Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Килижеков, Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами первой степени на n -симплексах, *Матем. заметки*, 1996, том 60, выпуск 4, 504–510

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1858>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:53:02

ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ НА n -СИМПЛЕКСАХ

Ю. А. Килижеков

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ — точки из $\mathbb{R}^n$, не лежащие в одной гиперплоскости, Δ_n — n -симплекс, т.е. выпуклая оболочка этих точек, $S_{h,n}$ — совокупность n -симплексов с диаметром, не превосходящим $h > 0$.

Для векторов $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ из $\mathbb{R}^n$ единичной длины положим

$$D_\xi f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \xi_i,$$
$$D_{\xi\eta}^2 f(x) = D_\eta [D_\xi f(x)], \quad \text{где } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим через $W_n^2 M$ класс функций с непрерывными в Δ_n производными $D_{\xi\eta}^2 f(x)$, не превосходящими по модулю числа $M > 0$.

Через $P_{1,n}(f; x) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$ будем обозначать многочлен первой степени, интерполирующий функцию f в вершинах симплекса Δ_n . Пусть

$$\|f\|_{C(\Delta_n)} = \max_{x \in \Delta_n} |f(x)|.$$

Положим

$$\alpha_{1,n} = \sup \{ \|f(x) - P_{1,n}(f; x)\|_{C(\Delta_n)} M^{-1} h^{-2}; f \in W_n^2 M, \Delta_n \in S_{h,n} \}.$$

Известно, что $\alpha_{1,n} = 1/6$ [1]. В [2] этот результат получен для правильных симплексов. В [3] показано, что для произвольного n $\alpha_{1,n} = n/(4(n+1))$. В настоящей работе для тех же аппроксимирующих агрегатов найдена точная верхняя грань уклонения на классе $W_n^2 M$ в произвольной точке произвольного симплекса. Такого рода исследования проводятся в связи с методом конечных элементов и, кроме того, представляют самостоятельный интерес.

Обозначим через R_n радиус описанной вокруг симплекса Δ_n сферы, $\tilde{O}_n$ — ее центр, а через $d_n(x)$ — евклидово расстояние от точки x до $\tilde{O}_n$.

ТЕОРЕМА. Для любой точки $x \in \Delta_n$ и любой функции $f \in W_n^2 M$

$$|f(x) - P_{1,n}(f; x)| \leq \frac{1}{2} M (R_n^2 - d_n^2(x)), \quad (1)$$

причем эта оценка неулучшаема на классе $W_n^2 M$ для любого $x \in \Delta_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 1$. Для $f \in W_1^2 M$ и $P_{1,1}(f; \cdot)$, интерполирующего f в концах отрезка $[a, b]$, известна (см., например, [2]) оценка

$$|f(x) - P_{1,1}(f; x)| \leq \frac{1}{2} M |x - a| \cdot |x - b|. \quad (2)$$

Докажем теорему для $n = 2$. Декартову систему координат расположим так, чтобы начало координат O совпало с серединой отрезка $[a_1, a_2]$, а ось Ox_2 проходила через $\tilde{O}_2$. В Δ_2 выберем произвольную точку x . Пусть a' — точка пересечения прямой, проходящей через a_3 и x , и отрезка $[a_1, a_2]$. Положим $\beta = |a_3 - x|/|a_3 - a'|$. В выбранной системе координат координаты точек запишем следующим образом:

$$a_1 = (x_{1,1}; 0), \quad a_2 = (x_{2,1}; 0), \quad a_3 = (x_{3,1}; x_{3,2}), \quad a' = (y_1; 0).$$

Тогда

$$x = (y_1 - (1 - \beta)(y_1 - x_{3,1}); (1 - \beta)x_{3,2}).$$

Так как $\tilde{O}_2$ лежит на оси Ox_2 и $|\tilde{O}_2 - a_1| = |\tilde{O}_2 - a_3|$, то

$$\tilde{O}_2 = \left(0; \frac{x_{3,1}^2 + x_{3,2}^2 - x_{1,1}^2}{2x_{3,2}}\right).$$

Из (2) следует, что

$$|f(a') - P_{1,2}(f; a')| \leq \frac{1}{2} M (x_{1,1}^2 - y_1^2), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} |f^*(x) - P_{1,1}(f^*; x)| &\leq \frac{1}{2} M |a_3 - x| \cdot |x - a'| \\ &= \frac{1}{2} M \beta (1 - \beta) [x_{3,1} - y_1]^2 + x_{3,2}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь f^* — сужение f на прямую, проходящую через a_3 и a' , $P_{1,1}(f^*; \cdot)$ интерполирует f^* в точках a_3 и a' . Так как (см. рис.)

