cap [b]$, поэтому $k = 2\mu + (\beta - 1)$, т.е. $\beta = k - 2\mu + 1$.

Пусть x, y – несмежные вершины и $z \in \Lambda_{x,y}$. Тогда $[z]$ содержит по μ вершин из $[x] \cap [y]'$ и $[x]' \cap [y]$, а оставшиеся $k - 2\mu$ вершин из $[z]$ лежат в $\Lambda_{x,y}$. Отсюда $\Lambda_{x,y}$ – клика. Лемма доказана.

В леммах 5–14 предполагается, что $\Lambda = \Lambda_{a,b}$ – клика из β вершин и $\beta = k - \mu + 1$. Вершину c из $([a] \cap [b]') \cup ([a]' \cap [b])$ назовем i -точкой для Λ , если $|[c] \cap \Lambda| = i$. Заметим, что если i -точка c для Λ лежит в $[a] \cap [b]'$, то $c^\perp$ не содержит i точек из $[a] \cap [b]'$. В самом деле, $\Lambda_{b,c}$ содержит $\beta - i$ точек из Λ и i точек из $[a] \cap [b]'$.

ЛЕММА 5. Если $c \in [a] \cap [b]'$, а d – смежная с ней вершина из $[a]' \cap [b]$, то $[c] \cap \Lambda = [d] \cap \Lambda$. Более того, $\beta > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 $[c] \cap [a]'$ – клика, поэтому $[d]$ содержит $[c] \cap \Lambda$. Из симметрии $[c]$ содержит $[d] \cap \Lambda$.

Если $\beta = 1$, то $k = 2\mu$ и каждая вершина x из $[a]'$ не смежна с единственной вершиной x^* из $[a]'$, поэтому $[a]'$ – полный многодольный граф с долями порядка 2. Далее, для $e \in \Lambda$ окрестность $[a]$ расщепляется $[a] \cap [b]$ и $[a] \cap [e]$, причем $[a] \cap [b] = [e]' - \{a, b\}$. Отсюда Γ – сильно регулярный граф с $\lambda = \frac{3}{2}\mu - 2$, и наименьшее собственное значение Γ равно -2 . Из леммы 3 получаем противоречие с выбором Γ . Лемма доказана.

Для вершины x графа Γ через $K(x)$ обозначим $\{z \in \Gamma \mid z^\perp = x^\perp\}$.

ЛЕММА 6. Если c есть 0-точка для Λ из $[a] \cap [b]'$, то $c \in K(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть c есть 0-точка для Λ из $[a] \cap [b]'$ – $K(a)$. Тогда $[c]$ не содержит некоторую вершину w из $[a] \cap [b]$. Заметим, что в этом случае $\Lambda_{b,c} = \Lambda$ и w есть 0-точка для Λ из $[b] \cap [c]'$. По лемме 5 $[w] \cap [c] \cap [b]'$ состоит из 0-точек для Λ . Но $c^\perp \cap [b]' = a^\perp \cap [b]'$, поэтому $[w] \cap [a] \cap [b]'$ состоит из 0-точек для Λ .

Если $e \in \Lambda$, то по доказанному $[e] \cap [w]$ содержит μ точек из $[a]' \cap [b]$. Допустив, что $[w]$ не содержит некоторую 0-точку из $[a]' \cap [b]$, мы получили бы, как и выше, что $[w] \cap [a]' \cap [b]$ состоит из 0-точек для Λ . Значит, $[w]$ содержит все 0-точки для Λ из $[a]' \cap [b]$, в частности, по лемме 5 $[w]$ содержит $[a]' \cap [b] \cap [c]$. Но $\Lambda_{c,w} = \Lambda$, поэтому $[a]' \cap [b]$ содержится в $[w]$ и по лемме 1 $[a]' \cap [b]$ – клика. Отсюда $[a]' \cap [b]$ состоит из 0-точек для Λ . Противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть u, w – несмежные вершины из $[a] \cap [b]$, $\Delta = [a] \cap [b] \cap [u] \cap [w]$. Тогда $(a^\perp \cap [b]') \cap ([u] \cap [w]) = K(a)$. Более того, $[a] \cap [b] = \Delta \cup K(u) \cup K(w)$, $[u] \cap [w] = \Delta \cup K(a) \cup K(b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\Lambda_{u,w} = \Lambda$ и $([u] \cap [w]) \cap [a] \cap [b]'$ состоит из 0-точек для Λ . По лемме 6 $(a^\perp \cap [b]') \cap ([u] \cap [w]) = K(a)$. Теперь $[a] \cap [b] = \Delta \cup ([a] \cap [b] \cap [u] \cap [w]') \cup ([a] \cap [b] \cap [u]' \cap [w])$. Отсюда следует второе равенство в лемме 7. Из симметричных соображений получаем третье равенство. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Подграф $[a] \cap [b]'$ не содержит несмежных β -точек для Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть c и d – несмежные β -точки для Λ из $[a] \cap [b]'$. Тогда $\Lambda_{c,d} \subset b^\perp \cap [a]'$, причем $\Lambda \subset [c] \cap [d]$. Следовательно, вершины из Λ не смежны с вершинами из $\Lambda_{c,d}$. По лемме 6 $\Lambda_{c,d} = K(b)$. Теперь любая вершина из $[c] \cap [d]'$ является 0-точкой или β -точкой для $\Lambda_{c,d}$, причем в $[c] \cap [d]'$ точно $\beta - 1$ вершина из $K(c)$ и μ β -точек для $\Lambda_{c,d}$. Отсюда $\Lambda_{b,c} = K(d)$, вершина a будет β -точкой для $\Lambda_{b,c}$ из $[c] \cap [b]'$ и $|K(a)| = \beta$.

Таким образом, $|K(x)| = \beta$ для любой вершины x из Γ и $\Gamma - \alpha$ -расширение графа с $\beta = 1$, что противоречит лемме 5. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $c \in [a] \cap [b]'$, e — несмежная с c вершина из Λ , w — несмежная с c вершина из $[a] \cap [b]$. Вершина c будет i -точкой для Λ тогда и только тогда, когда $[w]$ не содержит ровно i вершин из $[e] \cap [a]' \cap [b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть c будет i -точкой для Λ . Тогда $\Lambda_{c,w}$ содержит $\beta - i$ вершин из Λ и i вершин из $[a]' \cap [b]$. Заметим, что $[e] \cap [a]' \cap [b]$ по лемме 5 содержится в $[c]'$, поэтому $[w]$ не содержит точно i вершин из $[e] \cap [a]' \cap [b]$.

Обратно, пусть $[w]$ не содержит i вершин из $[e] \cap [a]' \cap [b]$. Тогда $\Lambda_{c,w} \subseteq e^\perp$, поэтому $\Lambda_{c,w}$ содержит i вершин из $[a]' \cap [b]$. Отсюда $\Lambda_{c,w}$ содержит $\beta - i$ вершин из Λ и c является i -точкой для Λ . Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Если $[c]$ содержит $[a] \cap [b]$ для $c \in [a] \cap [b]'$, то $c \in K(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c \in [a] \cap [b]' - K(a)$ и $[c]$ содержит $[a] \cap [b]$. Тогда $[c]$ не содержит вершин из $[a]' \cap [b]$. Покажем сначала, что c есть β -точка для Λ . Если $e \in \Lambda - [c]$, то $\Lambda_{e,c}$ содержит β вершин из $b^\perp \cap [a]'$. Тогда a будет 0-точкой для $\Lambda_{e,c}$ и по лемме 6 $a \in K(c)$. Противоречие.

Пусть $w \in [a] \cap [b]$, $d \in [a] \cap [b]' \cap [c]'$. Тогда $w \in [b] \cap [c]$ и w не смежна с вершинами из $\Lambda_{b,c}$, в частности, w не смежна с d . Теперь $[a] \cap [b] \subset [d]'$ и по лемме 1 $[a] \cap [b]$ — клика.

По лемме 8 d является i -точкой для Λ , $0 < i < \beta$, и $\Lambda - [d]$ содержит некоторую вершину e . Тогда $\Lambda_{d,e}$ лежит в $b^\perp$ и содержит $[a] \cap [b]$. Заметим, что вершина из $\Lambda_{d,e} - ([a] \cap [b])$ будет смежна со всеми вершинами из $[a] \cap [b]$ и, значит, (см. первый абзац доказательства леммы) будет β -точкой для Λ . Отсюда $\Lambda_{d,e} = ([a] \cap [b]) \cup \{b\}$, $\beta = \mu + 1$, $k = 3\mu$ и любая вершина из $\Lambda - [d] \cup \{e\}$ будет 0-точкой для $\Lambda_{d,e}$. По лемме 6 $\Lambda - [d] = K(e)$, причем $[d], [e]$ расщепляют $[a]' \cap [b]$. Заметим, что $[a] \cap [b]' \cap [c]' = \Lambda_{b,c}$ и $[e]$ не содержит некоторую вершину f из $\Lambda_{b,c}$. Как и выше, $[f]$ не содержит вершину g из Λ и $\Lambda_{f,g} = ([a] \cap [b]) \cup \{b\}$. Отсюда f является 0-точкой для $\Lambda_{d,e}$ и по лемме 6 $f \in K(e)$. Мы получили противоречие с тем, что $a \in [f] - [e]$. Лемма доказана.