$$|f(x) - P_{1,2}(f; x)| = \frac{|a_3 - x|}{|a_3 - a'|} [|f(a') - P_{1,2}(f; a')| + |f^*(x) - P_{1,1}(f^*; x)|],$$

то, учитывая (3) и (4), получим

$$|f(x) - P_{1,2}(f; x)| \leq \frac{1}{2} M [\beta(x_{1,1}^2 - y_1^2) + \beta(1 - \beta)((x_{3,1} - y_1)^2 + x_{3,2}^2)]. \quad (5)$$

Найдем разность $R_2^2 - d_2^2(x)$:

$$\begin{aligned} d_2^2(x) &= [y_1 - (1 - \beta)(y_1 - x_{3,1})]^2 + \left[(1 - \beta)x_{3,2} - \frac{x_{3,1}^2 + x_{3,2}^2 - x_{1,1}^2}{2x_{3,2}} \right]^2, \\ R_2^2 &= |a_1 - \tilde{O}_2|^2 = x_{1,1}^2 + \left(\frac{x_{3,1}^2 + x_{3,2}^2 - x_{1,1}^2}{2x_{3,2}} \right)^2, \\ R_2^2 - d_2^2(x) &= \beta(x_{1,1}^2 - y_1^2) + \beta(1 - \beta)[(x_{3,1} - y_1)^2 + x_{3,2}^2]. \end{aligned} \quad (6)$$

Сравнивая (5) и (6), получаем неравенство (1) для $n = 2$.

Для произвольного n доказательство проводим по индукции. Пусть неравенство (1) верно для $n - 1$, тогда покажем, что оно верно и для n . В Δ_n выберем произвольную точку x . Из вершины a_{n+1} через точку x опустим луч на противоположащую грань, являющуюся $(n - 1)$ -мерным симплексом, который обозначим Δ'_{n-1} . Пусть a' — точка пересечения этого луча

Здесь f^* – сужение f на прямую, проходящую через точки a_{n+1} , a' ; $P_{1,1}(f^*; \cdot)$ интерполирует f^* в точках a_{n+1} и a' .

Так как

$$|f(x) - P_{1,n}(f; x)| = \frac{|a_{n+1} - x|}{|a_{n+1} - a'|} |[f(a') - P_{1,n}(f; a')] + [f(x) - P_{1,1}(f; x)]|,$$

то, учитывая (7), (8), получаем

$$|f(x) - P_{1,n}(f; x)| \leq \frac{1}{2} M [\beta(x_{1,1}^2 + \dots + x_{1,n-1}^2 - y_1^2 - \dots - y_{n-1}^2) + \beta(1 - \beta)((x_{n+1,1} - y_1)^2 + \dots + (x_{n+1,n-1} - y_{n-1})^2 + x_{n+1,n})]. \quad (9)$$

Найдем разность $R_n^2 - d_n^2(x)$:

$$\begin{aligned} d_n^2(x) &= [y_1(1 - \beta)(y_1 - x_{n+1,1})]^2 + [y_2 - (1 - \beta)(y_2 - x_{n+1,2})]^2 + \dots \\ &\quad + [y_{n-1} - (1 - \beta)(y_{n-1} - x_{n+1,n-1})]^2 \\ &\quad + \left[(1 - \beta)x_{n+1,n} - \frac{x_{n+1,1}^2 + \dots + x_{n+1,n}^2 - x_{1,1}^2 - \dots - x_{1,n-1}^2}{2x_{n+1,n}} \right]^2, \\ R_n^2 &= |a_1 - \tilde{O}_n|^2 = x_{1,1}^2 + \dots + x_{1,n-1}^2 \\ &\quad + \left(\frac{x_{n+1,1}^2 + \dots + x_{n+1,n}^2 - x_{1,1}^2 - \dots - x_{1,n-1}^2}{2x_{n+1,n}} \right)^2; \\ R_n^2 - d_n^2(x) &= \beta(x_{1,1}^2 + \dots + x_{1,n-1}^2 - y_1^2 - \dots - y_{n-1}^2) + \beta(1 - \beta) \\ &\quad \times [(y_1 - x_{n+1,1})^2 + \dots + (y_{n-1} - x_{n+1,n-1})^2 + x_{n+1,n}^2]. \end{aligned} \quad (10)$$

Из сравнения (9) и (10) следует неравенство (1).

Докажем неулучшаемость оценки (1). Пусть $g(x) = M(R_n^2 - d_n^2(x))/2$. Если систему координат расположить так, чтобы начало координат совпало с $\tilde{O}_n$, то можно $g(x)$ записать в виде

$$g(x) = \frac{1}{2} M (R_n^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_i} &= -M x_i, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} &= \begin{cases} -M, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ – векторы единичной длины из $\mathbb{R}^n$. Тогда, используя (11) и неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$|D_{\xi\eta}^2 g(x)| = M |\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n| \leq M.$$

Следовательно, $g \in W_n^2 M$ и, кроме того, функция $g(x)$ обращается в нуль в вершинах симплекса Δ_n . Поэтому при $f = g$ неравенство (1) обращается в равенство для всех точек x из Δ_n .

Теорема доказана полностью.

Пусть для произвольного Δ_n

$$\alpha_{1,n}^* = \sup\{\|f(x) - P_{1,n}(f; x)\|_{C(\Delta_n)} M^{-1}; f \in W_n^2 M\},$$

ρ_n – чебышевский радиус симплекса Δ_n .

СЛЕДСТВИЕ. *Справедливо равенство*

$$\alpha_{1,n}^* = \frac{1}{2} \rho_n^2. \quad (12)$$

ЛЕММА. *Точка из Δ_n , ближайшая к $\tilde{O}_n$, является чебышевским центром симплекса Δ_n .*

Для доказательства леммы нам понадобится следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ [4]. *Пусть K – замкнутое выпуклое ограниченное множество в гильбертовом пространстве $\mathbb{X}$ и $B(x, r)$ – замкнутый шар радиуса r с центром в точке x , содержащий множество K . Для того, чтобы r был чебышевским радиусом множества K , необходимо и достаточно, чтобы $x \in \text{conv}(K \cap S(x, r))$, где*

$$S(x, r) = \{y \in \mathbb{X} : \|x - y\|_{\mathbb{X}} = r\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть x^* ближайшая к $\tilde{O}_n$ точка из Δ_n . Если $\tilde{O}_n \in \Delta_n$, то чебышевской сферой симплекса Δ_n является сфера, описанная вокруг Δ_n , и, следовательно, x^* совпадает с $\tilde{O}_n$.

Пусть $\tilde{O}_n \notin \Delta_n$. Так как Δ_n – выпуклое множество, то x^* – единственная. Существует k -мерная грань Γ_k ($1 \leq k \leq n - 1$) такая, что $x^* \in \Gamma_k$, соединим $\tilde{O}_n$ с x^* . Точка x^* – ближайшая к $\tilde{O}_n$, поэтому $\tilde{O}_n x^* \perp \Gamma_k$. Следовательно, расстояние от точки x^* до любой вершины Δ_n , лежащей в Γ_k , одинаково; обозначим его через r . Построим сферу $S(x^*, r)$ радиуса r с центром в точке x^* . Очевидно, что $S(x^*, r)$ содержит в себе Δ_n , и точками пересечения этой сферы с Δ_n будут вершины, лежащие в Γ_k , следовательно,

$$x^* \in \text{conv}(\Gamma_k \cap S(x^*, r)) \Rightarrow x^* \in \text{conv}(\Delta_n \cap S(x^*, r)).$$

Все условия предложения выполняются, поэтому r – чебышевский радиус Δ_n и x^* – чебышевский центр симплекса Δ_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Положим $\lambda_n = \sup(R_n^2 - d_n^2(x))$. Если $\tilde{O}_n \in \Delta_n$, то $\lambda_n = R_n^2$, в этом случае R_n является чебышевским радиусом Δ_n . Пусть теперь $\tilde{O}_n \notin \Delta_n$ и x^* — ближайшая к $\tilde{O}_n$ точка из Δ_n . Тогда в силу леммы и теоремы Пифагора

$$\lambda_n = R_n^2 - |\tilde{O}_n - x^*|^2 = \rho_n^2, \quad \alpha_{1,n}^* \leq \frac{1}{2}\rho_n^2. \quad (13)$$

Функция $g(x) = M(R_n^2 - d_n^2(x))/2$ по доказанному выше принадлежит классу W_n^2 и

$$\alpha_{1,n}^* \geq |g(x^*)|M^{-1} = \frac{1}{2}(R_n^2 - |\tilde{O}_n - x^*|^2) = \frac{1}{2}\rho_n^2. \quad (14)$$

Из (13) и (14) получаем (12).

Следует отметить, что результат $\alpha_{1,n} = n/(4(n+1))$ [3] можно получить из (12), так как для произвольных симплексов со стороной h

$$\alpha_{1,n}^* = \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{n+1} h^2.$$

Автор благодарит Ю. Н. Субботина за поставленную задачу и внимание к работе.

Екатеринбург

Поступило

19.04.93

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Субботин Ю. Н. Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 117–137.
- [2] Реззов А. В. Оптимальные кубатурные формулы на классах дифференциальных функций // Деп. ВИНТИ. № 4227–В89.
- [3] Субботин Ю. Н. Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами малых степеней на n -симплексах // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 4. С. 88–100.
- [4] Borwein J., Keener L. The Hausdorff meyrice and Chebyshev centers // J. Approxim. Theory. 1955. V. 28. P. 366–376.