ЛЕММА 11. Пусть $e \in \Lambda$, $w \in [a] \cap [b]$.

- (1) Если $\Lambda_{e,w}$ нетривиально пересекает $[a] \cap [b]'$ и $[a]' \cap [b]$, то $\Lambda_{e,w} - ([a] \cap [b])$ состоит из $\frac{1}{2}\mu$ -точек для Λ .
- (2) Если c и d — несмежные вершины из $[e] \cap ([a] \cup [b]) - ([a] \cap [b])$, то $\Lambda - [c] \subset [d]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть s есть i -точка для Λ , $s \in [a] \cap [b]' \cap \Lambda_{e,w}$. По лемме 5 $\Lambda_{e,w} - ([a] \cap [b])$ состоит из точек x , для которых $[x] \cap \Lambda = [c] \cap \Lambda$. По лемме 9 $[w]$ не содержит i вершин из $[e] \cap [a]' \cap [b]$. Но $|[e] \cap [w]| = \mu$, поэтому $[w]$ не содержит $\mu - i$ вершин из $[a] \cap [b]' \cap [e]$. Снова по лемме 9 $i = \mu - i$.

(2) По лемме 1 $[e] \cap [c]'$ – клика, поэтому $[d]$ содержит $\Lambda - [c]$. Лемма доказана.

ЛЕММА 12. Если $w \in [a] \cap [b]$, то $w^\perp$ не содержит $[a] \cap [b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w \in [a] \cap [b]$ и $w^\perp$ содержит $[a] \cap [b]$. Выберем $e \in \Lambda$ и покажем, что $\Lambda_{e,w}$ нетривиально пересекает $[a] \cap [b]'$ и $[a]' \cap [b]$. Если $\Lambda_{e,w} \subset [a]$, то $b \in [w] \cap [e]'$ и является 0-точкой для $\Lambda_{e,w}$. По лемме 6 $b \in K(w)$. Противоречие. Теперь по лемме 11 $\Lambda_{e,w}$ состоит из $\frac{1}{2}\mu$ -точек для Λ .

Пусть $s \in [a] \cap [b]' \cap \Lambda_{e,w}$. По лемме 5 $\Lambda \cap [c]$ состоит из β -точек для $\Lambda_{e,w}$ и $\Lambda - ([c] \cup \{e\})$ состоит из 0-точек для $\Lambda_{e,w}$. По лемме 7 $\Lambda - [c] = K(e)$, поэтому $|K(e)| = \beta - \frac{1}{2}\mu$. Если $g \in \Lambda \cap [c]$, то для $d \in \Lambda_{g,w}$, как и выше, $\Lambda - [d] = K(g)$. Допустим, что $\Lambda \neq K(e) \cup K(g)$. Тогда для $f \in \Lambda - (K(e) \cup K(g))$ подграф $[w]'$ содержит три непересекающиеся подграфа вида $\Lambda_{x,w}$, где $x \in \{e, f, g\}$. С другой стороны, $[w]$ содержит $\mu + \beta - 2$ вершин из $([a] \cap [b]') \cup ([a]' \cap [b])$, поэтому $[w]'$ содержит $\mu + \beta$ вершин из $([a] \cap [b]') \cup ([a]' \cap [b])$. Противоречие с тем, что $2\beta > \mu$. Итак, $\Lambda = K(e) \cup K(g)$, $\mu = \beta$, $k = 3\mu - 1$ и $[w]'$ – Λ расщепляется подграфами $\Lambda_{e,w}$ и $\Lambda_{g,w}$.

Заметим, что $\Lambda_{b,c}$ содержит $K(e)$ и $\frac{1}{2}\mu$ вершин из $[a] \cap [b]'$. Далее, w смежная с a вершина из $[b] \cap [c]'$ и по лемме 5 $\Lambda_{b,c} \cap [a] \cap [b]' \subset [w]$. Отсюда $\Lambda_{c,w}$ содержит $K(e)$ и $\frac{1}{2}\mu$ вершин из $[a]' \cap [b]$, поэтому $\Lambda_{e,w}$ пересекает $[a] \cap [b]'$ и $[a]' \cap [b]$ по $\frac{1}{2}\mu$ вершинам. Аналогично, $\Lambda_{g,w}$ пересекает $[a] \cap [b]'$ и $[a]' \cap [b]$ по $\frac{1}{2}\mu$ вершинам, следовательно, $[w]$ содержит по $\mu - 1$ вершине из $[a] \cap [b]'$ и из $[a]' \cap [b]$.

Ясно, что $\Lambda_{a,c} = ([g] \cap [b] - [e]) \cup \{b\}$, поэтому $[g] \cap [e]$ содержит единственную вершину из $[b]$, и вершины g, c являются $(\mu - 1)$ -точками для $\Lambda_{a,e}$. Таким образом, $[c]$ содержит $a, \frac{3}{2}\mu - 2$ вершин из $[a] \cap [b]'$, $\mu - 1$ вершину из $[a]' \cap [b]$, $\frac{1}{2}\mu$ вершин из Λ и единственную вершину z из $[a] \cap [b]$. Отсюда $[b] \cap [c]$ содержит z и $\mu - 1$ вершину из $[a]' \cap [b]$. Но по лемме 1 $[a]' \cap [c]$ – клика, поэтому указанные $\mu - 1$ вершин образуют клику из $[g]$. Если $[z]$ содержит некоторую вершину u из $[b] \cap [c]$, то $u^\perp \subset [b] \cap [c]$ и, как показано выше, $\Lambda_{b,c} = K(e) \cup K(y)$ для $y \in [a] \cap [b]' \cap [c]'$. Однако, $[e] \cap [g]$ содержит единственную вершину из $[a] \cap [b]'$, поэтому $\mu = 2$, и Γ – граф валентности 5. Это противоречит тому, что отличная от w вершина u из $[a] \cap [b]$ должна быть смежна с двумя вершинами из $[a] \cap [b]'$ и с двумя вершинами из $[a]' \cap [b]$. Итак, $[b] \cap [c] \cap [z]' = [b] \cap [c] - \{z\}$ и по лемме 7

$[b] \cap [c] - \{z\} = K(y)$ для некоторой вершины y . Противоречие с тем, что $[w]$ содержит $\frac{1}{2}\mu$ вершин из $K(y)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 13. *Если c, d – несмежные вершины из $[a] \cap [b]'$, то $[c] \cap [d]$ содержит вершину из Λ и $\Lambda \subset [c] \cup [d]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[c] \cap [d]$ не пересекает Λ . Ввиду леммы 5 $[c] \cap [d]$ не пересекает и $[a]' \cap [b]$, поэтому $a \in [c] \cap [d]$ и $a^\perp$ содержит $[c] \cap [d]$. Это противоречит лемме 12.

Значит, $[c] \cap [d]$ содержит некоторую вершину из Λ и по лемме 11 $\Lambda \subset [c] \cup [d]$. Лемма доказана.

ЛЕММА 14. *Подграф $[a] \cap [b]'$ не содержит β -точек для Λ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть s есть β -точка для Λ из $[a] \cap [b]'$. Ввиду леммы 8 вершина d из $[a] \cap [b]' \cap [c]'$ будет i -точкой для Λ , $0 < i < \beta$. Если $e \in \Lambda \cap [d]$, то по лемме 7 $[d] \cap \Lambda = K(e)$, $[c] \cap [d] \cap a^\perp \cap [e]' = K(a)$, $[c], [d]$ расщепляют $[a] \cap [b]$ и $[e] \cap [a]' \cap [b]$.

Покажем, что $\Lambda_{b,d} = (\Lambda_{b,c} \cap \Lambda) \cup K(c)$. Если $\Lambda_{b,d} \subset [e]$, то равенство следует из леммы 7, примененной к $\{a, e, c, d\}$. Если $y \in \Lambda_{b,d} - [e]$, то $[y] \cap [d]$ не содержит точек из Λ , что противоречит лемме 13. Теперь $|K(c)| = |K(e)| = i$ и ввиду леммы 7 $|K(a)| = |K(d)|$. Подсчитывая число ребер между Λ и $\Lambda_{b,c}$, убеждаемся, что $\beta i = \beta |K(d)|$, поэтому $|K(a)| = |K(d)| = i$. Далее, $\Lambda_{b,c}$ расщепляется подграфами $K(x)$, $x \in \Lambda_{b,c}$, поэтому i делит β .

Положим $\Delta = ([a] \cap [b]') - (\Lambda_{b,c} \cup K(c))$. Тогда Δ содержит $\mu - 1 - i$ вершин и ввиду леммы 13 Δ состоит из 0-точек для Λ . По лемме 6 $\Delta \cup \{a\} = K(a)$. Отсюда, в частности, $\mu = 2i$.

Если $u \in [a] \cap [b] \cap [c]'$, то $\Lambda_{u,c} \subset [a]' \cap [b]$, поэтому b является β -точкой для $\Lambda_{u,c}$. Как показано выше, $|K(u)| = |K(b)| = \frac{1}{2}\mu$. Теперь $[c]$ содержит $\frac{1}{2}\mu$ -точек из $[a] \cap [b]$ и из $[a]' \cap [b]$, поэтому $[c] \cap [a]' \cap [b] = K(c^*)$ для подходящей вершины c^* .

a	u	d	$\dots$	f
w	b	d^*	$\dots$	f^*
c	c^*	e	$\dots$	g

Итак, $[a] \cap [b] = K(u) \cup K(w)$, где $w \in [c]$, $u \in [d]$, и для $t = 2\beta/\mu$ Γ будет $(\frac{1}{2}\mu)$ -расширением прямоугольной решетки $3 \times (t + 2)$ (см. таблицу). Но это противоречит выбору Γ . Лемма доказана.

ЛЕММА 15. *Подграф Λ не является кликой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Λ – клика, то для Γ выполняются леммы 5–14. Пусть $w \in [a] \cap [b]$, $e \in \Lambda$. Если $\Lambda_{e,w}$ лежит в $[a]$, то a является β -точкой для $\Lambda_{e,w}$. Отсюда $\Lambda_{e,w}$ пересекает $[a] \cap [b]'$ и $[a]' \cap [b]$. В силу леммы 11 $[a] \cap [b]' - K(a)$ состоит из $\frac{1}{2}\mu$ -точек для Λ . Подсчитав число ребер между Λ и $[a] \cap [b]'$, получим равенство $|[a] \cap [b]' - K(a)| = 2\beta$, поэтому $|K(a)| = k - \mu - 2\beta + 1 = 3\mu - k - 1$.

Таким образом, $|K(y)| = 3\mu - k - 1$ для любой вершины y из Γ и Γ является $(3\mu - k - 1)$ -расширением графа с $|K(a)| = 1$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $3\mu - k - 1 = 1$, $k = 3\mu - 2$ и $\beta = \mu - 1$.

Если c, d – несмежные вершины из $[a] \cap [b]'$, то ввиду леммы 13 $[c] \cap [d]$ содержит единственную вершину e из Λ . Теперь $[c] \cap [d]$ содержит a, e и $\mu - 2$ вершин из $[a] \cap [b]'$. Таким образом, $[a] \cap [b]$ – полный многодольный граф с долями порядка 2, следовательно, $[c]$ и $[d]$ содержат по $\frac{1}{2}\mu$ вершин из $[a] \cap [b]$. Но теперь $[c]$ и $[d]$ содержат по $\frac{1}{2}\mu$ вершин из $[a]' \cap [b]$, каждая из которых смежна с вершинами из $\Lambda \cap [c]$ и $\Lambda \cap [d]$ соответственно. Отсюда $[e] \cap [f]$ содержит $\frac{1}{2}\mu$ вершин из $[a]' \cap [b]$ для $f \in \Lambda \cap [c] - \{e\}$, поэтому $[f]$ содержит $\frac{1}{2}\mu$ вершин из $[a]' \cap [b] - [e]$, причем $[g] \cap [a]' \cap [b] - [e]$ лежит в $[f]$ для любой вершины g из $\Lambda - \{c\}$ (так как $[f] \cap [g]$ содержит $\frac{1}{2}\mu$ вершин из $[a]' \cap [b]$).

Итак, $2\mu - 2 = \frac{3}{2}\mu$ и $\mu = 4$. Несложно показать теперь, что $\Gamma = T(7)$, а это противоречит выбору Γ . Лемма доказана.

Теперь антиокрестность любой вершины удовлетворяет условию теоремы и по предположению индукции $[a]'$ – граф из заключения теоремы, в котором антиокрестность вершины не является кликой. Значит, $[a]'$ – прямоугольная решетка $m \times n$, $3 \leq m \leq n$, треугольный граф $T(m)$, $m \geq 6$, или граф Шлефли.

ЛЕММА 16. *Для любой вершины a из Γ антиокрестность $[a]'$ – прямоугольная решетка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $[a]'$ – граф Шлефли, то дополнительный к Γ граф является локально $GQ(2, 4)$ -графом. Но тогда по [2] Γ – граф на 56 или 64 вершины, в то время как Γ – граф на 52 вершинах.

Если $[a]'$ – треугольный граф $T(m)$, $m > 6$, то $\bar{\Gamma}$ – локально $\overline{T(m)}$ -граф и по теореме Холла [3] граф $\bar{\Gamma} = \overline{T(m+2)}$, что противоречит предположению индукции. Но для $m = 6$ $\overline{T(6)} = GQ(2, 2)$ и по [3] $\bar{\Gamma}$ – граф на 28, 32 или 35 вершинах. Но Γ в этом случае содержит 28 вершин и поэтому $\Gamma = T(8)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 17. *Γ не содержит подграфов, изоморфных полному графу на четырех вершинах с удаленным одним ребром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma_0 = \{a, b, c, d\}$ изоморфен полному графу на четырех вершинах с удаленным одним ребром и a не смежна с b . Поскольку прямоугольная решетка не содержит таких подграфов, то по лемме 16 любая вершина из Γ смежна с вершиной из Γ_0 . По лемме 1 $[c] \cap [a]'$ и $[d] \cap [a]'$ являются кликами и, значит, содержатся в $[b]$. Но тогда $[a]' - \{b\}$ содержится в $[b]$, что невозможно в прямоугольной решетке. Лемма доказана.

Заметим, что по лемме 16 $\mu(\Gamma) = 2$, и, следовательно, если $a \in \Gamma$, $a, b \in [a]'$, то $|[a] \cap [b]| = 2$.

ЛЕММА 18. *Пусть $a \in \Gamma$, $b \in [a]'$ и $\{c, d\} = [a] \cap [b]$. Тогда*

- (1) *c не смежна с d ;*
- (2) *$[a]$ расщепляется кликами $[a] \cap [c]'$ и $[a] \cap [d]'$;*
- (3) *$[b] \cap [a]'$ расщепляется кликами $[c] \cap [a]' - \{b\}$ и $[d] \cap [a]' - \{b\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) непосредственно следует из леммы 17.

(2) следует из леммы 1 и того, что $\mu = 2$.

Докажем (3). Пусть $C = [c] \cap [a]' - \{b\}$, $D = [d] \cap [a]' - \{b\}$. Так как c и d смежны с b , то C и D содержатся в $[b] \cap [a]'$ и являются кликами по лемме 1. Так как $\mu = 2$, то C и D не пересекаются. Пусть e – вершина из $[b] \cap [a]'$, которая не содержится в $C \cup D$. Тогда несмежные вершины c и d содержатся в $[e]'$, а вершина b в $[e]$, что противоречит лемме 1. Лемма доказана.

Завершим теперь доказательство теоремы. По лемме 16 в Γ антиокрестность любой вершины – прямоугольная решетка. По лемме 18 граф Γ содержит вершину a такую, что для любой вершины b из $[a]'$ существуют вершины c и d , для которых $\{c, d\} = [a] \cap [b]$ и $[a]$ расщепляется $[a] \cap [c]'$ и $[a] \cap [d]'$. Пусть $X = ([a] \cap [c]') \cup \{a\}$, $Y = ([a] \cap [d]') \cup \{a\}$, а $|X| = m$, $|Y| = n$. Тогда по лемме 18 Γ является $m \times n$ -графом и, значит, не противоречит теореме. Теорема доказана.

Уральский государственный технический университет
Институт математики и механики УрО РАН
E-mail: makhnev@imm.e-burg.su

Поступило
19.08.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Seidel J. J. Strongly regular graphs with $(-1, 1, 0)$ adjacency matrix having eigenvalue 3 // Linear Algebra Appl. 1968. V. 1. P. 281–298.
- [2] Buekenhout F., Hubaut X. Locally polar spaces and related rank 3 group // J. Algebra. 1977. V. 45. P. 391–434.
- [3] Hall J. I., Shult E. E. Locally cotriangular graphs // Geom. Dedicata. 1985. V. 18. P. 113–159.